УДК 531.381

ДЕЯКІ ЗАДАЧІ ПРО РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА У СЕРЕДОВИЩІ З ОПОРОМ

Лещенко Д. Д.[1], Козаченко Т. О.[1]
[1]*Одеська державна академія будівництва та архітектури*

Анотація: Однією з класичних тем теоретичної механіки є динаміка обертових твердих тіл. У вісімнадцятому і дев'ятнадцятому століттях важливі аспекти руху твердого тіла, що обертається, вивчалися видатними математиками, такими як Ейлер, Якобі, Пуансо, Лагранж і Ковалевська. Проте вивчення динаміки обертових тіл, як і раніше актуально для таких застосувань, як динаміка супутників, гіростатів, космічних та літальних апаратів, теорії гіроскопів, сучасних технологій, навігації, космічної техніки та багатьох інших областей.

Ціла низка досліджень присвячена динаміці твердого тіла в середовищі з опором. Наявність швидкості власного обертання твердого тіла обумовлює появу дисипативних моментів, що викликають гальмування твердого тіла. Такі моменти залежать від властивостей середовища з опором, у якому відбувається рух тіла, від властивостей поверхні тіла та розподілу мас у твердому тілі, а також від характеристик руху тіла. Тому залежність моменту сил опору від орієнтації твердого тіла та його кутової швидкості може бути досить складною і вимагає розгляду руху середовища навколо твердого тіла у загальному випадку.

У нашій роботі ми обмежимося деякими досить простими співвідношеннями, які можуть якісно описувати опір обертанню твердого тіла при невеликих кутових швидкостях та використовуються у науковій літературі. При складанні рівнянь руху твердого тіла, що рухається у в'язкому середовищі, необхідно враховувати природу сили опору, що створюється рухом твердого тіла. Еволюція обертань твердого тіла під дією дисипативних збурюючих моментів вивчалася в багатьох статтях та книгах. Задачі про рух твердого тіла відносно нерухомої точки в середовищі з опором описуються нелінійними динамічними рівняннями Ейлера. В деяких випадках одержано аналітичний розв'язок задачі, коли моменти сил зовнішнього опору пропорційні відповідним проекціям кутової швидкості твердого тіла. Залежність дисипативного моменту сил опору від вектора кутової швидкості обертання твердого тіла найчастіше передбачається лінійною. У статті розглядається рух твердого тіла з довільними моментами інерції під впливом зовнішніх моментів сил опору середовища.

Ключові слова: тверде тіло, середовище з опором, випадок Ейлера, випадок Лагранжа.

SOME PROBLEMS ABOUT THE MOTION OF A RIGID BODY IN A RESISTIVE MEDIUM

D. Leshchenko[1], T. Kozachenko[1]
[1]*Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture*

Abstract: The dynamics of rotating rigid bodies is a classical topic of study in mechanics. In the eighteenth and nineteenth centuries, several aspects of a rotating rigid body motion were studied by famous mathematicians as Euler, Jacobi, Poinsot, Lagrange, and Kovalevskya. However, the study of the dynamics of rotating bodies of still important for aplications such as the dynamics of satellite-gyrostat, spacecraft, re-entry vehicles, theory of gyroscopes, modern technology, navigation, space engineering and many other areas.

A number of studies are devoted to the dynamics of a rigid body in a resistive medium. The presence of the velocity of proper rotation of the rigid body leads to the apearance of dissipative torques causing the braking of the body rotation. These torques depend on the properties of resistant medium in which the rigid body motions occur, on the body shape, on the properties of the surface of the rigid body and the distribution of mass in the body and on the characters of the rigid body motion.

Therefore, the dependence of the resistant torque on the orientation of the rigid body and its angular velocity can de quite complicated and requires consideration of the motion of the medium around the body in the general case. We confine ourselves in this paper to some simple relations that can qualitative describe the resistance to rigid body rotation at small angular velocities and are used in the literature.

In setting up the equations of motion of a rigid body moving in viscous medium, we need to consider the nature of the resisting force generated by the motion of the rigid body. The evolution of rotations of a rigid body influenced by dissipative disturbing torques were studied in many papers and books. The problems of motion of a rigid body about fixed point in a resistive medium described by nonlinear dynamic Euler equations. An analytical solution of the problem when the torques of external resistance forces are proportional to the corresponding projections of the angular velocity of the rigid body is obtain in several works. The dependence of the dissipative torque of the resistant forces on the angular velocity vector of rotation of the rigid body is assumed to be linear. We consider dynamics of a rigid body with arbitrary moments of inertia subjected to external torques include small dissipative torques.

Keywords: rigid body, resistive medium, Euler’s case, Lagrange’s case.

1 ВСТУП

Дослідження задач динаміки твердого тіла відносно центра мас становить значний інтерес у теоретичному та прикладному аспектах. Рівняння, що описують рухи твердого тіла під впливом зовнішніх і внутрішніх моментів сил різної фізичної природи, істотно нелінійні, а їх аналіз представляє серйозні математичні труднощі.

