УДК 620.193.4

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПРОСТАНСТВЕННОГО ИЗГИБА ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ БАЛКИ С УЧЕТОМ ФИЗИЧЕСКОЙ И ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ И ПЛАСТИЧНОСТИ БЕТОНА

Фомин В.М., к.т.н доц.
Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г Одесса

1. В монографии [1] приведены формулы для компонентов тензора деформаций в точках изогнутой балки:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_{11} = (x_3 + u_3)\omega_2 - (x_2 + u_2)\omega_3 + u_{1,1},\\
&\varepsilon_{12} = (u_1\omega_3 - (x_3 + u_3)\omega_1 + u_{1,2} + u_{2,1})/2,\\
&\varepsilon_{13} = ((x_2 + u_2)\omega_1 - u_1\omega_2 + u_{1,3} + u_{3,1})/2, \varepsilon_{22} = u_{2,2},\\
&\varepsilon_{23} = (u_{2,3} + u_{3,2})/2, \varepsilon_{33} = u_{3,3}.
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Здесь $\omega_i\,(i = 1,2,3)$ − компоненты вектора угловой скорости поворота базиса $e_i\,(i = 1,2,3)$ (e_1- единичный вектор, совпадающий с ортом $\boldsymbol{\tau}$ касательной к деформированной оси балки в центре C тяжести сечения, e_2 и e_3 − векторы, направленные вдоль осей симметрии поперечного сечения) при движении точки C вдоль изогнутой оси балки с единичной скоростью; $x_i\,(i = 2,3)$ - координаты точки поперечного сечения в системе координат, связанной с ортами $e_i\,(i = 1,2,3)$; $x_1 = s$ − дуговая координата точки C; $u_i\,(i = 1,2,3)$- перемещения точек в указанной системе координат,

$u_{i,j} = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} (i, j = 1,2,3)$. Для ориентации базиса $e_i (i = 1,2,3)$ относительно неподвижного базиса $e_i^0 (i = 1,2,3)$ выбраны углы Крылова.

В [2] приведены следующие выражения:

$$\omega_1 = \dot{\theta}\cos\phi\cos\psi - \dot{\psi}\sin\phi, \ \omega_2 = \dot{\theta}\cos\psi\sin\phi + \dot{\psi}\cos\phi, \qquad (1.2)$$

$$\omega_3 = \dot{\phi} - \dot{\theta}\sin\psi$$

(φ, ψ и θ – углы Крылова, дифференцирование по времени совпадает с дифференцированием по s).

Следуя [1] будем полагать, что деформации и перемещения, а также их производные по s малы по сравнению с координатами x_2 и x_3. Тогда $u_n(x_2, x_3)$ $(n = 1,2,3)$ могут быть представлены в следующем виде:

$$u_n(x_2, x_3) = \sum_{m=2}^{\infty}\sum_{p=0}^{m} a_{n,p,m-p}\, x_2^p x_3^{m-p}. \qquad (1.3)$$

2. В теории пластического течения [3,4] поверхность нагружения определяется функцией

$$\Phi([\sigma], \chi) = \Phi_1([\sigma]) + h(\chi),$$

$\Phi_1([\sigma])$ - функция, определяющая предельную поверхность, $h(\chi)$ – функция упрочнения, χ – параметр упрочнения, $[\sigma]$ - вектор напряжений, т.е вектор с элементами $[\sigma]_1 = \sigma_{1,1}$, $[\sigma]_2 = \sigma_{2,2}$, $[\sigma]_3 = \sigma_{3,3}$, $[\sigma]_4 = \sigma_{1,2}$, $[\sigma]_5 = \sigma_{1,3}$, $[\sigma]_6 = \sigma_{2,3}$.

Примем, что предельная поверхность описывается функцией [5]

$$\Phi_1([\sigma]) = \sigma_{1,1}^2 + \sigma_{2,2}^2 + \sigma_{3,3}^2 - (\sigma_{1,1}\sigma_{2,2} + \sigma_{2,2}\sigma_{3,3} + \sigma_{3,3}\sigma_{1,1}) +$$

$$+ (R_c - R_p)(\sigma_{1,1} + \sigma_{2,2} + \sigma_{3,3}) + 3(\sigma_{1,2}^2 + \sigma_{1,3}^2 + \sigma_{2,3}^2) - R_c R_p.$$

Следуя далее [4], приходим к следующему соотношению:

$$d[\sigma] = D_{ep}\, d[\varepsilon]. \qquad (2.1)$$

Здесь

$$D_{ep} = D_e - D_e \frac{\partial\Phi}{\partial[\sigma]}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial[\sigma]}\right]^T D_e \left\{\left[\frac{\partial\Phi}{\partial[\sigma]}\right]^T D_e \frac{\partial\Phi}{\partial[\sigma]} - \frac{\partial\Phi}{\partial\chi}[\sigma]^T \frac{\partial\Phi}{\partial[\sigma]}\right\}^{-1},$$

D_e - матрица обобщенного закона Гука для линейно упругого материала, $[\varepsilon]$ - вектор деформаций, т.е вектор с элементами $[\varepsilon]_1 = \varepsilon_{1,1}$, $[\varepsilon]_2 = \varepsilon_{2,2}$, $[\varepsilon]_3 = \varepsilon_{3,3}$, $[\varepsilon]_4 = \varepsilon_{1,2}$, $[\varepsilon]_5 = \varepsilon_{1,3}$, $[\varepsilon]_6 = \varepsilon_{2,3}$.

