

РАСЧЕТ БАЛОК НА УПРУГОМ ВИНКЛЕРОВСКОМ ОСНОВАНИИ ПРИ ПОМОЩИ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Оробей В.Ф. (Одесский национальный политехнический университет, г.Одесса), **Ковров А.В.** (Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г.Одесса)

Рассмотрены принципы и основные уравнения метода граничных элементов для расчета балок на упругом винклеровском основании.

Дифференциальное уравнение изгиба балки постоянного поперечного сечения на упругом основании с моделью Винклера имеет вид приведенный в [1] :

$$EI \frac{d^4 v(x)}{dx^4} + kbv(x) = q(x) \quad (1)$$

где: EI - поперечная жёсткость балки, кН/м²;

$v(x)$ - поперечный прогиб, м;

k - коэффициент постели кН/м³;

b - ширина подошвы балки, м;

$q(x)$ - поперечная нагрузка, кН/м.

Положительные направления внешних воздействий, примененных к балке, принятые направления координатных осей и обозначения координат точек их приложения приведены на рис. 1.

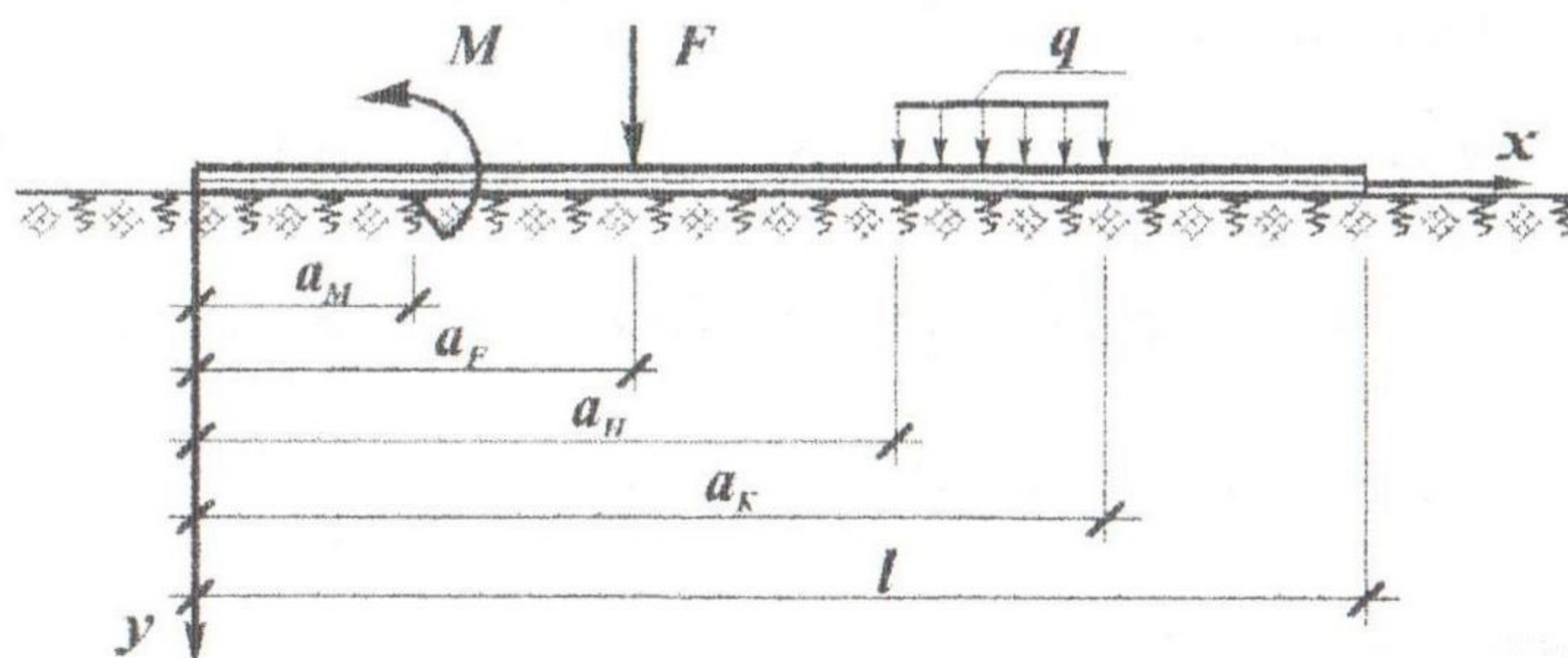


Рис. 1

Для определения углов поворота, изгибающих моментов и поперечных сил в балке используются обычные дифференциальные зависимости теории изгиба