Для подолання цих труднощів широко використовуються підходи, що ґрунтуються на ідеї малого параметра. Це – методи регулярних та сингулярних збурень, метод усереднення. Вони дозволяють досить повно дослідити задачі у випадках, коли обертання тіла близьке до рухів Ейлера-Пуансо та Лагранжа-Пуассона.

В даний час є велика бібліографія, присвячена дослідженню збурених рухів твердого тіла відносно центра мас та дослідженням у динаміці космічних та інших літальних апаратів, гіроскопічних систем, інших технічних об’єктів.

Наразі є значна потреба у написанні та публікації оглядової статті, присвяченій дослідженню проблем динаміки твердого тіла у середовищі з опором. Цей огляд не претендує на повноту і відповідає, насамперед, науковим інтересам авторів.

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Проблема еволюції обертань твердого тіла відносно центра мас здавна привертає увагу механіків і математиків. Дослідження обертання важкого твердого тіла почалося в середині XVIII століття і продовжується до наших днів. В останні десятиліття здобуто багато розв’язків задач, запропоновані нові форми рівнянь, розвинуті нові методи їх досліджень.

У роботах, що розглядаються, досліджуються збурені обертальні рухи твердого тіла відносно центра мас під дією моментів сил опору. Такі задачі виникають у зв’язку з вивченням руху супутників відносно центра мас, у питаннях орієнтації та стабілізації космічних апаратів, у динаміці гіроскопів. Диференціальні рівняння цих систем нелінійні та їх дослідження зустрічають серйозні математичні труднощі. Асимптотичні методи є потужним апаратом дослідження проблем динаміки твердого тіла.

3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Основна мета цієї статті полягає у дослідженні еволюції руху твердого тіла відносно центра мас під дією моментів сил опору. Встановлення впливу моментів сил опору середовища на кількісні та якісні властивості збурених рухів твердого тіла відносно центра мас, які близькі до випадків Ейлера та Лагранжа. При цьому основна увага приділяється роботам, у яких розв’язання поставлених задач проводиться за допомогою методу усереднення.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ. ЗАГАЛЬНІ ФІЗИЧНІ СПІВВІДНОШЕННЯ

Розглянемо задачу, що призводить до інтегрування динамічних рівнянь Ейлера. Наявність швидкості власного обертання тіла зумовлює появу дисипативних моментів, які викликають гальмування обертання тіла.

Компоненти моменту сил опору відносно осей, які зв’язані з тілом, залежать від компонент p, q, r кутової швидкості обертання тіла. Залежність дисипативного моменту сил опору від вектора кутової швидкості обертання тіла є лінійною. Відповідно до [1], запишемо у зв’язаній з тілом системі координат вирази для компонент вектора моменту сил в'язкого тертя

$$\mathbf{L}^r = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Тут I_{ij} – коефіцієнти моменту сил опору обертанню тіла. Ціла низка досліджень присвячена динаміці твердого тіла в середовищі з опором. У роботах Л. Д. Акуленка, Д. Д. Лещенка, Ф. Л. Черноуська, А. Л. Рачинської [2, 3] розглянуто швидкий рух навколо нерухомої точки несиметричного твердого тіла або супутника в середовищі з опором.

Найчастіше різними авторами при дослідженні руху твердого тіла у середовищі з опором розглядається випадок діагональної дисипації (концепція Грінхілла-Зоммерфельда) [5]. У цих випадках маємо тверде тіло, з довільним розподілом мас $J = diag(A_1, A_2, A_3)$, де J – матриця моментів інерції системи, та діагональною матрицею дисипації $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Тут $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ – постійні коефіцієнти пропорційності, що залежать від властивостей середовища.

Дійсно, момент сил опору залежить взагалі не лише від фізичних властивостей середовища, але й від розподілу мас, тобто конфігурації системи. Однією з найпростіших систем такого виду є система Грінхілла [5-11], для якої $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$.

Припустимо, що у динамічних рівняннях Ейлера

$$\begin{aligned} &A_1 \dot{p} + (A_3 - A_2) qr = L_x, \\ &A_2 \dot{q} + (A_1 - A_3) rp = L_y, \\ &A_3 \dot{r} + (A_2 - A_1) pq = L_z. \end{aligned} \tag{2}$$

Опір повітря, що діє на тіло, можна представити парою прикладених сил. При цьому проекції моменту цієї пари на головні осі інерції пропорційні величинам $A_1 p,\ A_2 q$ і $A_3 r$. Відповідно маємо [5-11]

$$L_x = -\lambda A_1 p,\ L_y = -\lambda A_2 q,\ L_z = -\lambda A_3 r. \tag{3}$$

Тут λ – деякий коефіцієнт пропорційності, що залежить від властивостей середовища. Припущення (3) накладає деякі обмеження на форму поверхні та кутову швидкість тіла.

Зазначимо, що за умов (3) систему (2) можна звести до звичайних динамічних рівнянь Ейлера за допомогою підстановок [6-8, 12]

$$p = e^{-\lambda \cdot t} p_1,\ q = e^{-\lambda \cdot t} q_1,\ r = e^{-\lambda \cdot t} r_1. \tag{4}$$

З переходом до нового параметра $t_1 = \lambda^{-1}(e^{-\lambda \cdot t} - 1)$ приходимо до рівнянь, аналогічних випадку Ейлера

$$\begin{aligned} &A_1 \frac{dp}{dt_1} + (A_3 - A_2) q_1 r_1 = 0, \\ &A_2 \frac{dq_1}{dt_1} + (A_1 - A_3) r_1 p_1 = 0, \\ &A_3 \frac{dr_1}{dt_1} (A_2 - A_1) p_1 q_1 = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

які, як відомо, інтегруються в еліптичних функціях Якобі.

