УДК 539.3:624.046.3

КАЧЕСТВЕННЫЙ ПОДХОД В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

Бекшаев С Я.

Одесская государственная академия строительства и архитектуры г.Одесса

Работа посвящена решению вопроса об оптимальном расположении промежуточной шарнирной опоры, максимально повышающей критическую силу (далее – КрС) двухпролетного стержня, сжатого постоянной по длине продольной силой, изображенного на рис. 1. Она является продолжением работы [1], в которой рассматривалось шарнирное опирание стержня. Введение защемления на опоре О приводит к тому, что не все использованные в [1] идеи могут быть безусловно перенесены на рассматриваемый случай и требуют развития и обобщения.

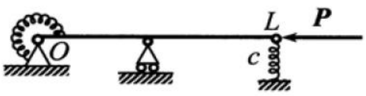

Рис. 1

В работе [1] решение задачи выполнялось в основном с использованием известных в теории устойчивости упругих систем качественных результатов [2, гл. 5], [3], в числе которых используется следующее предложение [4, гл. VI]:

Теорема 1. *Если стержень, шарнирно опертый концами на жесткие опоры, укоротить, удалив какую-либо часть с одной из сторон, и образовавшийся свободный конец опереть на прежнюю опору, все его КрС увеличатся*.

Обобщение этого результата на другие условия опирания сталкивается с некоторыми ограничениями.

Рис. 2

В частности, если шарнирно опертый стержень дополнительно жестко или упруго защемить на одном из концов (рис. 2), а укорочение производить с противоположной стороны, при некоторых законах изменения изгибной жесткости по длине стержня может происходить не увеличение, а уменьшение его КрС.

Если коэффициент жесткости упругой заделки не превосходит некоторой границы, предложение остается справедливым. При произвольной жесткости заделки оно требует отдельной проверки.

Для практического применения результатов настоящей работы вполне достаточными могут оказаться условия, устанавливаемые в следующей теореме.

Обозначим через x расстояние сечения стержня от опоры O. $EI(x)$ – изгибная жесткость стержня, α – коэффициент жесткости упругого защемления на опоре O.

Теорема 2. *Если изгибная жесткость* $EI(x)$ *стержня, опертого по концам на жесткие шарнирные опоры и защемленного на одной из них*, *при всех* x *и* $r > 1$ *удовлетворяет условию*

$$EI(rx) \le r^2 EI(x), \tag{1}$$

все его КрС монотонно возрастают при его укорочении с незащемленной стороны.

З а м е ч а н и е 1. Условие (1) имеет простой геометрический смысл, который состоит в том, что график функции $EI(x)$ пересекается любой из семейства парабол Cx^2 ровно один раз, причем «снизу вверх», т.е кривая $EI(x)$ в любой точке не должна расти быстрее, чем проходящая через эту точку парабола (см. рис. 3).

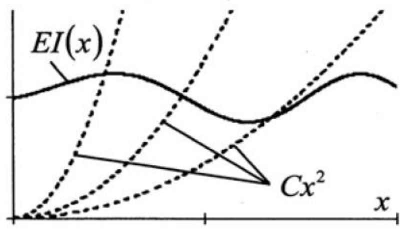

Рис. 3

З а м е ч а н и е 2. Условие (1) в случае дифференцируемости $EI(x)$ эквивалентно дифференциальному условию

$$EI'(x) \le 2EI(x)/x, \tag{2}$$

ограничивающему скорость нарастания изгибной жесткости.

Теорема 2 показывает, что свойство, описанное в теореме 1, выполняется для широкого класса распределений изгибной жесткости, включающего все случаи убывания или постоянства $EI(x)$, а также не слишком резкого роста (не опережающего параболу).

Теорема 3. *Укорочение стержня*, *рассмотренного в теореме* 1, *со стороны защемления при любом* α *повышает все КрС независимо от распределения изгибной жесткости*.

