УДК 534.013

ДИНАМІЧНА ЗАДАЧА КРУТІННЯ ЖОРСТКИМ ВАЛОМ НЕОДНОРІДНОГО ПІВПРОСТОРУ

Денисенко В.Ю., к.т.н., доц.,
Ковальова І.Л., к.т.н., доц., Лазарєва Д.В., к.т.н.
Одеська державна академія будівництва та архітектури

Перші задачі про математичне моделювання проблем крутіння однородного півпростору круглим штампом (шайбою) були поставлені у 60-ті роки XX сторіччя. Вперше динамічна задача розглядалася Рейснером і Сагочі [1]. Снеддон [2] привів задачу крутіння півпростору з використанням інтегральних перетворень до розв'язку інтегрального рівняння.

В.Д. Грилицький [3] побудував розв'язок задачі про крутіння круглим штампом ізотропного двухшарового середовища і ортотропного шару у вигляді ряду по ступеням $\frac{1}{\delta}$, де δ - відношення товщини першого шару до радіусу штампа.

Значний вклад у постановку і розв'язок контактних задачі теорії пружності вніс Г.Я. Попов, розробивший узагальнений метод інтегральних перетворень [4].

Задача крутіння активно вивчається і у теперішний час. Так у роботах [5, 6] застосована кусочно-лінійна апроксимація трансформанти ядра для зведення задачі до розв'язку інтегрального рівняння.

У циліндричній системі координат (r, θ, z) розглянемо ортотропно-неоднорідний півпростір із модулями зсуву

$$G_{\tau z} = G_1 \cdot r^m \cdot z^\nu; \quad G_{r\theta} = G_3 \cdot r^n \cdot z^\gamma; \quad \left(m - n + 2 > 0,\ \frac{\nu+\gamma}{\gamma-\nu+2} < 1\right)$$

На поверхні півпростору розташований жорсткий вал з плоскою коловидною основою радіуса a, вал зціплений з півпростором. В момент часу $t = 0$ на вал починає діяти крутильний момент $M(t)$ у горизонтальній площині. Під дією цього моменту вал повертається на кут $\Phi(t)$ навколо вісі z. Вал зціплений з півпростіром, тому у півпросторі виникають крутильні коливання. Півпростір поза валом визначається вільним від напруг. В такому випадку задача зводиться до визначення єдиною, що не дорівнює нулю, компоненти вектору зсуву $V(r, z, t)$.

Задачу визначення функції $V(r, z, t)$ поставимо у вигляді диференціального рівняння

$$r^{n-m}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{1+n}{r}\frac{\partial V}{\partial r}-\frac{1+n}{r^2}V\right)+\frac{1}{\chi}z^{\nu-\gamma}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}+\frac{\nu}{z}\frac{\partial V}{\partial z}\right)=\frac{1}{c_S}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \quad (1)$$

до якого слід додати початкові умови і умови на межі взаємодії валу і півпростору.

Початкові умови при $t = 0$ $\quad V = 0$; $\frac{\partial V}{\partial t}=0$ (2)

і умови на межі

$$\left.\begin{aligned} &V(r,0,t) = -r\Phi(t),\ 0 \le r < a \\ &\tau_{\theta z}(r,0,t) = 0,\ a \le r < \infty \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Тут $\chi=\frac{G_3}{G_1}$

c_s – швидкість розповсюдження поперечних хвиль;

$\tau_{\theta z}$ – дотичне напруження;

a – радіус вала;

Розв'язання задачі (1)-(3) проводиться із застосуванням інтегрального перетворення Лапласа по змінній t, з урахуванням початкових умов (2) і перетворення Ганкеля по змінній r, що дає змогу отримати трансформанту розв'язку у вигляді

$$\overline{V}(r,z,p)=r^{-\frac{n}{2}}\int_0^\infty\left(z\sqrt{\xi^2+g^2}\right)^{\frac{1-\nu}{2}}\cdot\left[C_1K_\eta(q)+C_2I_\eta(q)\right]J_\mu\left(\frac{1}{l}\xi r^l\right)d\xi \quad (4)$$

де $g=\frac{p}{c_S}$; $\qquad J_\mu(r)$ – функція Беселя І рода;