При вивченні руху твердого тіла у випадку Лагранжа $(A_1 = A_2)$ у середовищі з опором динамічні рівняння з урахуванням (3) записуються у вигляді

$$\begin{aligned} &A_1\dot{p} + (A_3 - A_1)qr = mgl\sin\theta\cos\varphi - \lambda A_1 p, \\ &A_1\dot{q} + (A_1 - A_3)rp = -mgl\sin\theta\sin\varphi - \lambda A_1 q, \\ &A_3\dot{r} = -\lambda A_3 r. \end{aligned} \tag{6}$$

За допомогою підстановок [12]

$$p_1 = e^{\lambda \cdot t} p,\ \ q_1 = e^{\lambda \cdot t} q,\ \ r_1 = e^{\lambda \cdot t} r$$

отримаємо систему вигляду

$$\begin{aligned} &-\lambda A_1 \frac{dp}{dt_1} + (A_3 - A_1)q_1 r_1 = mgl\sin\theta\cos\varphi, \\ &-\lambda A_1 \frac{dq_1}{dt_1} + (A_1 - A_3)r_1 p_1 = -mgl\sin\theta\sin\varphi, \\ &-\lambda A_3 \frac{dr_1}{dt_1} = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Система (7) еквівалентна рівнянням руху твердого тіла у випадку Лагранжа.

Вважаючи в рівняннях (2) $A_1 = A_2$, припустимо, що праві частини цих рівнянь мають вигляд

$$L_x = -ap,\ \ L_y = -bq,\ \ L_z = -cr\,. \tag{8}$$

У разі симетричного тіла відмінність у величинах коефіцієнтів a та b при силах природного опору середовища, пропорційних проекціям p та q кутової швидкості тіла на рівнозначні в даному випадку осі x і y малоймовірно. Тому зазвичай розглядається випадок

$$L_x = -ap,\ \ L_y = -aq,\ \ L_z = -cr\,. \tag{9}$$

Можна, проте уявити симетричне тіло, що обертається, оснащене двома моментними датчиками, розташованими на взаємно перпендикулярних осях x і y, які формують моменти, пропорційні величинам p і q (з точністю до збурюючих обставин) [5]. У цьому випадку коефіцієнти a і b, що залежать від параметрів моментних датчиків, можуть бути прийняті різними.

У роботах [13-15] момент сил тертя приймається спрямованим протилежно до вектора кутової швидкості і дорівнює

$$\mathbf{L}^r = \lambda\boldsymbol{\omega}\,, \tag{10}$$

де λ – деяка стала. Якщо враховується тертя повітря, то постійна λ залежить від форми тіла і від щільності повітря. З аеродинамічної точки зору було б правильніше вважати момент сил тертя повітря пропорційним квадрату кутової швидкості $\boldsymbol{\omega}$.

Для нас істотним є те, що вираз (10) встановлює головну особливість, яка полягає в тому, що сила тертя повітря спрямована проти руху. Досвід показує, що результати, отримані на основі такого припущення про закон тертя, зазвичай підтверджуються значно ширше, ніж можна очікувати, виходячи з характеру прийнятого припущення [13].

У [8] наголошується, що тверде тіло, що обертається в повітряному середовищі, частиною захоплює його за собою, внаслідок чого кінетична енергія тіла розсіюється. Характер опору залежить від форми поверхні тіла і проблема, яка поставлена з усією строгістю, була б складною. За наближеною схемою, зазначеною Клейном і Зоммерфельдом [8, 16], передбачається, що опір середовища може бути представлений двома парами, моменти яких пропорційні екваторіальній і осьовій складових кутової швидкості динамічно симетричного твердого тіла $\boldsymbol{\omega}$ і спрямовані протилежно їм.

У цьому випадку рівняння руху динамічно симетричного твердого тіла в середовищі з опором записують у вигляді

$$\begin{aligned} &A_1\dot{p}+(A_3-A_1)qr=-a^2A_1p,\\ &A_1\dot{q}+(A_1-A_3)rp=-a^2A_1q,\\ &A_3\dot{r}=-c^2A_3r. \end{aligned} \tag{11}$$

Тут A_1, A_2 – моменти інерції тіла відносно екваторіальних осей, A_3 – момент інерції відносно осі фігури z; a, c – сталі.

У роботі [17] досліджується рух навколо центра мас несиметричного твердого тіла, на яке діє два малих збурюючих моменти: постійний у зв'язаних з тілом осях і лінійний дисипативний, що містить доданки, які квадратично залежать від кутової швидкості.

