

# ОБ ОПТИМАЛЬНОМ РАСПОЛОЖЕНИИ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ОПОР СЖАТОГО ТРЕХПРОЛЕТНОГО СТЕРЖНЯ

Бекшаев С.Я.

Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г. Одесса

В ряде работ [1 – 3] рассматривалась задача максимального повышения критической силы (далее – КрС) двухпролетного шарнирно опертого стержня за счет варьирования положения промежуточной опоры (рис.1) при условии, что одна из крайних опор не является абсолютно жесткой. Установлено, что в некотором диапазоне значений жесткости  $c$  крайней упругой опоры максимум КрС достигается при таком положении внутренней опоры, которому отвечает **полуизогнутая** форма потери устойчивости (рис. 1),

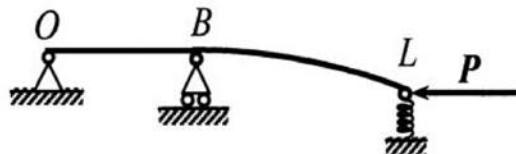


Рис. 1

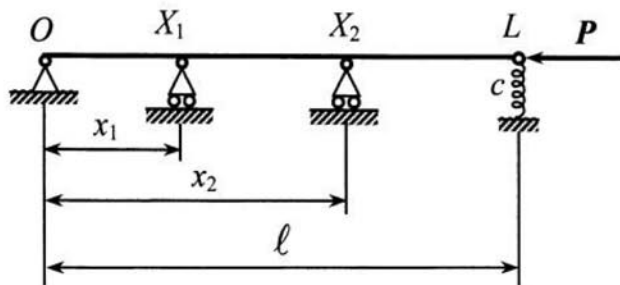


Рис. 2

имеющая недеформированный участок по одну сторону от этой опоры, а соответствующая КрС равна КрС однопролетного стержня  $BL$ , шарнирно опертого по концам на абсолютно жесткие опоры, и одновременно равна  $c \cdot |BL|$ . В предлагаемой работе решается задача определения таких положений  $X_1$  и  $X_2$  внутренних жестких шарнирных опор неразрезного трехпролетного стержня  $S$  длины  $\ell$  (рис. 2), при которых его КрС  $P(S)$  достигает максимума.

Принимаются следующие обозначения.

$(MN)$  – однопролетный стержень, опертый по концам (в точках  $M$  и  $N$ ) на абсолютно жесткие шарнирные опоры;

$(MN -)$  – однопролетный стержень, имеющий жесткую шарнирную опору на конце  $M$  и податливую шарнирную опору на конце  $N$ ;

$(MXN)$ , соответственно  $(MXN -)$  – двухпролетный стержень (неразрезной), образованный из  $(MN)$ , соответственно из  $(MN -)$ , введением промежуточной жесткой шарнирной опоры в точке  $X$ ;

$P_1^0, P_2^0, \dots$  – критические силы стержня  $(OL)$ , занумерованные в порядке возрастания;

$A$  – узел (точка с нулевым прогибом) формы потери устойчивости (далее – формы) стержня  $(OL)$ , отвечающей его второй КрС  $P_2^0$ ;

$A_1$  и  $A_2$  – узлы формы стержня  $(OL)$ , отвечающие его третьей КрС  $P_3^0$ ;  $a_1$  и  $a_2$  – соответственно расстояния узлов  $A_1, A_2$  от левой опоры  $O$ ;

$c_I$  и  $c_{III}$  – пограничные значения коэффициента жесткости податливой опоры  $L$ , равные соответственно  $c_I = P_2^0 / \ell$  и  $c_{III} = P_3^0 / (\ell - a_2)$  (значение  $c_{II}$ ,  $c_I \leq c_{II} \leq c_{III}$ , определяется ниже);

$P^{**} = P^{**}(c)$  – КрС стержня, образованного из  $S$  введением во внутреннем сечении  $D = D(c)$  жесткой заделки (рис. 5), делящей его на два равноустойчивых участка, каждый из которых имеет КрС, равную  $P^{**}$ ;

$\bar{P} = \bar{P}(c)$  – КрС стержня  $(BL)$ , полученного из  $(OL)$  отсечением в точке  $B = B(c)$ , определяемой из условия  $\bar{P} = \text{КрС}(BL) = c|BL|$ ;  $\bar{P} = \bar{P}(c)$  и  $B = B(c)$  – соответственно КрС двухпролетного стержня  $(OBL)$  и точка сопряжения соответствующей полуизогнутой формы (рис. 1), введенной в [1];  $\bar{P} = \bar{P}(c)$  является одной из КрС стержня  $(OBL)$  (основной, если

$KpC(OB) \geq \bar{P}$ , одной из старших – если  $KpC(OB) < \bar{P}$ ), но, как легко видеть, остается одной из  $KpC$  многопролетных стержней, если поместить дополнительные внутренние опоры слева от  $B$ ;

$c_{II}$  – значение коэффициента жесткости  $c$  (единственное), при котором  $P^{**}(c) = \bar{P}(c)$ . Можно доказать, что  $c_I < c_{II} < c_{III}$ , и при  $c < c_{II}$   $\bar{P}(c) < P^{**}(c)$ , а при  $c > c_{II}$   $\bar{P}(c) > P^{**}(c)$ .

