

2. Актуальность домов из бруса [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://kostromaterem.ru/chem-horoshi-doma-iz-brusa/>

3. Достоинства и недостатки домов из бруса [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://srbu.ru/stroitelnye-materialy/483-dom-iz-brusa-plyusy-i-minusy.html>

4. Склад та зміст проектної документації на будівництво: ДБН А.2.2-3-2014 [Електронний ресурс]. Державні будівельні норми України Режим доступу: https://dbn.co.ua/load/normativy/dbn/dbn_a_2_2_3_2014/1-1-0-1168

5. Інструкція користувача Autodesk Revit [Електронний ресурс]. Режим доступу: <https://help.autodesk.com/view/RVT/2020/RUS/>

УДК 531.383

ВРАЩЕНИЯ ВОЛЧКА ЛАГРАНЖА ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕСТАЦИОНАРНОГО ВОЗМУЩАЮЩЕГО МОМЕНТА СИЛ

Козаченко К.А., *зр. ПГС-355*

*Научный руководитель – Козаченко Т.А., к.ф.-м.н., доцент
(кафедра Теоретической механики, ОГАСА)*

Аннотация. Исследуются вращательные движения симметричного твердого тела вокруг неподвижной точки, под действием нестационарного возмущающего момента сил. Система уравнений движения тела приводится к стандартному виду системы с двумя вращающимися фазами. Для решения системы дифференциальных уравнений используется численное интегрирование. В качестве примера рассмотрена механическая модель, отвечающая задаче о приведении волчка в состояние регулярной прецессии.

Актуальность. Задача о вращении твердого тела относительно неподвижной точки издавна привлекает внимание исследователей. В теоретическом аспекте эта проблема заинтересовала специалистов в области теоретической механики еще в XVIII веке. Исследования в этой области продолжаются, и связаны с анализом вращательных движений твердого тела в небесной механике, движений вращающегося снаряда, гироскопии.

В работах [1–3] изучаются возмущенные быстрые вращения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа.

Для решения системы уравнений применяется метод усреднения. В результате получены явные аналитические решения. В данной статье проводится исследование неусредненной системы уравнений движения тела с помощью численного интегрирования.

Постановка задачи. Исследуются движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа, под действием восстанавливающего и возмущающего моментов. Восстанавливающий момент k предполагается постоянной величиной, а возмущающий момент медленно изменяющимся во времени. Уравнения движения имеют вид:

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - A)qr &= k \sin \theta \cos \varphi + M_1, \\ A\dot{q} + (A - C)pr &= -k \sin \theta \sin \varphi + M_2, \\ C\dot{r} = M_3, \quad \dot{\psi} &= (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{cosec} \theta, \\ \dot{\theta} &= p \cos \varphi - q \sin \varphi, \quad \dot{\varphi} = r - (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{ctg} \theta, \\ M_i &= M_i(p, q, r, \psi, \theta, \varphi, \tau), \quad \tau = \varepsilon t \quad (i = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь p, q, r – проекции вектора угловой скорости тела на главные оси инерции тела; A – экваториальный, C – осевой момент инерции, ($A \neq C$); величины M_i ($i = 1, 2, 3$) – проекции вектора возмущающего момента на те же оси, они являются 2π –периодическими функциями от углов Эйлера ψ, θ, φ , а также зависят от медленного времени $\tau = \varepsilon t$ ($\varepsilon \ll 1$ – малый параметр, t – время).

Исследуем систему (1) при предположениях [1]:

$$(p^2 + q^2)^{1/2} \ll r, \quad Cr^2 \gg k, \quad |M_i| \ll k \quad (i = 1, 2), \quad M_3 \sim k, \quad (2)$$

которые означают, что направление угловой скорости тела близко к оси динамической симметрии; угловая скорость достаточно велика; две проекции вектора возмущающего момента на главные оси инерции тела малы по сравнению с восстанавливающим моментом, а третья – одного с ним порядка.