Рівняння руху твердого тіла під дією постійного моменту і моментів, що лінійно і квадратично залежать від кутової швидкості мають вигляд

$$\begin{aligned} &A_1\dot{p}+(A_3-A_2)qr=L_1-N_1p,\\ &A_2\dot{q}+(A_1-A_3)rp=L_2-N_2q,\\ &A_3\dot{r}+(A_2-A_1)pq=L_3-N_3r-Q_3r^2. \end{aligned} \tag{12}$$

Тут L_1, L_2, L_3 – постійні, N_1, N_2, N_3, Q_3 – додатні.

Як додатки можна назвати задачі про підтримку кутової швидкості гіроскопа за допомогою моменту, пропорційного різниці квадратів фактичної та необхідної кутової швидкості [17-20].

Рівняння руху несиметричного гіроскопа під дією моменту, що залежить від кутової швидкості, мають вигляд [18-20]

$$\begin{aligned} &A_1\dot{p}+(A_3-A_2)qr=c(p_0^2-p^2),\\ &A_2\dot{q}+(A_1-A_3)rp=0,\\ &A_3\dot{r}+(A_2-A_1)pq=0, \end{aligned} \tag{13}$$

або

$$\begin{aligned} &A_1\dot{p}+(A_3-A_2)qr=0,\\ &A_2\dot{q}+(A_1-A_3)rp=0,\\ &A_3\dot{r}+(A_2-A_1)pq=\varepsilon(r_0^2-r^2). \end{aligned} \tag{14}$$

Тут p_0 – задана величина, яка має наближатися до p, ε – малий параметр.

У роботах [18, 20] розглядаються демпфуюча дія реактивного струменя ракети на її рух. У [18] досліджено рух динамічно симетричного тіла, у якого струмінь продуктів горіння викидається двигуном вздовж осі симетрії. У статті [20] розглядається рух динамічно несиметричного тіла, а напрямок реактивного струменя збігається з головними осями інерції корабля. Рівняння руху ракети в проекціях на її головні осі інерції мають вигляд

$$
\begin{aligned}
&A_1\dot{p}+(A_3-A_2)qr=-\varepsilon Sp,\\
&A_2\dot{q}+(A_1-A_3)rp=-\varepsilon Sq,\\
&A_3\dot{r}+(A_2-A_1)pq=0.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Тут S – додатна конструктивна стала, що характеризує демпфуючу дію реактивного струменя ракети, ε – малий параметр.

Опір може передбачатися квадратичним по відношенню до кутової швидкості. У роботі [21] момент сил опору середовища представлений у вигляді [22]

$$
\mathbf{L}^r = I\boldsymbol{\omega},\ \boldsymbol{\omega}=\{-p|p|,-q|q|,-r|r|\},
\tag{16}
$$

де $\mathbf{I}=(I_{ij})$ $(i,j=1,2,3)$ – матриця постійних коефіцієнтів аеродинамічного опору обертанню тіла, $p,\ q,\ r$ – проекції вектора кутової швидкості тіла на осі.

У статтях [23, 24] розглядається збурений рух асиметричного твердого тіла, що обертається, та космічного апарата на круговій орбіті під дією малого аеродинамічного моменту, пропорційного кутовій швидкості тіла. Передбачається також, що один з моментів інерції КА є періодичною функцією часу. Кінетичний момент тіла відносно центра мас записується як

$$
\mathbf{G}=I\boldsymbol{\omega}=A_1(t)p\mathbf{i}+A_2q\mathbf{j}+A_3r\mathbf{k}\,.
\tag{17}
$$

Тут $\mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k}$ – одинарні вектори системи координат, що зв'язані з КА.

При русі КА в середовищі з малим опором, момент сил опору пропорційний кутовій швидкості тіла

$$
\mathbf{L}^r=-\lambda\boldsymbol{\omega}=-\lambda(p\mathbf{i}+q\mathbf{j}+r\mathbf{k})\,.
\tag{18}
$$

Тут λ – коефіцієнт в'язкого тертя.

При дослідженні збурених рухів твердого тіла, близьких до випадку Лагранжа, в середовищі з опором збурюючі моменти εM_i $(i=1,2,3)$ ($\varepsilon \ll 1$ – малий параметр, що характеризує величину збурень) мають вигляд [4, 25, 26]

$$
L_x=-ap,\ L_y=-aq,\ L_z=-cr,\ a,c>0\,,
\tag{19}
$$

де a,c – деякі постійні коефіцієнти пропорційності, що залежать від властивостей середовища та форми тіла. У роботах [4, 25, 26] лінійно-дисипативні збурюючі моменти, що діють на тверде тіло з боку зовнішнього середовища записуються у вигляді (6).

У статті [28] враховуються сили дисипації, сумарні моменти яких відносно осей Ox, Oy і Oy пропорційні проекціям p, q і r кутової швидкості тіла та записуються наступним чином:

$$
L_x=-\lambda A_1p,\ L_y=-\lambda A_1q,\ L_z=-\lambda_1A_3r\,,
\tag{20}
$$

де λ і λ_1 – деякі постійні, що залежать від форми поверхні тіла.

У роботах [29, 30] задача про рух твердого тіла в середовищі з опором розглядається як розвиток задачі про рух важкого твердого тіла навколо нерухомої точки у випадку Лагранжа. Прикладом такого тіла є космічний апарат, що спускається в атмосфері планети. Малі демпфуючі моменти пропорційні проекціям кутової швидкості.