$K_\eta(q)$, $I_\eta(q)$ циліндричні функції уявного аргументу;

$\overline{V}(r,z,p)$ - трансформанта Лапласа функції V(r , z , t);

p – константа, що розділяє перетворення Лапласа;

$$\mu=\frac{n+2}{m-n+2}\ ; \quad l=\frac{m-n+2}{2}\ ; \ \eta=\frac{\nu-1}{\gamma-\nu+2}\ ;$$

$$q=\frac{2}{\gamma-\nu+2}\sqrt{\chi}\sqrt{\xi^2+g^2}\cdot z^{\frac{\gamma-\nu+2}{2}}.$$

Використання розв'язку (4) і дотримання межевих умов (3) дозволяє записати задачу, що ми розглядаємо, у вигляді парних інтегральних рівнянь, які у свою чергу зводяться до рівняння Фредгольма І роду.

Для отримання наближеного розв'язку рівняння Фредгольма І роду скористаємося методом ортогональних многочленів [7]. Застосування цього методу ґрунтується на спектральному співвідношенні з роботи [8].

Розв’язок рівняння отримаємо у вигляді:

$$\bar{t}(y,p) = -\overline{\Phi}(p)\frac{y^{m+1}}{A_\lambda\left(a^{2l}-y^{2l}\right)^{\omega}}\sum_{i=0}^{\infty}\varphi_i\cdot\pi_i\left(\frac{y^{2l}}{a^{2l}}\right);$$

$\pi_i(y) = P_i^{\mu-\omega}\left(1-2y^2\right)$ - поліноми Якобі.

Коефіцієнти φ_i знаходяться методом редукції з системи алгебраїчних рівнянь:

$$\sigma_j\varphi_j - \sum_{i=0}^{\infty}d_{ji}\varphi_i = f_j,\left(j=0,1,2,...\right) \qquad (5)$$

У системі (5) введені такі означення:

$$\sigma_j = \frac{a^{2lr}\Gamma^2(1-\omega+j)}{2^{2-\lambda}(j!)^2\cdot(r+j)};$$

$$f_j = \begin{cases} a^{l(2+\mu-2\omega)+1+\frac{n}{2}}\cdot l\cdot\dfrac{\Gamma(1+\mu)\Gamma(1-\omega)}{2\Gamma(2+\mu-\omega)}, & j=0; \\ 0, & j=1,2,... \end{cases}$$

$$d_{ji} = \frac{a^{2lr}\Gamma(1-\omega+i)\Gamma(1-\omega+j)}{2^{1-\lambda}\cdot i!\cdot j!}\cdot I_{ji};$$

$$I_{ji} = \int_0^{\infty}\left[\xi^{\lambda} - \frac{\xi}{\left(\sqrt{\xi^2+g^2}\right)^{1-\lambda}}\right]\cdot\frac{J_{r+2i}\left(\xi a^l\right)J_{r+2j}\left(\xi a^l\right)}{\xi^{1+\lambda}}d\xi =$$

$$= \frac{1}{2(r+2j)} - \frac{\pi\cdot(-1)^{i+j}}{2\Gamma(\omega)\cos\left(r-\frac{3}{2}\right)\pi}\cdot\left[2(r+i+j)\left(\frac{a^l g}{2}\right)^{2(i+j+r)}\cdot B_{ji} - C_{ji}\right]$$

$$B_{ji} = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\mu+i+j+s)\Gamma(1+2r+2i+2j+2s)\cdot\left(\frac{a^l g}{2}\right)^{2s}}{\Gamma(1+r+i+j+s)\Gamma(1+2r+2i+2j+s)\cdot s!\cdot\Gamma(1+r+2i+s)\Gamma(1+r+2j+s)}$$

$$C_{ji} = \sum_{s=|i-j|}^{\infty}\frac{\Gamma(\omega+s)\Gamma(1+2s)[\Gamma(1+i-j+s)\Gamma(1-i+j+s)]^{-1}\cdot\left(\frac{a^l g}{2}\right)^{2s}}{\Gamma(1+r+i+j+s)\Gamma(\omega-\mu-i-j+s)\cdot s!\cdot}$$

$r = 1 - \omega+\mu.$

Трансформанта Лапласа реакції півпростіру визначається виразом

$$\overline{M}_1(p)=-2\pi\int_0^{\infty}t(r,p)r^2dr \tag{6}$$

Диференційне рівняння обертання валу має вигляд:

$$I_z\frac{d^2\Phi(t)}{dt^2}+M_1(t)=M(t), \tag{7}$$

Де I_z – момент інерції валу відносно вісі z,

$M_1(t)$ – реактивний момент.