С учетом неравенства (2) введем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} p &= \varepsilon P, \quad q = \varepsilon Q, \quad k = \varepsilon K, \\ M_i &= \varepsilon^2 M_i^*(P, Q, r, \psi, \theta, \varphi, \tau) \quad (i = 1, 2), \\ M_3 &= \varepsilon M_3^*(P, Q, r, \psi, \theta, \varphi, \tau), \quad \tau = \varepsilon t. \end{aligned} \quad (3)$$

Функции M_i^* ($i = 1, 2, 3$), а также переменные и постоянные $P, Q, r, \psi, \theta, K, A, C$ предполагаются ограниченными величинами порядка

единицы при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Ставится задача исследования поведения решений системы (1) при малом ε , если выполнены условия (2), (3), на интервале времени порядка ε^{-1} [1,2].

Для решения поставленной задачи, систему (1) с помощью ряда преобразований приведем к системе стандартного вида. Процедура преобразования системы (1) представлена в работах [1–3]. Согласно указанной процедуре, система (1) с помощью замены переменных

$$\begin{aligned} P &= a \cos \gamma + b \sin \gamma + KC^{-1}r^{-1} \sin \theta \sin \varphi, \\ Q &= a \sin \gamma - b \cos \gamma + KC^{-1}r^{-1} \sin \theta \cos \varphi \\ \alpha &= \gamma + \varphi. \end{aligned} \quad (4)$$

и разделения переменных на медленные и быстрые приводится к виду:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \varepsilon A^{-1}(M_1^0 \cos \gamma + M_2^0 \sin \gamma) + \varepsilon KC^{-2}r^{-2}M_3^0 \sin \theta \sin \alpha - \\ &\quad - \varepsilon KC^{-1}r^{-1} \cos \theta (b - KC^{-1}r^{-1} \sin \theta \cos \alpha), \\ \dot{b} &= \varepsilon A^{-1}(M_1^0 \sin \gamma - M_2^0 \cos \gamma) - \varepsilon KC^{-2}r^{-2}M_3^0 \sin \theta \cos \alpha + \\ &\quad + \varepsilon KC^{-1}r^{-1} \cos \theta (a + KC^{-1}r^{-1} \sin \theta \sin \alpha), \\ \dot{r} &= \varepsilon C^{-1}M_3^0, \quad \dot{\psi} = \varepsilon \cos \theta (a \sin \alpha - b \cos \alpha) + \varepsilon KC^{-1}r^{-1}, \\ \dot{\theta} &= \varepsilon (a \cos \alpha + b \sin \alpha), \quad \dot{\gamma} = (C - A)A^{-1}r, \\ \dot{\alpha} &= CA^{-1}r - \varepsilon ctg \theta (a \sin \alpha - b \cos \alpha) - \varepsilon KC^{-1}r^{-1} \cos \theta, \\ M_i^0 &(a, b, r, \psi, \theta, \gamma, \alpha, \tau) \equiv M_i^*(P, Q, r, \psi, \theta, \varphi, \tau), \quad (i=1, 2, 3), \quad \tau = \varepsilon t. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь a, b, r, ψ, θ – медленные переменные; γ, α – быстрые переменные. Система (5) является системой нелинейных дифференциальных уравнений с двумя фазами γ, α и соответствующими частотами $\omega_1 = (C - A)A^{-1}r$ и $\omega_2 = CA^{-1}r$.

Получить решение системы (5) в аналитическом виде является весьма затруднительным. В работах [1–3] для системы уравнений (5) были получены решения уравнений в первом приближении в результате использования метода усреднения. В данной работе система (5) решена численно с помощью программного пакета Maple.

Результаты исследования. Исследуем задачу о приведении волчка в состояние регулярной прецессии, в частности, в «спящее состояние». Малые управляющие моменты в этом случае примут вид:

$$M_1 = \frac{-\varepsilon^2 h(\tau) \tilde{p}}{(\tilde{p}^2 + \tilde{q}^2)^{1/2}}, \quad M_2 = \frac{-\varepsilon^2 h(\tau) \tilde{q}}{(\tilde{p}^2 + \tilde{q}^2)^{1/2}}, \quad M_3 = \varepsilon u(\tau), \quad (6)$$

$$\tilde{p} = P - KC^{-1}r^{-1} \sin \theta \sin \varphi, \quad \tilde{q} = Q - KC^{-1}r^{-1} \sin \theta \cos \varphi.$$

Здесь $h(\tau)$, $u(\tau)$ – непрерывные функции, $h(\tau) > 0$. Данные законы управления отвечают оптимальному по быстродействию гашению экваториальной составляющей вектора угловой скорости вращения [4].