У статті [31] розглядається рух осесиметричного твердого тіла навколо нерухомої точки під дією відновлюючого моменту, що залежить від повільного часу

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2021-3-2-6-17

$\tau = \varepsilon t$ $(\varepsilon << 1)$ і кута нутації θ, спрямованого вздовж осі Oz, і малих демпфуючих моментів $\varepsilon I_x(\tau,\theta)p$, $\varepsilon I_y(\tau,\theta)q$, $\varepsilon I_z(\tau,\theta)r$, спрямованих по осях Ox, Oy і Oz.

У роботах [32, 33] при вивченні збуреного руху твердого тіла, близького до випадку Лагранжа, під дією зовнішнього середовища розглядаються збурюючі лінійно-дисипативні моменти, що повільно змінюються у часі:

$$L_x = -a(\tau)p,\ L_y = -a(\tau)q,\ \ L_z = -c(\tau)r,\quad a(\tau),c(\tau) > 0,\quad \tau = \varepsilon t,\ \varepsilon << 1. \tag{21}$$

Тут $a(\tau)$, $c(\tau)$ – функції, які інтегруються та залежать від властивостей середовища та форми тіла. Причому в [32] досліджуються збурені рухи твердого тіла, близькі до випадку Лагранжа, під дією моменту, який повільно змінюється в часі. В роботі [33] розглядається еволюція обертань твердого тіла під впливом нестаціонарних відновлюючого та збурюючого моментів.

У статті [34] досліджуються збурені обертальні рухи твердого тіла, близькі до регулярної прецесії у випадку Лагранжа, під дією відновлюючого моменту, який залежить від повільного часу та кута нутації, а також збурюючого моменту, що повільно змінюється в часі. Тіло передбачається швидко закрученим, а відновлюючий і збурюючий моменти передбачаються малими з певною ієрархією малості компонентів. Вважається, що зовнішнє середовище, що діє на тверде тіло, повільно змінює властивості в'язкості внаслідок зміни густини, температури, складу середовища. Збурюючі моменти є лінійно-дисипативними та мають вигляд

$$L_x = -\varepsilon I_1(\tau)p,\ L_y = -\varepsilon I_1(\tau)q,\ \ L_z = -\varepsilon I_3(\tau)r. \tag{22}$$

Тут $I_1(\tau)$, $I_3(\tau)$ – додатні функції, які інтегруються на проміжку $\tau \sim 1$.

У роботі [35] розглядається рух симетричного важкого твердого тіла з нерухомою точкою під дією сил тертя, обумовлених навколишнім дисипативним середовищем. Повний момент сили тертя $\mathbf{L}^r$, що діє на тіло, вважається малим та антипаралельним вектору кутової швидкості тіла $\boldsymbol{\omega}$. Вважається що

$$\mathbf{L}^r = -\lambda \mathbf{F}\left(|\boldsymbol{\omega}|^2\right)\boldsymbol{\omega}, \tag{23}$$

де λ – мала, додатна безрозмірна стала, функція $\mathbf{F}$ задовольняє умовам: $\mathbf{F}(x)$ – Липшицева, неперервна та додатна для $x > 0$, а також $\lim\limits_{x\to 0} x^{1/2}F(x) = 0$.

У роботі [36] досліджується обертальний рух динамічно несиметричного твердого тіла відносно центра мас під дією моменту сил опору. Проводиться чисельне моделювання кривої годографа вектора кінетичного моменту у тривимірному просторі. У статтях [37, 38] досліджено стійкість рівномірного обертання вовчка Лагранжа з рідиною в середовищі, що чинить опір, з урахуванням заданого постійного моменту та одержані умови асимптотичної стійкості рівномірного обертання несиметричного твердого тіла у середовищі з опором.

5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Інтерес до проблем динаміки твердого тіла значно посилився у другій половині XX століття у зв'язку з розвитком ракетно-космічної техніки, зростанням швидкостей та маневреності літаків, створенням гіроскопічних систем. Дослідження руху супутників та космічних апаратів відносно центра мас важливе для створення систем управління орієнтацією, стабілізації руху, для вирішення практичних задач космонавтики. У проаналізованих роботах досліджується рух твердого тіла в середовищі, що діє на тіло внаслідок моментів, які залежать від його кутової швидкості. Розглянуто випадки одночасного впливу моментів сил тяжіння та опору. Досліджено задачі про рух супутника відносно центра мас під дією гравітаційного моменту та моменту сил опору.

6 ВИСНОВКИ

У всіх роботах, розглянутих у статті, наведено та проаналізовано вихідні рівняння, проведено процедуру їх розв'язування. В результаті аналізу одержаних рівнянь встановлено кількісні та якісні особливості рухів, дано опис еволюції рухів тіла. Виклад у роботах ілюструється рядом прикладів.