$$\begin{aligned} EI\varphi(x) &= \lambda EI \frac{dv(x)}{dx}; \\ M(x) &= -\lambda^2 EI \frac{d^2v(x)}{dx^2}; \\ Q(x) &= -\lambda^3 EI \frac{d^3v(x)}{dx^3}, \end{aligned} \quad (2)$$

где параметр λ определяется выражением:

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{kb}{4EI}}. \quad (3)$$

Решение уравнения (1) с параметрами (2) по стандартному алгоритму, изложенному в работе [2], приводится к виду:

$$\begin{bmatrix} Iv(x) \\ EI\varphi(x) \\ M(x) \\ Q(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & -A_{13} & -A_{14} \\ A_{21} & A_{11} & -A_{12} & -A_{13} \\ -A_{31} & -A_{21} & A_{11} & A_{12} \\ -A_{41} & -A_{11} & A_{21} & A_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} EIv(0) \\ EI\varphi(0) \\ M(0) \\ Q(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11}(x) \\ B_{21}(x) \\ -B_{31}(x) \\ -B_{41}(x) \end{bmatrix} \quad (4)$$

Фундаментальные функции A_{ij} и элементы матрицы $B(x)$ после преобразований для нагрузки по рис.1 определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} A_{11} &= ch\lambda x \cdot \cos \lambda x; \quad A_{12} = \frac{ch\lambda x \cdot \sin \lambda x + sh\lambda x \cdot \cos \lambda x}{2\lambda}; \\ A_{14} &= \frac{ch\lambda x \cdot \sin \lambda x - sh\lambda x \cdot \cos \lambda x}{4\lambda^3}; \quad A_{13} = \frac{sh\lambda x \cdot \sin \lambda x}{2\lambda^2}; \\ A_{21} &= -\lambda \cdot (ch\lambda x \cdot \sin \lambda x - sh\lambda x \cdot \cos \lambda x); \quad A_{31} = -2\lambda^2 \cdot sh\lambda x \cdot \sin \lambda x; \\ A_{41} &= -2\lambda^3 (ch\lambda x \cdot \sin \lambda x + sh\lambda x \cdot \cos \lambda x); \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
B_{11} &= M \cdot A_{13}(x - a_M)_+ + F \cdot A_{14}(x - a_F)_+ + \\
&\quad + q[A_{15}(x - a_H)_+ - A_{15}(x - a_K)_+]; \\
B_{21} &= M \cdot A_{12}(x - a_M)_+ + F \cdot A_{13}(x - a_F)_+ + \\
&\quad + q[A_{14}(x - a_H)_+ - A_{14}(x - a_K)_+]; \\
B_{31} &= M \cdot A_{11}(x - a_M)_+ + F \cdot A_{12}(x - a_F)_+ + \\
&\quad + q[A_{13}(x - a_H)_+ - A_{13}(x - a_K)_+]; \\
B_{41} &= M \cdot [-4\lambda^4 \cdot A_{14}(x - a_M)] + F \cdot A_{11}(x - a_F)_+ + \\
&\quad + q[A_{12}(x - a_H)_+ - A_{12}(x - a_K)_+],
\end{aligned} \tag{6}$$

где знак «+» обозначает сплайн-функцию, а фундаментальная функция A_{15} имеет вид:

$$A_{15} = \frac{H(\lambda x) - ch\lambda x \cdot \cos \lambda x}{4\lambda^4}, \tag{7}$$

где $H[\lambda(x - a_H)]$ - единичная функция Хевисайда.

Из анализа выражений (5) следует, что математическая модель балки на упругом основании с одним коэффициентом постели существенно проще модели с двумя коэффициентами [2], однако она менее точна.