Введем обозначения

$$\xi_1 = \phi, \xi_2 = \psi, \xi_3 = \theta, \xi_4 = \phi', \xi_5 = \psi', \xi_6 = \theta'. \qquad (2.2)$$

Усекая бесконечный ряд (1.3) можно приращение перемещения du_n вызванное приращением dF силы F и приращением dM_0 момента M_0, приложенных к левому концу сегмента балки,

$$du_n = \sum_{m=2}^{N}\sum_{p=0}^{m} x_2^p x_3^{m-p} da_{n,p,m-p} \quad (n = 1,2,3)$$

($da_{n,p,m-p}$ - приращения параметров $a_{n,p,m-p}$). Число слагаемых в каждом из выражений $du_n (n = 1,2,3)$ равно $N_u = (N+4)(N-1)/2$. Тогда каждому из приращений $da_{n,p,m-p}$ можно присвоить номер j (j = 1,2,…,3N_u).

Из (1.1) следует

$$d[\varepsilon]_m = \sum_{r=1}^{6}([\varepsilon]_m)_r^{(1)} d\xi_r + \sum_{j=1}^{3N_u}([\varepsilon]_m)_j^{(2)} da_j \; (m = 1,2,...,6) \qquad (2.4)$$

Здесь

$$([\varepsilon]_m)_r^{(1)} = \frac{\partial[\varepsilon]_m}{\partial\xi_r} (r = 1,2,...,6), \; ([\varepsilon]_m)_j^{(2)} = \frac{\partial[\varepsilon]_m}{\partial a_j} (j = 1,2,...,3N_u).$$

Выражения для $([\varepsilon]_m)_r^{(1)}$ и $([\varepsilon]_m)_j^{(2)}$ $(m, r = 1,2,...,6; j = 1,2,...,3N_u)$ через $x_1, x_2, u_1, u_2, u_3, \xi_r (r = 1,2,...,6)$ могут быть получены из (1.1) — (1.3).

Из (2.1) получаем

$$d[\sigma]_i = \sum_{r=1}^{6}([\sigma]_i)_r^{(1)} d\xi_r + \sum_{j=1}^{3N_u}([\sigma]_i)_j^{(2)} da_j, \; ([\sigma]_i)_r^{(1)} = \sum_{k=1}^{6} D_{ep,i,k}([\varepsilon]_k)_r^{(1)},$$

$$([\sigma]_i)_j^{(2)} = \sum_{k=1}^{6} D_{ep,i,k}([\varepsilon]_k)_j^{(2)} \; (i, r = 1,2,...,6; j = 1,2,...,3N_u).$$

(2.5)

Используя разложения (2.4) и (2.5), можно получить аналогичные разложения и для проекций приращений поперечных сил $dQ_i (i = 1,2,3)$ и изгибающих моментов $dM_i (i = 1,2,3)$:

$$dM_i := \sum_{r=1}^{6}(M_i)_r^{(1)} d\xi_r + \sum_{j=1}^{3N_u}(M_i)_j^{(2)} da_j,$$

$$dQ_i := \sum_{r=1}^{6}(Q_i)_r^{(1)} d\xi_r + \sum_{j=1}^{3N_u}(Q_i)_j^{(2)} da_j \quad (i = 1,2,3) \qquad (2.6)$$

Граничные условия на гранях балки:

$$d[\sigma]_m = 0 \text{ при } m = 2,4,6,\ x_2 = \pm h/2 \text{ и при } m = 3,5,6,\ x_3 = \pm b/2, \quad (2.7)$$

(b и h – размеры поперечного сечения балки). Статическую гипотезу Кирхгофа можно записать в виде приближенных равенств

$$d[\sigma]_2 = d[\sigma]_3 = d[\sigma]_6 = 0\,. \quad (2.8)$$

Из (2.7) и (2.8) следует, что при применении метода наименьших квадратов необходимо найти такие значения параметров $da_j\ (j = 1,2,...,N_u)$, при которых функция

$$d\Psi = \int_{-b/2}^{b/2} \sum_{m=2,4,6} \{[d[\sigma]_m(-\frac{h}{2}, x_3)]^2 + [d[\sigma]_m(\frac{h}{2}, x_3)]^2\}dx_3 +$$
$$+ \int_{-h/2}^{h/2} \sum_{m=3,5,6} \{[d[\sigma]_m(x_2, -\frac{b}{2})]^2 + [d[\sigma]_m(x_2, \frac{b}{2})]^2\}dx_2 +$$
$$+ \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} \sum_{m=2,3,6} [d[\sigma]_m(x_2, x_3)]^2 dx_2 dx_3$$

принимает наименьшее значение.