Література

1. Beletsky V. V. Motion of an Artificial Satellite about its Center of Mass. Israel Program for Scientific Translation, Jerusalem, 1966.
2. Akulenko L. D., Leshchenko D.D., Chernousko F.L. Fast motion of a heavy rigid body about a fixed point in a resistive medium. Mechanics of Solids. 1982. 17(3). P. 1–8.
3. Akulenko L. D., Leshchenko D.D., Rachinskaya A.L. Evolution of the satellite fast rotation due to the gravitational torque in a dragging medium. Mechanics of Solids. 2008. 43(2). P. 173–184.
4. Chernousko F. L., Akulenko L. D., Leshchenko D. DEvolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass. Springer. Cham. 2017.
5. Кошляков В. Н. Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов: Аналитические методы. М.: Наука, 1985. 288 с.
6. Appel P. Traite de Mechanique Rationnelle. Gauthier–Villars. Paris. 1953.
7. Macmillan W. D. Theoretical Mechanics. Dynamics of Rigid Bodies. New York. Mc Graw-Hill. 1936.
8. Булгаков Б. В. Прикладная теория гироскопов. М.: Изд-во МГУ, 1976. 401 с.
9. Greenhill A. G. The Application of Elliptic Functions. London, New York. Macmilan and Co. 1892.
10. Routh E. J. Advanced Dynamics of a System of Rigid Bodies. Dover. New York. NY. 2005.
11. Кошляков В. Н. О некоторых частных случаях интегрирования динамических уравнений Эйлера, связанных с движением гироскопа в сопротивляющейся среде. Прикладная математика и механика, 1953. Т.17(2). С. 137–148.
12. Padova E. Sul moto di rotazione di un corpo rigidi. Atti. Accad. Di Tirino. 1885-1886. V.XXI. P. 38–47.
13. Граммель Р. Гироскоп. Его теория и применения. М.: Изд-во ин. литер., 1952. Т.1. 351 с.
14. Gray A. A. Treatise on Gyrostatics and Rotational Motion. N.Y.: Dover. 1959.
15. Runau B., Rimrott F. P. T. Axialsymmetrisch Kreisel mit viskoser Grenzschchtreibung. Technische Mechanik. 1984. B.14. H.3-4. P. 213–220.
16. Klein F., Sommerfeld A. The Theory of the Top. V. III. Perturbations, Astronomical and Geophysical Applications. Boston. MA: Birkhauser. 2012.
17. Пивоваров М. Л. О движении гироскопа с малым самовозбуждением. Известия АН СССР. Механика твердого тела, 1985. №6. С. 23–27.
18. Magnus K. Kreisel. Theorie und Anvendungen. Springer. Berlin. 1971.
19. Leimanis E. The General Problem of the Motion of Coupled Rigid Bodies About a Fixed Point. Berlin. Springer. 1965.
20. Pivovarov M. L., Ferreira L. O., Lopes R. V. F. Rigid body rotation evolution due to disturbing torque which is known in a body frame. Acta Mechnica. 1999. 133. № 1–4. P. 239–246.
21. Медведев А. В. О движении твердого тела с неподвижной точкой в сопротивляющейся среде. Прикладная механика, 1989. Т.25. №6. С. 117–120.
22. Блехман И. И., Бутенин Н. В., Ганиев Р. Ф. и др. Колебания нелинейных механических систем. М.: Машиностроение, 1979. 351 с. (Вибрация в технике в 6т.; Т.2)
23. Inarrea M., Lanchares V., Rothos V. M., Salas J. P. Chaotic rotations of an asymmetrc body with time dependent moments of inertia and viscous drag. Intrenational Journal of Bifucation and Chaos. 2003. 13 (2). P. 393–409.
24. Inarrea M., Lanchares V. Chaotic pitch motion of an asymmetric non-rigid spacecraft with viscous drag in circular orbit. International Journal of Non-Linear Mechanics. 2006. 41(1). P. 86–100.

25.Akulenko L. D., Leshchenko D. D., Chernousko F. L. Perturbed motions of a rigid body, close to the Lagrange case. Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1979. 43(5). P. 829–837.
26.Akulenko L. D., Leshchenko D. D., Chernousko F.L. Perturbed motions of a rigid body that are close to regular precession. Mechanics of Solids. 1986. 21(5). P. 1–8.
27.Koshlyakov V. N. On stability of motion of a symmetric body placed on a vibrating base. Ukr. Math. J. 1995. 47(12). P. 1898–1904.
28.Sidorenko V. V. Capture and escape from resonance in the dynamics of the rigid body in viscous medium. Journal of Nonlinear Science. 1994. 4(1). P. 35–57.
29.Aslanov V. S. Rigid Body Dynamics for Space Applications. Oxford. Butterworth Heinemann. 2017.
30.Заболотнов Ю. М., Любимов В. В. Нелинейные резонансные эволюционные эффекты при движении твердого тела вокруг неподвижной точки. Прикладная математика и механика, 2002. Т.66. Вып.3. С. 410–417.
31.Кузмак Г. Е. Движение осесимметричного твердого тела около неподвижной точки под воздействием моментов, медленно изменяющихся во времени. Известия АН СССР. Механика и машиностроение, 1961. №4. С. 65–78.
32.Akulenko L. D., Zinkevich Ya. S., Kozachenko T. A., Leshchenko D. D. The evolution of motions of a rigid body close to the Lagrange case under the action of an unsteady torque. Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2017. 82(2). P. 79–84.
33.Leshchenko D., Ershkov S., Kozachenko T. Evolution of a heavy rigid body rotation under the action of unsteady restoring and perturbation torques. Nonlinear Dynamics. 2021. 103 (2). P. 1517–1528.
34.Akulenko L. D., Kozachenko T. A., Leshchenko D. D. Evolution of rotations of a rigid body under the action of restoring and control moments. Journal of Computer and System Sciences International. 2002. 41(5). P. 868–874.
35.Simpson H. C., Gunzburger M. D. A two time scale analysis of gyroscopic motion with friction. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik. 1986. 37(6). P. 867–894.
36. Рачинская А. Л. Вращение твердого тела в среде с сопротивлением. Вісник ОНУ. Математика і механіка, 2014. Т.19. Вип. 3 (23). С. 84–92.
37.Кононов Ю. М., Василенко В. Ю. Про стійкість обертання під дією постійного моменту дзиги Лагранжа з ідеальною рідиною в середовищі, що чинить опір. Праці ІПММ НАН України, 2019. Т. 33. С. 122–131.
38.Кононов Ю. М. Про стійкість рівномірного обертання несиметричного твердого тіла у середовищі з опором під дією постійного моменту. Прикладна механіка, 2021. Т. 57. №4. С. 68–77.