Уравнение (4) в алгоритме МГЭ позволяет решать широкий круг задач расчёта стержневых систем, связанных с упругим основанием. Стержневые системы могут иметь любые краевые условия и законы изменения жёсткости, а само основание может иметь произвольный закон изменения коэффициента постели k , т.е. случай уравнения (1) с переменными коэффициентами. При оптимальной дискретизации расчётной схемы коэффициенты уравнения (1) можно принять постоянными, а величину приведенной длины всех стержневых элементов $(\lambda l)_i$ выбрать меньше 5. В этих условиях алгоритм МГЭ при использовании уравнения (4) обеспечит приемлемую точность результатов.

Рассмотрим пример построения эпюр прогибов $EIv(x)$, углов поворота $EI\varphi(x)$, изгибающих моментов $M(x)$, поперечных сил $Q(x)$ и реакции основания $kbv(x)$ в железобетонной балке, нагруженной одной сосредоточенной силой (рис.2), приведенной в [4, с.72]. Модуль упругости основания $E_0 = 3 \cdot 10^6$ кПа; модуль

упругости материала балки $E = 2,7 \cdot 10^7$ кПа, размеры сечения $b = 1,0$ м, $h = 0,7$ м; коэффициент постели упругого основания $k = 1 \cdot 10^6$ кН/м³.

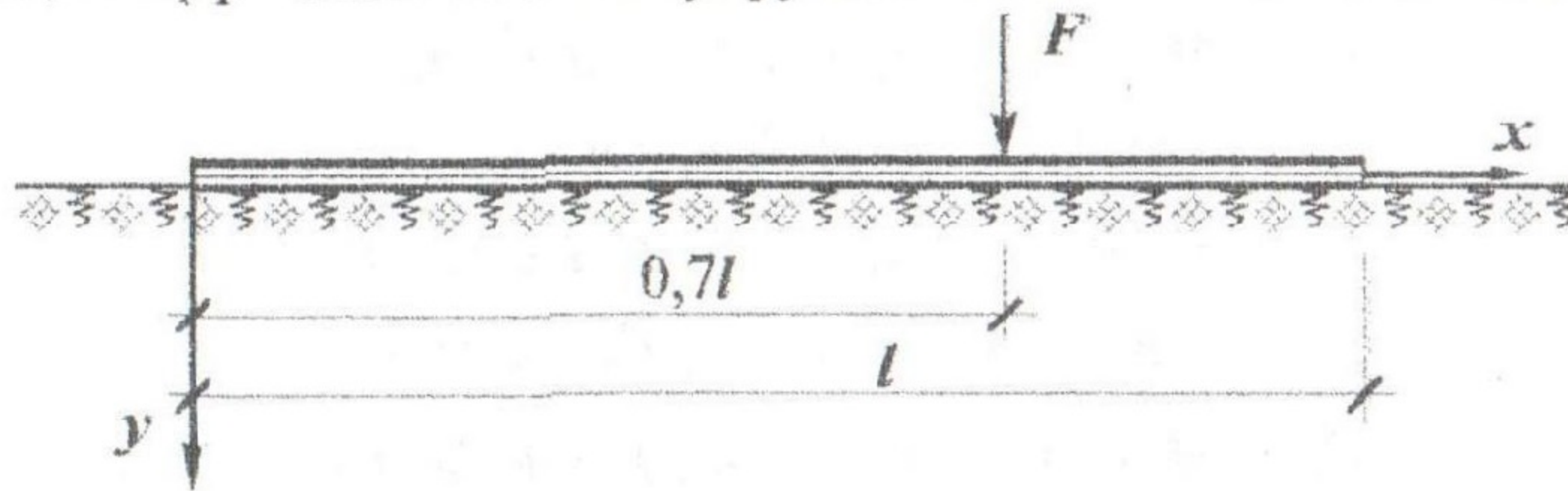


Рис.2

Уравнение (4) для рассматриваемой балки при $x = l$ (краевая задача) после преобразований примет вид:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & -1 & \\ A_{21} & A_{11} & & -1 \\ -A_{31} & -A_{21} & & \\ -A_{41} & -A_{11} & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} EIv^{0-1}(0) \\ EI\varphi^{0-1}(0) \\ EIv^{0-1}(l) \\ EI\varphi^{0-1}(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B_{11}(x) \\ -B_{21}(x) \\ B_{31}(x) \\ B_{41}(x) \end{bmatrix} \quad (8)$$

