УДК 624.3

К РАСЧЕТУ ОБОЛОЧЕК ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Крутий Ю.С., д.т.н., проф., Сурьянинов Н.Г., д.т.н., проф.
Одесская государственная академия строительства и архитектуры

Численно-аналитический метод граничных элементов (ЧА МГЭ) хорошо зарекомендовал себя при решении задач статики, устойчивости и динамики стержневых систем и пластин. Полученные результаты в большинстве своем представлены в [1]. При этом практически все задачи описывались дифференциальными уравнениями четвертого порядка и ниже (исключение составляют арки, для которых дифференциальные уравнения имеют шестой порядок).

С формальной точки зрения нет никаких препятствий и для применения ЧА МГЭ к расчетам оболочек. Однако, если исключить тривиальные случаи, все задачи статики, динамики и устойчивости оболочек сводятся к решению дифференциальных уравнений восьмого порядка. А это означает, что разработка аналитической составляющей метода сопряжена с необходимостью оперировать определителями восьмого порядка. Как следствие, все аналитические выражения (фундаментальных функций, функций Грина, векторов нагрузки) получаются очень громоздкими, не говоря уже о промежуточных преобразованиях.

Рассмотрим, например, задачу об изгибе цилиндрической оболочки. В общем случае напряженно-деформированное состояние такой оболочки описывается уравнением

$$\left(\frac{\partial^8}{\partial\theta^8}+2\frac{\partial^6}{\partial\theta^6}+\frac{\partial^4}{\partial\theta^4}\right)F+\frac{12R^2}{h^2}\frac{\partial^4 F}{\partial\beta^4}=0, \qquad (1)$$

где F — новая функция (аналог функции напряжений в теории пластинок), через которую выражаются все параметры НДС оболочки, θ — безразмерная координата:

$$\beta=x/R; \quad \theta=s/R\,.$$

Применением вариационного метода Канторовича-Власова задача преобразуется в одномерную, и описывается дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами:

$$Y^{V111}(\theta)+2Y^{V1}(\theta)+Y^{1V}(\theta)+\frac{12R^2\lambda^4}{h^2}Y(\theta)=0. \qquad (2)$$

Здесь λ — некоторый параметр, связанный с частотой собственных колебаний; в задаче об оболочке

$$\lambda = \frac{Rm}{l},$$

где h и l — толщина и длина оболочки; R — радиус оболочки; m — характеристическое число, определяемое при постановке граничных условий.

Искомая функция записывается в виде

$$Y(\theta) = C_1\Phi_1 + C_2\Phi_2 + C_3\Phi_3 + C_4\Phi_4 + C_5\Phi_5 + C_6\Phi_6 + C_7\Phi_7 + C_8\Phi_8, \qquad (3)$$

где $\Phi_1 - \Phi_8$ — гиперболо-тригонометрические функции:

$$\begin{cases} \Phi_1 = ch\alpha_1 y \sin\beta_1 y; \quad \Phi_2 = ch\alpha_1 y \cos\beta_1 y; \\ \Phi_3 = sh\alpha_1 y \cos\beta_1 y; \quad \Phi_4 = sh\alpha_1 y \sin\beta_1 y; \\ \Phi_5 = ch\alpha_2 y \sin\beta_2 y; \quad \Phi_6 = ch\alpha_2 y \cos\beta_2 y; \\ \Phi_7 = sh\alpha_2 y \cos\beta_2 y; \quad \Phi_8 = sh\alpha_2 y \sin\beta_2 y. \end{cases} \qquad (4)$$

В [2 – 3] приведены полученные выражения фундаментальных функций и функции Грина. Так, одно из этих выражений имеет вид

$$A_{11} = \frac{1}{\Delta_{чёт}}[(H_{12}\Phi_2 - H_{14}\Phi_4)\Delta^{(2)}_{W_0} - (H_{12}\Phi_4 + H_{14}\Phi_2)\Delta^{(4)}_{W_0} +$$
$$+ (H_{16}\Phi_6 - H_{18}\Phi_8)\Delta^{(6)}_{W_0} - (H_{16}\Phi_8 + H_{18}\Phi_6)\Delta^{(8)}_{W_0}].$$

Здесь H – алгебраические выражения, а Δ – определители четвертого порядка.

Совершенно очевидно, что запись подобных выражений в развернутом виде нецелесообразна. В этой связи предлагается выписывать общее решение уравнения (2) в форме

$$Y(\theta) = C_1 e^{\lambda_1\theta} + C_2 e^{\lambda_2\theta} + C_3 e^{\lambda_3\theta} + C_4 e^{\lambda_4\theta} + C_5 e^{-\lambda_1\theta} + C_6 e^{-\lambda_2\theta} + C_7 e^{-\lambda_3\theta} + C_8 e^{-\lambda_4\theta}. \qquad (5)$$

Как оказалось, такой подход значительно упрощает все выражения, и может эффективно применяться в расчетах всех типов оболочек численно-аналитическим методом граничных элементов.

Список литературы

1. Дащенко А.Ф. Численно-аналитический метод граничных элементов / А.Ф. Дащенко, Л.В. Коломиец, В.Ф. Оробей, Н.Г. Сурьянинов — Одесса: ВМВ, 2010. — В 2–х томах. — Т.1. — 416 с. — Т.2. — 512 с.

2. Сурьянинов Н.Г. Фундаментальные функции в задаче изгиба длинной цилиндрической оболочки / Н.Г. Сурьянинов, Е.В. Слабенко. — Вісник Одеського національного морського університету. — № (3)36, 2012. — С. 89-96.

3. Сурьянинов Н.Г. Построение функции Грина в задаче изгиба длинной цилиндрической оболочки / Н.Г. Сурьянинов, В.Ф. Оробей, Е.В. Слабенко. — «Наукові нотатки», Луцьк, ЛНТУ, 2012. — С. 99-106.