References

1. Beletsky, V. V. (1966). *Motion of an Artificial Satellite about its Center of Mass*. Israel Program for Scientific Translation, Jerusalem.
2. Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D., Chernousko, F. L. (1982). Fast motion of a heavy rigid body about a fixed point in a resistive medium. *Mechanics of Solids*. 17(3). 1–8.
3. Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D., Rachinskaya, A. L. (2008). Evolution of the satellite fast rotation due to the gravitational torque in a dragging medium. *Mechanics of Solids*. 43(2). 173–184.
4. Chernousko, F. L., Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D. (2017). *Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass*. Springer, Cham.
5. Koshlyakov, V. N. (1985). *Zadachi dinamiki tverdogo tela i prikladnoj teorii giroskopov: Analiticheskie metody* [Problems in Dynamics of Solid Bodies and in Applied Gyroscope Theory: Analytical Methods]. Nauka, Moskva. [in Russian].
6. Appel, P. (1953). *Traite de Mechanique Rationnelle*. Gauthier–Villars. Paris.
7. Macmillan, W. D. (1936). *Theoretical Mechanics. Dynamics of Rigid Bodies*. New York. Mc Graw-Hill.
8. Bulgakov, B. V. (1976). *Prikladnaya teoriya giroskopov* [Applied Theory of Gyroscopes]. 3rd edn. Moscow State Univ. Moscow. [in Russian].
9. Greenhill, A. G. (1892). *The APlication of Elliptic Functions*. London, New York. Macmillan and Co.