Решением системы алгебраических уравнений (8) определяются неизвестные граничные параметры $EIv^{0-1}(0)$, $EI\varphi^{0-1}(0)$, $EIv^{0-1}(l)$ и $EI\varphi^{0-1}(l)$. Напряженно-деформированное состояние балки в сечениях балки определяется по уравнению (4).

Расчеты произведены при помощи программы, разработанной в системе компьютерной математики MATLAB.

Значения граничных параметров балки представлены в таблице №1

Таблица №1

$X^* =$	1	$EIv^{0-1}(0) = X(1,1) = -0,15593 \text{ кНм}^3$
	2	$EI\varphi^{0-1}(0) = X(2,1) = 1,858 \text{ кНм}^2$
	3	$EIv^{0-1}(l) = X(3,1) = 1,6949 \text{ кНм}^3$
	4	$EI\varphi^{0-1}(l) = X(4,1) = 1,8364 \text{ кНм}^2$

Напряжённо-деформированное состояние балки в численной форме отражено данными таблицы №2.

Таблица №2

Параметры напряженно-деформированного состояния балки								
Координата x , м Вектор $X1$	Поперечная сила $Q \times 10^3$ кН Вектор Qe		Изгибающий момент $M \times 10^2$ кНм Вектор Me		Угол поворота $EI\varphi$ $\times 10^6$ кНм ² Вектор $EIfi$	Прогиб EIv $\times 10^6$ кНм ³ Вектор EIv	Отпор основания kbv , кН/м Вектор kbv	
	Результаты расчета	Данные работы [4]	Результаты расчета	Данные работы [4]			Результаты расчета	Данные работы [4]
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	2,4075	-0,2021	-0,202	0,272
1,0	-8,168	32,0	-0,061	0,2	2,4076	0,0387	0,039	0,371
2,0	7,741	72,57	-0,083	0,7	2,4077	0,2795	0,279	0,419
3,0	47,725	116,0	0,1742	1,7	2,4077	0,5202	0,520	0,451
4,0	11,790	164,0	0,9517	3,45	2,4070	0,7610	0,761	0,504
5,0	199,92	219,0	2,4901	4,98	2,4049	1,0016	1,002	0,614
6,0	312,09	290,0	5,0301	7,4	2,4001	1,2419	1,242	0,816
7,0	448,27 -551,73	386,6 -613,4	8,812	10,8	2,3913	1,4815	1,482	1,147
8,0	-391,65	-476,0	4,075	5,3	2,3831	1,7201	1,720	1,643
9,0	-207,72	-278,0	1,0585	1,4	2,3800	1,9583	1,958	2,333
10,0	0,0	0,0	0,0	0,0	2,3795	2,1962	2,196	3,272

Анализ данных таблицы №2 показывает, что результаты МГЭ с одним коэффициентом постели удовлетворительно согласуются с результатами И.А. Симвулиди [4]. Максимальная поперечная сила меньше на 18,4%, а максимальный отпор основания также меньше на 32,88%. Подобные расхождения можно объяснить приближённым характером модели упругого основания работы [4], где оно моделируется полиномом третьей степени, коэффициенты которого обеспечивают равенство прогибов балки и основания только в трех точках.

Эпюры напряжённо-деформированного состояния балки приведены на рис.3, они идентичны приведенным в работе [4].

