УДК 624.073

РАСЧЕТ НЕОДНОРОДНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЗАКРЕПЛЕНИЕМ НА КОНТУРЕ

Заврак Н.В., к.т.н., доц.
Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г. Одесса

Актуальным является применение в технике, а также в промышленном и гражданском строительстве пластин, в большинстве случаев которые естественно или конструктивно анизотропные. Это объясняет особый интерес исследователей к задачам расчета анизотропных пластин. В последнее время этот интерес еще более возрос в связи с применением в различных конструкциях композитных материалов.

В настоящее время существует много методов по расчету прямоугольных неоднородных анизотропных пластин, однако при реализации задач на практике сталкиваемся со значительными трудностями при интегрировании дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, а также с удовлетворением системе уравнений, описывающих условия опирания на границе пластины. При решении таких задач на практике очень редко такой расчет можно представить в аналитической форме. Лучше всего, а иногда и целесообразнее, применять численные методы решения. Метод конечных разностей (МКР) является одним из самых простых. Используя этот метод с достаточно редкой сеткой, решение задачи с достаточной точностью, может быть получено для одних случаев опирания на границе, например, шарнирного закрепления, а при закреплении в не смещающие опоры, решение задачи можно получить при очень густой сетке. Расчет в этом случае получается очень трудоемким, несмотря на применение современных вычислительных машин.

В ряде работ для определения напряженно-деформированного состояния пластин используются вариационные методы, тесно связанные с энергетическими принципами строительной механики, среди которых наиболее общим является начало возможных перемещений (принцип Лагранжа).

Во всех случаях, когда прямое решение задачи затруднено, целесообразно применять вариационные методы решения. Так в 1908 году впервые В. Ритц рассмотрел изгиб прямоугольной пластины, жестко закрепленной по краям под действием нормального давления. Он же доказал для этой задачи сходимость процесса решения к точному значению. В дальнейшем метод Ритца был использован в монографии [12] для пластин переменной жесткости. Там же обсуждаются вопросы выбора координатных функций, так как успех применения метода Ритца для решения практических задач во многом зависит от степени удачности выбора координатных функций. Вопросы разработки вариационных методов к решению задач статики анизотропных пластин переменной толщины отражены в работах [1, 8]. Еще более простой в применении и в то же время более общий и универсальный метод решения краевых задач теории пластин был предложен Б.Г. Галеркиным и И.Г. Бубновым. Метод Бубнова-Галеркина приобретает особую простоту в том случае, когда функция, аппроксимирующая решение, удовлетворяет всем граничным условиям задачи и задана в форме ряда. Приближение аппроксимирующей функции осуществляется способом, связанным с общим понятием об ортогональности функций и дифференциальных выражений. Следует отметить, что чем лучше будет задана заранее функция, то есть чем ближе ряд будет аппроксимировать действительное решение уравнения, тем меньшим будет объем вычислений. Однако использование этого метода не всегда удобно и часто осложнено громоздкими выкладками.

Один из возможных подходов решения краевой задачи, соответствующей жестко защемленной по всему контуру пластине, основанной на сведении ее к решению более простой задачи Пуассона, предложен З.Х. Рафальсоном [9]. В более общей постановке способ построения разрешающего ядра для краевой задачи с одними граничными условиями по известному разрешающему ядру для аналогичной задачи, но с измененными граничными условиями был предложен М.Г. Крейном [5]. Этот метод был далее развит И.Н. Слезингером [10].

Основная идея разработанной общей методики расчета линейных краевых дифференциальных задач основывается на выделении главной части решения. Такой подход обосновывается путем развития и некоторого обобщения общих положений вариационного метода решения краевых задач математической физики самосопряженного типа. Согласно данной методике, искомое решение краевой задачи, состоящей из дифференциального уравнения и граничных условий произвольного вида, получается в виде поправок к известному решению краевой задачи, состоящей из того же дифференциального уравнения и граничных условий некоторого специального (стандартного) типа. Обычно в качестве последних берутся условия жесткого защемления рассчитываемого тела на контуре, поэтому решение получается в виде добавки к решению абсолютно жесткой задачи.

Важно заметить, что такая методика расчета обладает рядом достоинств, в частности: 1) система координатных элементов, которая используется при решении, зависит только от рассматриваемых граничных условий, но не зависит от действующей на пластину нагрузки; 2) структура функции поправки получается такой, что добавление каждого нового слагаемого не требует пересчёта ранее найденных.

Это и делает эту методику весьма эффективной и удобной при решении сложных задач теории пластин с различными способами загружения и граничными условиями.

Численное решение задачи построим следующим образом, для сложного случая закрепления и нагружения пластины по контуру, решение будем искать в виде добавок к найденному решению для простых случаев опирания и загружения, для которых решение разыскивалось, используя аналитические методы или МКР с негустой сеткой. Такой метод расчета немного усложняет определение решения искомой задачи при сложных опираниях, так как оно решается в два этапа, но, несмотря на это оказывается, в конечном счете, эффективнее, потому что позволяет определять составные части искомого решения, применяя аналитические соотношения или небольшое число систем конечно-разностных уравнений по структуре сравнительно простых.