10.Routh, E. J. (2005). *Advanced Dynamics of a System of Rigid Bodies*. Dover. New York. NY.
11.Koshlyakov, V. N. (1953). O nekotoryih chastnyih sluchayah integrirovaniya dinamicheskih uravneniy Eylera, svyazannyih s dvizheniem giroskopa v soprotivlyayuscheysya srede [On some particular cases of integration the dynamic Euler equations as aPlied to the motion of a gyroscope in a resistive medium]. *Prikladnaya matematika i mehanika*. 17(2). 137–148. [in Russian].
12. Padova, E. Sul moto di rotazione di un corpo rigidi. Atti. Accad. *Di Tirino*. 1885-1886. V.XXI. 38–47.
13. Grammel, R. (1950). *Der Kreisel. Seine Theorie und Seine Anwendungen*. Erster Band. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag
14.Gray, A. A. (1959). *Treatise on Gyrostatics and Rotational Motion*. N.Y.: Dover.
15.Runau B., Rimrott F. P. T. (1984). Axialsymmetrisch Kreisel mit viskoser Grenzschchtreibung. *Technische Mechanik*. B.14. H.3-4. 213–220.
16.Klein, F., Sommerfeld, A. (2012). *The Theory of the Top.V. III. Perturbations, Astronomical and Geophysical Applications*. Boston, MA: Birkhauser.
17.Pivovarov, M. L. (1985). O dvizhenii giroskopa s malyim samovozbuzhdeniem [The motion of a gyroscope with low self-excitation]. *Izvvestiya Akad. Nauk SSSR. Mekhanika Tverdovo Tela*. 6. 23–27. [in Russian].
18.Magnus, K. (1971). *Kreisel. Theorie und Anvendungen*. Springer, Berlin.
19. Leimanis, E. (1965). *The General Problem of the Motion of Coupled Rigid Bodies About a Fixed Point*. Berlin: Springer.
20.Pivovarov, M. L., Ferreira, L. O., Lopes, R. V. F. (1999). Rigid body rotation evolution due to disturbing torque which is known in a body frame. *Acta Mechnica*. 133. No 1–4. 239–246.
21.Medvedev, A. V. (1989). O dvizhenii tverdogo tela s nepodvizhnoi tochkoi v soprotivlyayushcheisya srede [The motion of a rapidly spun gyroscope under the influence of constant torque in a resistive medium]. *Prikladnaya mekhanika*. 1989. 25(6). 117–120. [in Russian].
22.Blekhman, I. I., Butenin, N. V., Ganiev, R. F. i dr. *Kolebaniya nelineinykh mekhanicheskikh sistem* [Oscillations of nonlinear mechanical systems]. M.: Mashinostroenie, 1979. (Vibratsiyi v tekhnike 6(2)). [in Russian].
23.Inarrea, M., Lanchares, V., Rothos, V. M., Salas, J. P. (2003). Chaotic rotations of an asymmetrc body with time dependent moments of inertia and viscous drag. *Intrenational Journal of Bifucation and Chaos*. 13 (2). 393–409.
24.Inarrea, M., Lanchares, V. (2006). Chaotic pitch motion of an asymmetric non-rigid spacecraft with viscous drag in circular orbit. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 41(1). 86–100.
25.Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D., Chernousko, F. L. (1979). Perturbed motions of a rigid body, close to the Lagrange case. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 43(5). 829–837.
26.Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D., Chernousko, F. L. (1986). Perturbed motions of a rigid body that are close to regular precession. *Mechanics of Solids*. 21(5). 1–8.
27.Koshlyakov, V. N. (1995). On stability of motion of a symmetric body placed on a vibrating base. *Ukr. Math. J*. 47(12). 1898–1904.
28.Sidorenko, V. V. (1994). Capture and escape from resonance in the dynamics of the rigid body in viscous medium. *Journal of Nonlinear Science*. 4(1). 35–57.
29. Aslanov, V. S. (2017). *Rigid Body Dynamics for Space Applications*. Oxford Butterworth Heinemann.
30. Zabolotnov, Yu. M., Liubymov, V. V. Nelineinye rezonansnye evolyutsionnye effekty pri dvizhenii tverdogo tela vokrug nepodvizhnoi tochki [Nonlinear resonant evolutionary effects when a rigid body moves around a fixed point]. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 2002. 66(3). 410–417. [in Russian].
31.Kuzmak, G. E. (1961). Dvizhenie osesimmetrichnogo tverdogo tela okolo nepodvizhnoy tochki pod vozdeystviem momentov, medlenno izmenyayuschihsya vo vremeni [Motion of an axially symmetric rigid body about a fixed point under the influence of torques slowly changing in time]. *Izvvestiya Akad. Nauk SSSR OTN. Mekhanika i mashinostroyeniye*. 4. 65–78. [in Russian].
32.Akulenko, L. D., Zinkevich, Ya. S., Kozachenko, T. A., Leshchenko, D. D. (2017). The evolution of motions of a rigid body close to the Lagrange case under the action of an unsteady torque. *Journal of APlied Mathematics and Mechanics*. 82(2). 79–84.

33.Leshchenko, D., Ershkov, S., Kozachenko, T. (2021). Evolution of a heavy rigid body rotation under the action of unsteady restoring and perturbation torques. *Nonlinear Dynamics*. 103(2). 1517–1528.
34.Akulenko, L. D., Kozachenko, T. A., Leshchenko, D. D. (2002). Evolution of rotations of a rigid body under the action of restoring and control moments. *Journal of Computer and System Sciences International*. 41(5). 868–874.
35.Simpson, H. C., Gunzburger, M. D. (1986). A two time scale analysis of gyroscopic motion with friction. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*. 37(6). 867–894.
36.Rachinskaya, A. L. (2014). Vrashchenye tverdoho tela v srede s soprotyvlenyem [Rotation of a rigid body in a medium with resistance]. *Visnyk ONY. Matematika i mekhanika*. 19(3) (23). 84–92. [in Russian].
37.Kononov, Yu. N., Vasylenko, V. Yu. (2019). Pro stijkist obertannja pid dijeju postijnogo momentu dzygi Lagranzha z idealnoju ridynoju v seredovyshhi, shho chynyt opir [On the stability of the rotation under the action of constant moment Lagrangian top with perfect fluid in a resisting medium]. *Proc. IAMM NASU*. 33. 122–131. [in Ukrainian].
38.Kononov, Yu. N. (2021). Pro stiikist rivnomirnoho obertannia nesymetrychnoho tverdoho tila u seredovyshchi z oporom pid diieiu postiinoho momentu [On the stability of the uniform rotations of the asymmetric rigid body in the resistive medium und the action of constant moment]. *Prykladna mekhanika*. 57(4). 68–77. [in Ukrainian].

Лещенко Дмитро Давидович
Одеська державна академія будівництва та архітектури, д.ф.-м.н., професор
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна 65029
leshchenko_d@ukr.net,
ORCID: 0000-0003-2436-221X
Козаченко Тетяна Олександрівна
Одеська державна академія будівництва та архітектури, к.ф.-м.н., доцент
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна 65029
kushpil.t.a@gmail.com
ORCID: 0000-0001-9034-3776

Для посилань:
Лещенко Д. Д., Козаченко Т. О. Деякі задачі про рух твердого тіла у середовищі з опором. Механіка та математичні методи, 2021. Т. 3. № 2. С. 6–17.

For references:
Leshchenko D., Kozachenko T. (2021). Some problems about the motion of a rigid body in a resistive medium. Mechanics and Mathematical Methods. 3 (2). 6–17