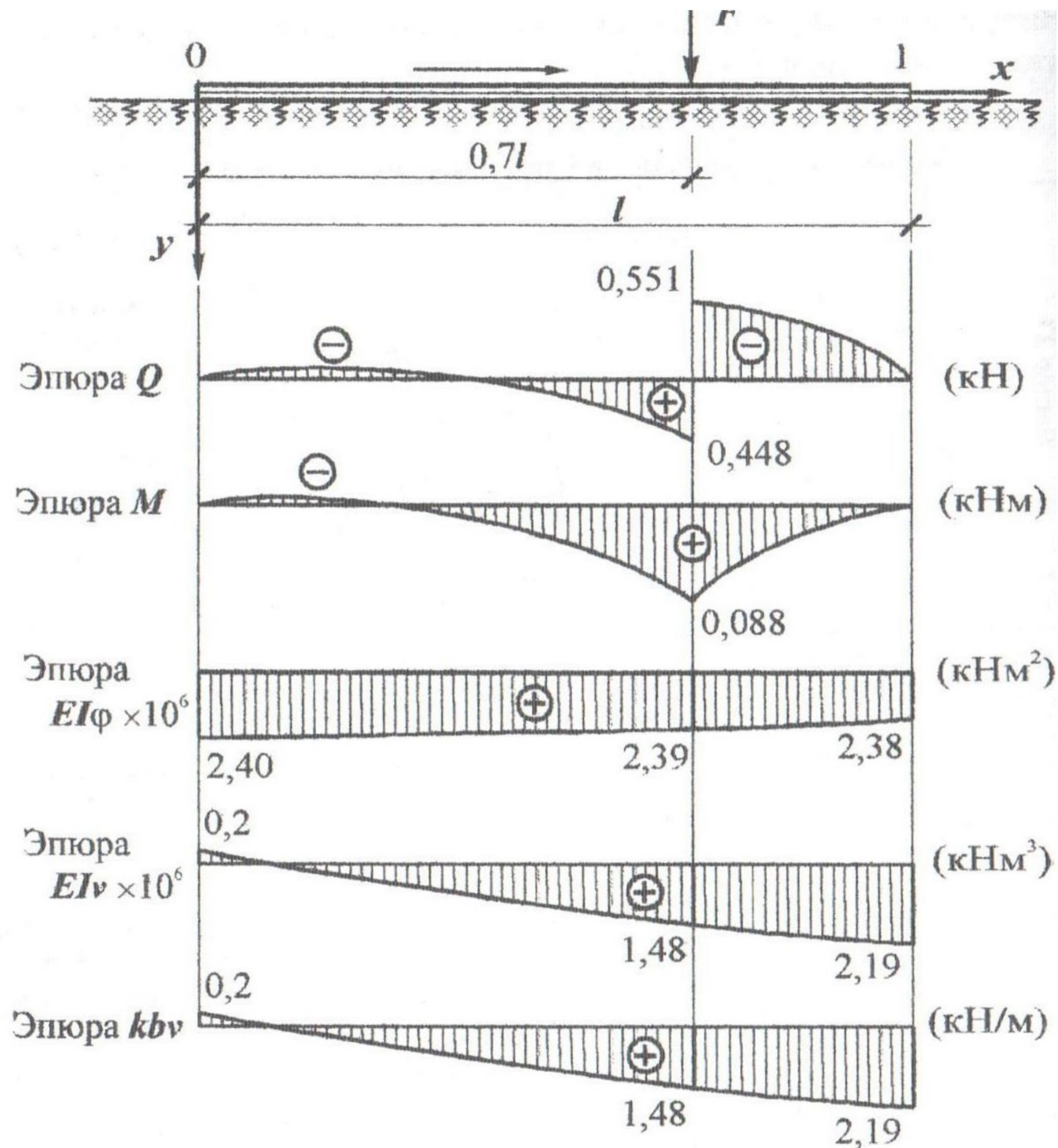


Рис.3

Литература

1. Варданян Г.С., Андреев В.И., Атаров Н.М., Горшков А.А. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности. – М.: АСВ, 1995. – 576с.
2. Баженов В.А., Дашенко А.Ф., Коломиец Л.В., Оробей В.Ф. Строительная механика. Специальный курс. Применение метода граничных элементов. – Одесса: Астропринт, 2001. – 704с.
3. Биргер И.А., Мавлютов Р.Р. Сопротивление материалов. – М.: «Наука», 1986. – 560с.
4. Симвулиди И.А., Расчет инженерных конструкций на упругом основании. – М: Высшая школа, 1987 – 576с.