Якщо до рівняння (7) застосувати перетворення Лапласу по змінній t, з використанням формули (6) і беручі до уваги початкові умови, то знайдемо

$$\overline{\Phi}(p)=\frac{M(p)}{I_z p^2+\varphi_0\sqrt{G_1G_3}\cdot a^3F(\mu,\omega)}. \tag{8}$$

Застосуємо метод Папуліса [9], ефективність якого була встановлена у роботі [10], і запишемо (8) у вигляді, зручному для чисельного випробування

$$\Phi_0(\tau)=\frac{M}{a^3\sqrt{G_1G_3}}\cdot\varepsilon(\tau). \tag{9}$$

За формулою (9) проведені обчислення для різних параметрів неоднорідності μ і ω, які показали, що при збільшенні μ і зменшенні ω кути повороту валу зменшуються.

При збільшенні τ значення функції $\varepsilon(\tau)$ прагнуть до відповідних значень, отриманих для статичного випадку у роботі [11]. Розрахунок окремого випадку (μ = 1 і ω = 0.5) добре узгоджується із результатами, отриманими у роботі [10] іншим методом розв'язку проблеми.

1. Reissner, E. Forced torsional oscillations of an elastic half-space / E. Reissner , H.F. Sagoci // Journal of Applied Physics/-1944/-Vol.15.- №19.- Pp/652-654.

2. Sneddon, I.N. The Reissner –Sagoci problem / I.N. Sneddon / Proceedings of the Glasgow Mathematical Association/-1966/-Vol. 7.-№ 3.- Pp. 136-144/

3. Грилицкий Д.В. Кручение двухслойной упругой среды / Д.В. Грилицкий / прикладная механика.-1961.- Т. 7.- № 1.- С.89-94.

4. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений.-М.:Наука, 1982.- 344с.

5. Liu, Tie-Jun. Reissner –Sagoci problem for functionally graded materials with arbitrary spatial variation of material properties / Tie-Jun Liu, Yue-Shend Wang // Mechanics Research Communications.-2009.-Vol. 36.- № 3.-Pp.322-329/

6. Xiong, Su-ming/ The Reissner –Sagoci problem for transversely isotropic piezoelectric half-space / Su-ming Xiong, Guang-zheng Ni, Peng-fe Hou // Journal of Zhejang University SCIENCE A.-205.-Vol. 6.- № 9.-Pp/986-989/

7. Попов Г.Я. О методе ортогональных многочленов в контактных задачах теории упругости.-Прикладная математика и механика. М., 1969, т.33, вып. 3, С. 518-531

8. Попов Г.Я. О применении многочленов Якоби к решению интегральных уравнений.- Изв.вузов. Математика. Казань, 1966, №4(53), С.77-85

9. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования.- М. Наука, 1971, 288с.
10. Бородачев Н.М., Мамтеев Ю.А. Неустановившиеся крутильные колебания упругого полупространства. –Изв. АН СССР, Механика твердого тела. М. , 1969, №1, С.79-83
11. Колыбихин Ю.Д. Контактная задача о кручении полупространства упругой шайбой.- Прикладная математика и механика. Киев, 1971, т.7, вып. 12, С.25-31.

THE DYNAMIC PROBLEM OF TORSION BY A RIGID SHAFT OF A NONHOMOGENEOUS HALF-SPACE

An axisymmetric contact problem concerning the torsion of a circular shaft of an orthotropic-nonhomogeneous half-space is considered. By means of the technique of integral transformations of Laplace and Hankel, with the subsequent application of the orthogonal polynomial method, an approximate solution in the transformant space is constructed. Also was performed reverse transformation. Calculated formulas for the angle of rotation of the shaft and the tangential stress acting on the contact area are obtained. Numerical calculations for certain types of heterogeneity have been performed. Comparison of the obtained results with the previously known results is made.