Из условий равновесия сегмента балки между левым концом и рассматриваемым поперечным сечением следует

$$d\Gamma_m = 0 \ (m = 1,2,3)\,, \quad (2.9)$$

где $d\Gamma_m = \sum_{r=1}^{6} (Q_m)_r^{(1)} d\xi_r + \sum_{j=1}^{3N_u} (Q_m)_j^{(2)} da_j + \sum_{k=1}^{3} (\beta_{m,k} dF_k + F_k d\beta_{m,k})$.

Таким образом, необходимо найти минимум функции $d\Psi$ при выполнении условий (2.9). Проблема условного минимума функции $d\Psi$ сводится к определению минимума функции $L = d\Psi + \sum_{m=1}^{3} \delta_m d\Gamma_m$ по переменным da_j и δ_m ($j = 1,2,..,3N_u$, $m = 1,2,3$), откуда следует, что должны выполняться следующие равенства

$$\frac{\partial(d\Psi)}{\partial(da_i)} - \sum_{m=1}^{3} \delta_m \frac{\partial(d\Gamma_m)}{\partial(da_i)} = 0 \ (i = 1,2,...,3N_u),\ d\Gamma_m = 0,\ (m = 1,2,3) \quad (2.10)$$

Соотношения (2.10) позволяют выразить приращения $da_j\ (j = 1,2,...,3N_u)$ через приращения $d\xi_r\ (r = 1,2,...,6)$:

$$[da] = \sum_{r=1}^{6} [a^{(1)}]^{(r)} d\xi_r + \sum_{k=1}^{3} [a^{(2)}]^{(k)} dF_k\,.$$

Элементы столбцов $[a^{(1)}]^{(r)}$ и $[a^{(2)}]^{(k)}$ могут быть определены при помощи (2.4) – (2.6). Тогда (2.6) примет следующий вид:

$$dM_i = \sum_{r=1}^{6} (M_i)_r^{(3)} d\xi_r + \sum_{k=1}^{3} (M_i)_k^{(4)} dF_k \; (i = 1,2,3), \qquad (2.11)$$

где $(M_i)_r^{(3)} = (M_i)_r^{(1)} + \sum_{j=1}^{N_u} (M_i)_j^{(2)} [a]_j^{(r)}$, $(M_i)_k^{(4)} = \sum_{j=1}^{3N_u} (M_i)_j^{(2)} [a^{(2)}]_j^{(k)}$.

Из соотношения $M' + e_1 \times Q = 0$ [1] следует, что

$$\begin{aligned} &dM_1' + M_3 d\omega_2 + \omega_2 dM_3 - M_2 d\omega_3 - \omega_3 dM_2 = 0, \\ &dM_2' + M_1 d\omega_3 + \omega_3 dM_1 - M_3 d\omega_1 - \omega_1 dM_3 - dQ_3 = 0, \\ &dM_3' + M_2 d\omega_1 + \omega_1 dM_2 - M_1 d\omega_2 - \omega_2 dM_1 + dQ_2 = 0. \end{aligned} \qquad (2.12)$$

При помощи (2.11) равенства (2.12) можно записать так:

$$X d\mathbf{o}'' + Y d\mathbf{o}' + Z d\mathbf{o} + U = 0 \qquad (2.13)$$

где $d\xi = [d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3]$, X, Y и Z – квадратные матрицы размерности 3×3.

Матричное равенство (2.13) представляет собой систему дифференциальных уравнений для нахождения приращений углов Крылова

В результате решения системы уравнений (2.41) определяем $d\psi$, $d\phi$ и $d\theta$ как функции s. Прибавляя их к найденным значениям углов Крылова на предыдущем шаге, получаем новые значения этих углов, а затем, проектируя вектор $e_1 = \tau = r'$ на оси x_i (i = 1,2,3), получаем уравнения

$$x'_{C,i} = \alpha_{1,i} \; (i = 1,2,3),$$

определяющие координаты точек изогнутой оси балки.

Література

1. Илюхин А.А. Пространственные задачи нелинейной теории упругих стержней. – Киев: Наукова думка, 1979. – 216 с.

2. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. – М.: Наука, 1973. – 320 с.

3. Ивлев Д.Д. Быковцев Г.И. Теория упрочняющегося пластического тела. – М.: Наука, 1971. – 231 с.

4. Клованич С.Ф. Метод конечных элементов в нелинейных задачах инженерной механики. Библиотека журнала «Світ геотехніки», вып. 9. – Запорожье: ООО ИПО «Запорожье», 2009. – 400 с.

5. Гениев Г.А., Киссюк В.Н., Тюпин Г.А. Теория пластичности бетона и железобетона – М.: Стройиздат, 1974. – 316 с.

DIFFERENTSIALTNYE EQUATION SPATIO BEND CONCRETE BEAMS TAKING INTO ACCOUNT PHYSICAL AND GEOMETRICAL NONLINEAR AND PLASTIC CONCRETE

The algorithm of creation of the spatial bending differential equations for reinforced concrete beams taking into account the nonlinear and plastic properties of concrete is offered. These equations are necessary for the solving static and dynamic problems for reinforced concrete beams and frames.