Запишем возмущающие моменты (6) с учетом соотношений (4) для P и Q :

$$M_1 = -\varepsilon^2 h(\tau) \frac{a \cos \gamma + b \sin \gamma}{(a^2 + b^2)^{1/2}}, \quad M_2 = -\varepsilon^2 h(\tau) \frac{a \sin \gamma - b \cos \gamma}{(a^2 + b^2)^{1/2}}, \quad (7)$$

$$M_3 = \varepsilon u(\tau).$$

Система (5) в результате подстановки (7) примет вид:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\varepsilon A^{-1} h(\tau) a (a^2 + b^2)^{-1/2} + \varepsilon KC^{-2} r^{-2} u(\tau) \sin \theta \sin \alpha - \\ &\quad - \varepsilon KC^{-1} r^{-1} \cos \theta (b - KC^{-1} r^{-1} \sin \theta \cos \alpha), \\ \dot{b} &= -\varepsilon A^{-1} h(\tau) b (a^2 + b^2)^{-1/2} - \varepsilon KC^{-2} r^{-2} u(\tau) \sin \theta \cos \alpha + \\ &\quad + \varepsilon KC^{-1} r^{-1} \cos \theta (a + KC^{-1} r^{-1} \sin \theta \sin \alpha), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\dot{r} = -\varepsilon C^{-1} u(\tau), \quad \dot{\psi} = \varepsilon \cos \theta (a \sin \alpha - b \cos \alpha) + \varepsilon KC^{-1} r^{-1},$$

$$\dot{\theta} = \varepsilon (a \cos \alpha + b \sin \alpha), \quad \dot{\gamma} = (C - A) A^{-1} r,$$

$$\dot{\alpha} = CA^{-1} r - \varepsilon \operatorname{ctg} \theta (a \sin \alpha - b \cos \alpha) - \varepsilon KC^{-1} r^{-1} \cos \theta.$$

Решение третьего уравнения (8) получено в аналитическом виде (r_0 – произвольное начальное значение осевой составляющей скорости вращения):

$$r(\tau) = r_0 + C^{-1} \int_0^\tau u(\tau^*) d\tau^*, \quad (9)$$

Система (8) проинтегрирована численно при начальных условиях $a_0 = 12,61$; $b_0 = -8,6$; $r_0 = \sqrt{3}$; $\psi_0 = \frac{\pi}{3}$; $\theta_0 = \frac{\pi}{6}$; $\alpha_0 = \frac{\pi}{4}$; $\gamma_0 = \pi$ параметрах задачи $A = 1$; $C = 1,5$; $K = 10$. Функции $h(\tau)$, $u(\tau)$ представлены линейно:

$$h(\tau) = h_0 + h_1 \tau, \quad u(\tau) = u_0 + u_1 \tau, \quad h_0, h_1, u_0, u_1 - \text{const}.$$

Численный расчет был проведен при различных значениях

h_0, h_1, u_0, u_1 , а также при $\varepsilon \in [0, \dots, 10^{-4}]$. На рис. 1–3 изображено решение системы (8) при $h_0 = 1, u_0 = 1,25, h_1 = u_1 = 1$ и $\varepsilon = 10^{-2}$.

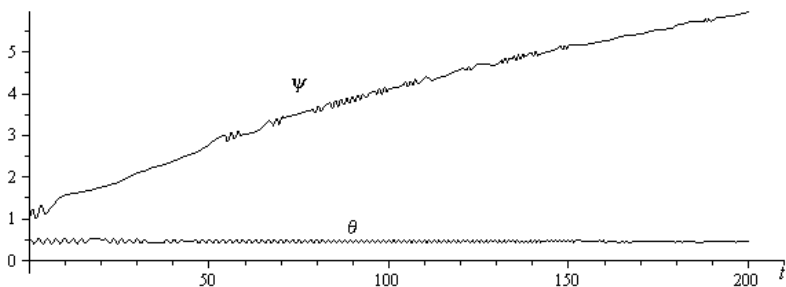


Рис. 1. Графики функций $\psi(t), \theta(t)$.