Для возможности практического применения в инженерном деле важное значение имеют таблицы для определения прогибов и внутренних усилий конструкций. Во многих работах [2, 11] приведены такие таблицы для изотропного случая при различных условиях опирания на контуре. Что же касается анизотропных пластин, то таких таблиц, за исключением одной таблицы Губера, составленной для свободно опертой прямоугольной ортотропной пластины в зависимости от соотношения между величинами жесткостей $s = \sqrt{D_{11}D_{22}} / D_{12} = 1$ нет. До сих пор она остается единственной и входит в качестве обязательного компонента во все руководства по расчету пластин. Между тем значительный интерес представляют и другие виды закрепления. Отдельные частные задачи для пластин были разобраны в работах [3, 6, 7] методом конечных разностей. Они показывают, что применение этого метода не всегда может обеспечить получение искомых величин с достаточной степенью точности. Данная статья адресуется к инженерам и научным работникам занимающимися проектированием тонкостенных конструкций. Основная ее установка – продолжения исследования частных задач [4]. Здесь приведены результаты расчета двух серий квадратных ортотропных пластин с жесткостями $D_{12} = \sqrt{D_{11}D_{22}}$ и при различных $\varepsilon = \sqrt[4]{D_{22} / D_{11}}$ под действием равномерно распределенной нагрузки q при жестком и смешанном шарнирно-жестком закреплении, напряженно-деформированное состояние которых в случае шарнирного закрепления всех сторон уже исследовано [11].

[1]. Александров А.Я. Многослойные пластинки и оболочки / А.Я. Александров, Л.М. Куршин // Тр. VII Всесоюз. конф. По теории оболочек и пластинок. – М.: Наука, 1970. – С. 714-721.

[2]. Вайнберг Д. В. Расчет пластин / Д. В. Вайнберг, Е. Д. Вайнберг. – К.: Будивельник, 1970. – 436 с.

[3]. Варвак П. М. Метод сеток в задачах расчета строительных конструкций / П. М. Варвак, Л. П. Варвак. – М.: Стройиздат, 1977. – 154 с.

[4]. Заврак Н.В. Расчет неоднородных анизотропных прямоугольных пластин с произвольным закреплениям на контуре / Н.В. Заврак // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. – Одеса: Атлант, 2016. – №64 – С. 72-76.

[5]. Крейн М. Г. Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения / М. Г. Крейн // Ч. 1, Матем. сб. Т. 20 (62) №3 1947. – С.431-490; Ч. 2, Матем. сб. Т. 21 (63) №3. 1947. – С. 365-404.

[6]. Маркус Г. Теория упругой сетки и ее приложение к расчету плит и без балочных перекрытий ГНТИ Украины / Г. Маркус, 1936. – 452 с.
[7]. Панов Д. Ю. Справочник по численному решению дифференциальных уравнений в частных производных / Д. Ю. Панов. – Гостехиздат, М.-Л., 1950. – 129 с.
[8]. Рассказов А. С. Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек / А. С. Рассказов, И. И. Соколовская, Н. А. Шульга. – К.: Вища школа, 1986. – 191 с.
[9]. Рафальсон З. Х. К вопросу о решении бигармонического уравнения / З. Х. Рафальсон // ДАН СССР. – Т. LXIV. – №6, 1949. – С. 799-802.
[10]. Слезингер И. Н. Об одном способе решения линейных краевых задач самосопряженного типа / И.Н. Слезингер // Прикладная математика и механика, – 1956. – Т. XX, – Вып. 6. – С. 704-713.
[11]. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М.: Физматгиз, 1963. – 635 с.
[12]. Филипов А. П. Численные методы в прикладной теории упругости / А. П. Филипов, В. Н. Булгаков и др. – К.: Наук. думка, 1968. – 250 с.

CALCULATION OF NON-HOMOGENEOUS ANISOTROPIC RECTANGULAR PLATES WITH ARBITRARY FIXATION ON THE CONTUR

The developing of the effective methodic of elastic orthotropic plates' calculation and the research on the base of their state under different boundary conditions are of great importance nowadays. The representation of the received results in the form, convenient for practical use, is also important. For practical applications in engineering are important tables for determining deflections and internal forces of structures. Such tables for the isotropic case under various conditions of plate support on the contour are given in many works. As for the anisotropic plates, there are no such tables, with the exception of one Huber table compiled for a freely supported rectangular orthotropic plate, depending on the relationship between the stiffness values $s = \sqrt{D_{11}D_{22}} / D_{12} = 1$*. Here is a method of calculating the non-homogeneous anisotropic rectangular plates with arbitrary fixation on the contour is set forth, which is reduced to a boundary value problem. The main idea of a calculated general methodic of linear marginal differential tasks calculation is based on underlying of the main part of a solution. Such approach is proved by means of development and some generalization of common positions of a variational method of marginal tasks of mathematical physics of self-conjugated tasks solution. To solve a system of equations in terms of displacements using finite difference method (FDM) in combination with different variations of analytical solutions. It is advisable to construct a numerical solution of the problem so that in difficult cases the support fixing and uploading solution sought, not directly, but in the form of amendments to the known solution for simple cases of reference to consolidate and uploading at finding the solutions which the analytical methods or the FDM with sparse mesh may be used. Given as examples are the results of calculation for a series of square orthotropic plates with a fixed boundary under the action of uniformly distributed load.*