УДК 531.55

ВРАЩАТЕЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА, БЛИЗКОГО К ДИНАМИЧЕСКИ СФЕРИЧЕСКОМУ, С ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ В ПОЛОСТИ

Акуленко Л.Д., д.ф.-м.н., проф.,
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва,
gavrikov@ipmnet.ru
Лещенко Д.Д., д.ф.-м.н., проф., Палий Е.С. асс.
Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г. Одесса,
leshchenko_d@ukr.net

Спутник в своем движении относительно центра масс подвержен влиянию моментов сил, обусловленных наличием жидкости в полостях, расположенных в теле (например, жидкого топлива).

Рассматривается движение относительно центра масс сфероида с полостью, заполненной жидкостью большой вязкости. Момент сил, обусловленный влиянием вязкой жидкости в полости, определен по методике, развитой в работе [1]. Тензор $\boldsymbol{P}$ задается в виде $P_{ij} = P_0\, \delta_{ij}$, где δ_{ij} – символ Кронекера, $P_0 > 0$. В случае сферической полости согласно [1] значение $P_0 = 8\pi b^7/525$, где b – радиус полости. Через $A,\ B,\ C$ обозначены главные центральные моменты инерции системы, через $p,\ q,\ r$ – проекции абсолютной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ на соответствующие главные центральные оси инерции. Уравнения движения в проекциях на главные центральные оси инерции (точка – производная по времени) записываются в виде:

$$A\dot{p} + (C-B)qr = \frac{\rho P_0}{\nu ABC}\, p[C(A-C)(A+C-B)r^2 + \\ +B(A-B)(A+B-C)q^2] \qquad (1)$$

Остальные уравнения получены из (1) путем циклической перестановки символов $A,\ B,\ C$ и $p,\ q,\ r$.

Рассмотрен случай, когда главные центральные моменты инерции твердого тела близки друг к другу и представлены в виде:

$$A = J_0 + \varepsilon A',\ B = J_0 + \varepsilon B',\ C = J_0, \qquad (2)$$

где $0 < \varepsilon << 1$ – малый параметр. При $\varepsilon = 0$ уравнения (1) описывают движение сферически симметричного тела.

Также предполагается, что:

$$|A' - B'| = O(\varepsilon J_*),\ |A - B| = O(\varepsilon^2 J_*), \qquad J_* \sim J_0 \qquad (3)$$

После формальных преобразований системы (1) с учетом соотношений (2), (3) и перехода к медленному времени $\tau = \varepsilon t$ (далее точка – производная по времени τ) получена возмущенная система типа Эйлера вида:

$$\frac{dp}{d\tau} = \frac{B'}{J_0}\left(1 - \varepsilon\frac{A'}{J_0}\right)qr + \varepsilon f_p\left(p,q,r\right), \quad p(0) = p_0$$

$$\frac{dq}{d\tau} = \frac{A'}{J_0}\left(-1 + \varepsilon\frac{B'}{J_0}\right)rp + \varepsilon f_q\left(p,q,r\right), \quad q(0) = q_0 \tag{4}$$

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{\varepsilon}{J_0}\left(A' - B'\right)qp + \varepsilon f_r\left(p,q,r\right), \quad r(0) = r_0$$

Здесь r – медленная переменная. Система дифференциальных уравнений (4) – существенно нелинейная система. В (4) введены возмущения:

$$\varepsilon f_p\left(p,q,r\right) = \frac{\rho P_0 p}{\nu J_0^3}\{A'\left[J_0 - \varepsilon(A' + 2B')\right]r^2 +$$

$$+\left(A' - B'\right)\left[J_0 - \varepsilon(A' - B')\right]q^2\},$$

где $\varepsilon f_q\left(p,q,r\right), \varepsilon f_r\left(p,q,r\right)$ имеют похожий вид.

Решение невозмущенной системы (4) при $\varepsilon = 0$, $1/\nu = 0$ записывается следующим образом: $p = a\sin\varphi$, $q = a\sqrt{\frac{A'}{B'}}\cos\varphi$, $a = \sqrt{p_0^2 + \left(\dot{p}_0/w\right)^2}$ – амплитуда (медленная переменная), φ – фаза, $w = r_0/J_0\sqrt{A'B'}$, $A'B' > 0$ по предположению. После ряда преобразований и усреднения полученной системы по фазе φ находим систему для медленных переменных *x, y*вида:

$$\dot{x} = 2\eta\, x\left(\alpha x + \beta y\right), \quad \dot{y} = \eta\gamma xy \tag{5}$$

Здесь $x = a^2$, $y = r^2$, $\eta = \rho P_0/\nu J_0^3$, $\alpha = \varepsilon/8B' J_0\left(A' - B'\right)^2$,

$$\beta = J_0\left(A' + B'\right)/2 - \varepsilon\left(A'^2 + A'B' + B'^2\right), \gamma = \varepsilon\left(A'^2 + A'B'\right)/2 - J_0 A'$$

Разделив первое уравнение системы (5) на второе, получим скалярное уравнение, допускающее элементарное аналитическое интегрирование:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{2\alpha}{\gamma}\frac{x}{y}+\frac{2\beta}{\gamma}$$

Обозначим: $z=x/y$, $\tilde{\alpha}=2\alpha/\gamma$, $\tilde{\beta}=2\beta/\gamma$, $z'=dz/dy$. Получим линейное уравнение для переменной x: $\frac{dx}{dy}=yz'+z$, в котором: $yz'=y\frac{dz}{dy}=\frac{dz}{d\theta}$.

Здесь введен аргумент $\theta=\ln y$.

В результате преобразований получено уравнение, допускающее разделение переменных y, τ и интегрирование в квадратурах:

$$\dot{y}=\eta\gamma y^2\left(\frac{\tilde{\beta}}{1-\tilde{\alpha}}+C_1 y^{\tilde{\alpha}-1}\right)$$

Численное исследование системы (5) проведено для двух расчетных случаев при начальных условиях $x(0)=1, y(0)=1$. В силу выбранных значений параметров у системы (5) в первом случае коэффициенты имеют вид: η = 0.0224, α = 0.375, β = –25, γ = –30, а во втором – η = 0.6048, α = 0.00625, β = 0.6, γ = –2.5. Численный анализ, проведенный на интервале [0; 10], показывает, что в обоих случаях r^2 убывает: в первом – асимптотически приближаясь к стационарному значению 0.397, а во втором – к нулю. Функция a^2 первом случае убывает, асимптотически приближаясь к нулю, а во втором – возрастает, достигая значения 1.6.

Таким образом получена уточненная в квадратическом приближении по малому параметру система уравнений движения в стандартной форме. Проведен анализ задачи Коши для системы, определенной после усреднения. Эволюция движения твердого тела на бесконечном интервале времени описывается решениями, полученными асимптотически, аналитически и численно. Исследуемая в работе модель представляет определенный естественнонаучный интерес для динамики фигуры Земли.

1. Chernousko F.L., Akulenko L.D., Leshchenko D.D. Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass. – Cham: Springer, 2017. – 241 p.

ROTATIONAL MOTIONS OF A NEARLY DYNAMICALLY SPHERICAL RIGID BODY WITH CAVITY CONTAINING A VISCOUS FLUID

Motion about its center of mass of a nearly dynamically spherical rigid body with a cavity filled with high viscosity fluid is considered. The determination of the moments of forces acting on the body from the viscous fluid in the cavity was proposed in the works of F. L. Chernousko. As a result of asymptotic and numerical calculations, solutions were obtained and described the motion of a body over an infinite time interval.