Опираясь на сформулированные результаты и принимая допущение о справедливости свойств КрС, выраженных в **теореме** 1, можно указать качественное решение задачи об оптимальном расположении внутренней опоры стержня на рис .1. Оно описано в теоремах $4-6$ и сводится к следующему.

Рис. 4

КрС стержня без внутренней опоры (рис. 4) обозначим $P_1, P_2, \ldots$ Рассмотрим стержень, в котором отсутствует внутренняя опора, а на шарнирном конце L опора абсолютно жесткая (рис. 2). Обозначим его КрС P_∞. Определим в нем точку H, отсекающую стержень HL, который, будучи установлен на жесткие шарниры в точках H и L, имеет такую же КрС. Обозначим через E точку внутри стержня OL, которая делит его на два равноустойчивых участка при условии, что в этой точке сделан разрез и установлены жесткие шарниры в точках E и L. Это значит, что стержни OE и EL, изображенные на рис. 5, имеют равные КрС, которые обозначим P_E. При выполнении соответствующего обобщения теоремы 1 такая точка единственная. Можно доказать справедливость неравенств $P_\infty < P_E$, $|HL| > |EL|$. Введем также обозначения

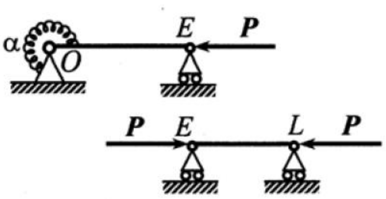

Рис. 5

$$c_{Iкр} = P_\infty / |HL|, \quad c_{IIкр} = P_E / |EL|, \quad c_{Iкр} < c_{IIкр}. \tag{3}$$

Теорема 4. *При* $c < c_{Iкр}$ *максимум КрС достигается при положении опоры в точке* L *и равен* P_∞.

Теорема 5. *При* $c_{Iкр} < c < c_{IIкр}$ *максимум КрС достигается при положении опоры в точке* B, *определяемой из условия равенства КрС однопролетного стержня* BL, *шарнирно опертого на жесткие опоры, величине* $c \cdot |BL|$ *и равен этой КрС,* $P_{max} = c \cdot |BL|$. *При этом*

$$|EL| < |BL| < |HL| \text{ и } P_\infty < P_{max} < P_2.$$

Этой КрС отвечает **полуизогнутая форма потери устойчивости** (рис. 6), в которой участок OB остается недеформируемым.

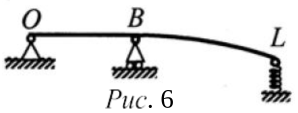

Рис. 6

Теорема 6. *При* $c > c_{IIкр}$ *максимум КрС достигается при положении опоры в узле второй формы однопролетного стержня* (*рис*. 4) *и равен отвечающей ей КрС* $P_{max} = P_2$.

Литература

1. С.Я Бекшаев. Об оптимальном расположении промежуточной опоры продольно сжатого стержня. // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. Вип. №60. Одеса. – 2015. – с400 – 406.
2. Я.Л Нудельман Методы определения собственных частот и критических сил для стержневых систем. М.-Л, ГТТИ, 1949, 176 с
3. Я.Л Нудельман, Д М Гитерман, С.Я.Бекшаев. Влияние расположения упругих опор на продольный изгиб многопролетного стержня. // « Реферативная информация о законченных научно-исследовательских работах в вузах Украинской ССР. Строительная механика и расчет сооружений». Вып.7. Киев, «Вища школа», 1976, – с18.
4. Р.Курант и Д.Гильберт. Методы математической физики, т. I. М.-Л, ГТТИ, 1951, 476 с

A QUALITATIVE APPROACH TO OPTIMIZATION PROBLEMS FOR COMPRESSED RODS

The paper presents the application of qualitative methods of the theory of stability to the positioning of the intermediate hinge support of a two-span bar, compressed by the axial force constant along the bar length, providing a maximum of its critical force