С использованием известных качественных результатов теории устойчивости стержневых систем [4 – 6], установлено, что полный набор оптимальных положений опор и соответствующих им максимальных значений  $KpC$  можно описать следующим образом:

1) При  $c \leq c_I$  максимум  $P(S)$  достигается при установке одной из опор на правом конце  $L$  стержня, а второй – в узле  $A$  второй формы стержня  $(OL)$ , и равен  $P_{\max} = P_2^0$ . При строгом неравенстве  $c < c_I$  это положение единственно. При  $c = c_I$  оптимальных положений бесконечно много. Они являются точками пересечения второй формы стержня  $(OL)$  с горизонталью (рис.3), если поворачивать ее вокруг опоры  $O$ . В это множество входит как предельный случай и жесткая заделка в сечении  $D$  (рис. 4).

2) При  $c_I < c < c_{II}$   $P_{\max}$  достигается при совмещении опор, когда они реализуют жесткую заделку, установленную в точке  $D$  (рис. 5), делящей

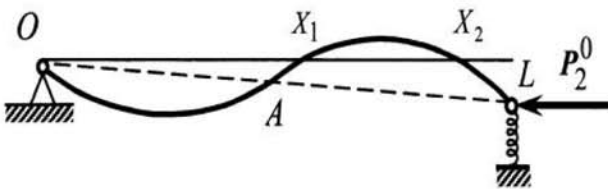


Рис. 3

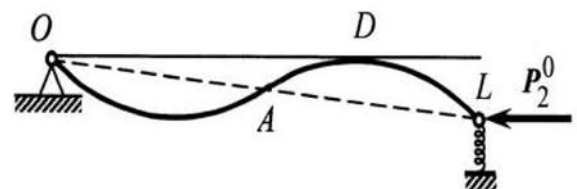


Рис. 4

стержень на две равноустойчивые части, и равен  $P_{\max} = P^{**}$ ,  $P_2^0 < P^{**} < P_3^0$ .

3) При  $c_{II} \leq c < c_{III}$  оптимальными являются расположения опор, при которых правая внутренняя опора находится в точке  $B$  соответствующей

$$c_I < c < c_{II}$$

$$c_{II} \leq c < c_{III}$$

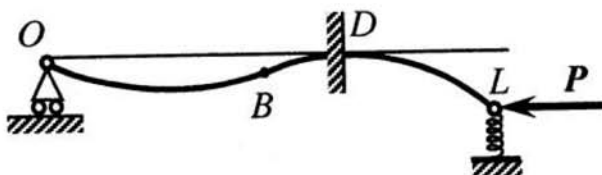


Рис. 5

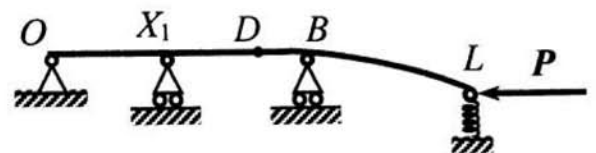


Рис. 6

полуизогнутой формы, а левая – в любой точке некоторого отрезка, содержащего узел второй формы стержня ( $OB$ ) (рис. 6). Потеря устойчивости происходит по полуизогнутой форме и максимальная КрС равна  $P_{\max}(S) = \bar{P}(c)$ , где  $\bar{P}(c)$  – КрС, отвечающая полуизогнутой форме. Если левая из внутренних опор находится на границе допустимого отрезка, КрС  $\bar{P}(c)$  становится двукратной и, кроме полуизогнутой, существует еще одна линейно независимая форма потери устойчивости. При равенстве  $c = c_{II}$  эта граница совпадает с  $B$  и с  $D$ .

4) При  $c \geq c_{III}$  максимум  $P(S)$  достигается при установке внутренних опор в узлах  $A_1$  и  $A_2$  третьей формы стержня ( $OL$ ) и равен  $P_{\max} = P_3^0$ .

### Литература

1. Бекшаев С. Я. Об оптимальном расположении промежуточной опоры продольно сжатого стержня / С. Я. Бекшаев // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. Вип. №60. Одеса. – 2015. – с. 400 – 406.
2. Бекшаев С. Я. Качественные методы в задачах повышения устойчивости сжатых стержней / С. Я. Бекшаев // Вісник Київського національного університету технологій та дизайну. Серія «Технічні науки». № 3 (98), 2016. с. 74 – 82.
3. Бекшаев С. Я. Полуизогнутые формы потери устойчивости и их экстремальные свойства. Некоторые задачи оптимизации сжатых стержней / С. Я. Бекшаев // [Современные проблемы естественных наук](#). Тр. 5-й международной научной конференции «Тараповские чтения», Харьков, 1-15 марта 2016 г.
4. Нудельман Я. Л. Методы определения собственных частот и критических сил для стержневых систем / Я. Л. Нудельман – М.-Л.: ГТТИ, 1949. – 176 с.
5. Нудельман Я. Л. Влияние расположения упругих опор на продольный изгиб многопролетного стержня / Я. Л. Нудельман, Д. М. Гитерман, С. Я. Бекшаев // «Реферативная информация о законченных научно-исследовательских работах в вузах Украинской ССР. Строительная механика и расчет сооружений». Вып.7. Киев, «Вища школа», 1976, – с. 18.
6. Бекшаев С.Я. К вопросу об оптимальном расположении масс и опор вибрирующего стержня / С. Я. Бекшаев, Л. В. Кошкин, Я. Л. Нудельман // «Судостроение и судоремонт». Вып. VII. М., Рекламинформбюро ММФ, 1976, с. 64 – 67.

### ON THE OPTIMAL LOCATION OF THE INTERMEDIATE SUPPORTS OF COMPRESSED THREE-SPAN CONTINUOUS ROD

Locations of the intermediate hinge supports of a three-span rod compressed by the axial force constant along the rod length are searched at which the critical force reaches a maximum. The qualitative characterizations of these locations, depending on the stiffness of end support, are developed and the characteristic qualitative features of the relevant buckling modes and corresponding critical forces are described.