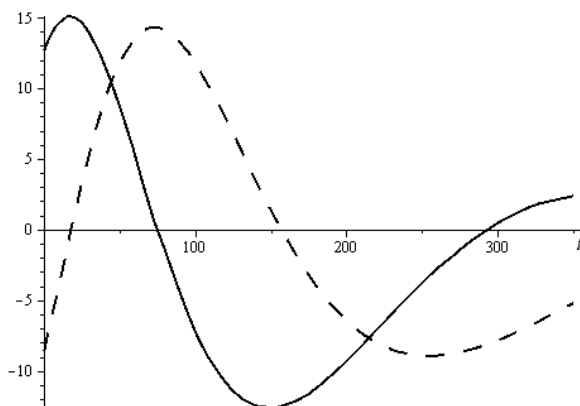


Рис. 2. Графики функций $a(t), b(t)$.

На рис. 1 представлены графики функций ψ, θ . Значение угла нутации колеблется в пределах 0,51–0,52 радиана, угол прецессии медленно возрастает. На рис. 2 изображены графики функций $a(t)$ и $b(t)$. Размах колебаний a и b зависит от начальных значений, с возрастанием времени колебания затухают. Быстрые переменные фазы — α и γ возрастают.

На рис. 3 представлены графики изменения проекций p, q вектора угловой скорости, которые получены в результате подстановки в выражения (4) и (3) значения переменных $a, b, r, \theta, \alpha, \gamma$. Значения

p , q осциллируют в пределах от $-0,17$ до $0,16$ и медленно затухают.

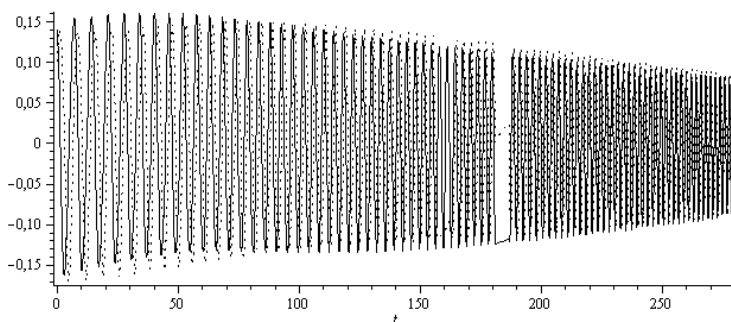


Рис. 3. Графики функций $p(t)$, $q(t)$

Полученные в результате численного интегрирования системы (8) значения для r совпадают с точным решением (9), что подтверждает точность вычислений.

Выводы. Исследовано движение динамически симметричного твердого тела относительно неподвижной точки с учетом постоянного восстанавливающего момента и нестационарного возмущающего момента. Рассмотрена механическая модель, отвечающая случаю гашения экваториальной составляющей вектора угловой скорости вращения посредством ограниченного момента сил, при определенных параметрах и начальных условиях. Построены графики изменений углов прецессии и нутации, а также проекций вектора угловой скорости, полученные в результате численного интегрирования. Проведен анализ полученных решений.

Литература:

1. Akulenko L.D., Leshchenko D.D., Chernousko F.L. Perturbed motion of a rigid body, close to regular precession. *Mechanics of Solids*. 1986, №5. pp. 3–10.
2. Chernousko F.L., Akulenko L.D., Leshchenko D.D. *Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass*. Cham: Springer, 2017. 241p.
3. Акуленко Л.Д., Козаченко Т.А., Лещенко Д.Д. Эволюция вращений волчка Лагранжа под действием возмущающего момента сил, медленно изменяющегося во времени. *Вісник Одеськ. держ. ун-ту*. 2000, Т. 5, Вип. 3., Фіз.-мат. науки. С. 102–108.
4. Акуленко Л.Д. Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. – 368 с.