УДК 539.3

# ДО РОЗРАХУНКУ ОБОЛОНОК ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНИМ МЕТОДОМ ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

**Крутій Ю.С., д.т.н., проф., Сур'янінов М.Г., д.т.н., проф.**
Одеська державна академія будівництва та архітектури, м. Одеса

Чисельно-аналітичний метод граничних елементів (ЧА МГЕ) добре зарекомендував себе при вирішенні задач статики, стійкості і динаміки стрижневих систем і пластин. Отримані результати в більшості своїй представлені в [1]. При цьому практично всі завдання описувалися диференціальними рівняннями четвертого порядку і нижче (виняток становлять арки, для яких диференціальні рівняння мають шостий порядок). З формальної точки зору немає ніяких перешкод і для застосування ЧА МГЕ до розрахунків оболонок. Однак, якщо виключити тривіальні випадки, всі завдання статики, динаміки і стійкості оболонок зводяться до вирішення диференціальних рівнянь восьмого порядку. А це означає, що розробка аналітичної складової методу пов'язана з необхідністю оперувати визначниками восьмого порядку. Як наслідок, всі аналітичні вирази (фундаментальних функцій, функцій Гріна, векторів навантаження) виходять дуже громіздкими, не кажучи вже про проміжні перетворення. Розглянемо, наприклад, задачу про вигин циліндричної оболонки. Напружено-деформований стан такої оболонки описується рівнянням

$$\left(\frac{\partial^8}{\partial\theta^8}+2\frac{\partial^6}{\partial\theta^6}+\frac{\partial^4}{\partial\theta^4}\right)F+\frac{12R^2}{h^2}\frac{\partial^4 F}{\partial\beta^4}=0,$$

де $F=F(\beta,\theta)$ — нова функція (аналог функції напружень в теорії пластинок), через яку виражаються всі параметри НДС оболонки, $\theta$ — безрозмірна координата:

$$\beta = x/R;\quad \theta = s/R\ .$$

В [1] наведені отримані вирази фундаментальних функцій і функції Гріна. Так, один з цих виразів має вигляд

$$A_{11}=\frac{1}{\Delta}[(H_{12}\Phi_2-H_{14}\Phi_4)\Delta_{W_0}^{(2)}-(H_{12}\Phi_4+H_{14}\Phi_2)\Delta_{W_0}^{(4)}+$$
$$+(H_{16}\Phi_6-H_{18}\Phi_8)\Delta_{W_0}^{(6)}-(H_{16}\Phi_8+H_{18}\Phi_6)\Delta_{W_0}^{(8)}].$$

Тут $H$ — алгебраїчні вирази, а $\Delta$ — визначники четвертого порядку.

Цілком очевидно, що запис подібних виразів в розгорнутому вигляді недоцільний. У зв'язку з цим пропонується застовувати метод прямого інтегрування, запропонований в [2].

Суть пропонованого підходу розглянемо на більш простому прикладі — вигині замкнутої кругової циліндричної оболонки постійної товщини, навантаженої по всій поверхні рівномірним нормальним тиском інтенсивністю *p*. Диференціальне рівняння вигину такої оболонки, обмеженої по кінцях торцевими діафрагмами, отримано в [1]:

$$D\frac{d^4w}{dx^4}+\frac{pr}{2}\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{Eh}{r^2}w=p\left(1-\frac{\mu}{2}\right). \tag{1}$$

Будемо розглядати систему диференціальних рівнянь, рівносильну рівнянню (1):

$$\frac{d\vec{F}(x)}{dx}=\overline{H}\vec{F}(x)-\vec{f}, \tag{2}$$

де $\vec{F}(x)$ — вектор стану оболонки:

$$\vec{F}(x)=\begin{pmatrix} w \\ \varphi \\ M_x \\ Q_y \end{pmatrix};\ \overline{H}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{pr}{2D} & 0 & -\frac{1}{D} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{Eh}{r^2}+\frac{(pr)^2}{2D} & 0 & -\frac{pr}{D} & 0 \end{pmatrix};\qquad \vec{f}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ p\left(1-\frac{\mu}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

Компоненти вектора стану оболонки:

$w$ — прогин; $\varphi=w'$ — кут повороту; $M_x=-Dw''+\frac{pr}{2}w$; $Q_y=M_x'$.

Відомо, що для оболонок, які представляють найбільший практичний інтерес, параметр $\beta=-\frac{pr^2}{4\sqrt{DEh}}$ задовольняє умові $0<\beta^2<1$. В цьому випадку фундаментальні рішення однорідного диференціального рівняння, відповідного до рівняння (1), запишуться у вигляді

$$\Phi_1(x)=ch\delta x\cos\gamma x;\Phi_2(x)=ch\delta x\sin\gamma x;$$
$$\Phi_3(x)=sh\delta x\cos\gamma x;\Phi_4(x)=sh\delta x\sin\gamma x,$$

де $\gamma=\alpha\sqrt{1-\beta}$; $\delta=\alpha\sqrt{1+\beta}$; $\alpha=\sqrt[4]{\frac{Eh}{4r^2D}}$.

Маючи чотири фундаментальних рішення однорідного диференціального рівняння, побудуємо чотири вектори $\vec{F_n}(x)$ — рішення системи (2), скориставшись формулою

$$\Lambda(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{pr}{2} & 0 & -D & 0 \\ 0 & \frac{pr}{2} & 0 & -D \end{pmatrix} W, \text{ де } W = \begin{pmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 & \Phi_4 \\ \Phi_1' & \Phi_2' & \Phi_3' & \Phi_4' \\ \Phi_1'' & \Phi_2'' & \Phi_3'' & \Phi_4'' \\ \Phi_1''' & \Phi_2''' & \Phi_3''' & \Phi_4''' \end{pmatrix}$$ — вронскиан

системи.

$$\left. \begin{aligned} |\Lambda(x)| &= D^2 |W(x)| \\ |\Lambda(0)| &= D^2 |W(0)| \end{aligned} \right\} \Rightarrow |\Lambda(x)| = D^2 |W(0)|.$$

Для визначника $|\Lambda(x)|$ за формулою Якобі матимемо

$$|\Lambda(x)| = |\Lambda(0)| \exp\left\{ \int_0^x TrH(x)\,dx \right\}.$$

Враховуючи, що $TrH(x) = 0$, отримаємо

$$|\Lambda(x)| = |\Lambda(0)|.$$

Що стосується аналізованої задачі, отриманий результат означає, що фундаментальні функції і функцію Гріна можна визначати в точці $x = 0$, що призводить до суттєвого спрощення всіх аналітичних виразів чисельно-аналітичного методу граничних елементів.


1. Дащенко А.Ф. Численно-аналитический метод граничных элементов / А.Ф. Дащенко, Л.В. Коломиец, В.Ф. Оробей, Н.Г. Сурьянинов — Одесса, ВМВ, 2010. — В 2–х томах. — Т.1. — 416 с. — Т.2. — 512 с.
2. Крутій Ю.С. Розробка методу розв’язання задач стійкості і коливань деформівних систем зі змінними неперервними параметрами. Автореферат докторської дисертації / Ю.С. Крутій. – Одеса: Одеська державна академія будівництва та архітектури, 2016. – 272 с.


## TO THE CALCULATION OF SHELLS BY A NUMERICAL AND ANALYTICAL METHOD OF BORDER ELEMENTS


*It is shown that the fundamental functions and the Green function can be determined at a point $x = 0$, which leads to a significant simplification of all analytical expressions of the numerical-analytical method of boundary elements.*