

О РЕШЕНИЯХ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ БУБНОВА**Бекшаев С.Я.***Одесская государственная академия строительства и архитектуры*
fevs@ogasa.org.ua, ORCID: 0000-0002-5752-5321

Аннотация. Работа посвящена решению задачи повышения устойчивости прямолинейного многопролетного стержня, шарнирно опертого на опоры, среди которых могут быть как упругие, так и абсолютно жесткие, сжатого продольной силой, постоянной по длине стержня. Допускается произвольное по длине распределение изгибной жесткости стержня. Известны требования к расположению опор, при котором может достигаться максимально возможное при данном их числе значение критической силы стержня. В работе предложен метод, позволяющий определить коэффициенты жесткости опор, обеспечивающих это максимальное значение критической силы и находящихся в произвольных наперед заданных отношениях. При решении используются, в основном, качественные методы теории устойчивости стержневых систем.

Ключевые слова: многопролетный стержень, устойчивость, критическая сила, максимум, качественные методы.

Введение. При проектировании инженерных сооружений приходится сталкиваться с задачей повышения устойчивости их элементов, работающих в условиях продольного сжатия. Известны многочисленные исследования [1-3], посвященные задачам повышения критических сил сжатых стержней за счет изменения их геометрических характеристик, перераспределения материала по длине стержня и влияния других факторов. Их использование во многих случаях ограничивается разнообразными эксплуатационными требованиями к конструкции

Повышение устойчивости сжатого стержня может быть достигнуто за счет установки дополнительных опор. При этом возникает задача рационального выбора положений и характеристик вводимых опор с целью достижения максимального повышения основной критической силы (далее – KpC) при минимальных затратах, связанных с их установкой.

Одной из ранних задач этого направления стала задача Бубнова [4], в которой требовалось так расставить n одинаковых промежуточных упругих опор в призматическом шарнирно опертом по концам на жесткие опоры стержне, чтобы основная KpC так образованного $(n+1)$ – пролетного стержня, сжатого постоянной по длине осевой силой, достигла максимального значения. Было установлено, что для этого вводимые промежуточные опоры должны располагаться в узлах формы потери устойчивости, соответствующей $(n+1)$ -й KpC исходного однопролетного стержня. Кроме того, было найдено минимальное конечное значение c_B коэффициента жесткости этих опор, обеспечивающее максимум KpC . Увеличение жесткости опор по сравнению с c_B не изменяет уже достигнутого максимального значения, которое при этих значениях жесткости становится двукратным. Я.Л. Нудельманом [5] был предложен простой способ отыскания бесконечного множества различных наборов коэффициентов жесткости опор многопролетного стержня, включая крайние, не обязательно равных между собой, которые обеспечивают решение той же задачи, т.е. доводят KpC до ее максимально возможного при данном числе опор значения, делая его двукратным. При этом уменьшение любого из коэффициентов ведет к снижению KpC . Решение Я.Л. Нудельмана оставляло открытым вопрос об общности предложенного подхода и об эффективных приемах отыскания всех

наборів коефіцієнтів жорсткості опор, забезпечуючих максимум і двукратність КрС $(n+1)$ – пролетного стержня. Решенню цих питань присвячена нинішня робота.

Постановка задачі. Введемо позначення:

(OL) – однопролетний стержень, шарнирно опертий по кінцях O і L на жорсткі опори;
 S^n – стержень, сформований з (OL) введенням n проміжних точкових шарнирних опор і заміною крайніх опор опорами довільної жорсткості (рис. 1);

$P_1, P_2, \dots, P_j, \dots$ – КрС стержня (OL) , занумеровані в порядку зростання;

j -я форма – форма втрати стійкості стержня (OL) , що відповідає КрС P_j ;

l_j – довжина j -го пролету стержня S^n ; відстань між $(j-1)$ -м і j -м вузлами $(n+1)$ -ї форми;

c_j – коефіцієнт жорсткості j -ї опори.

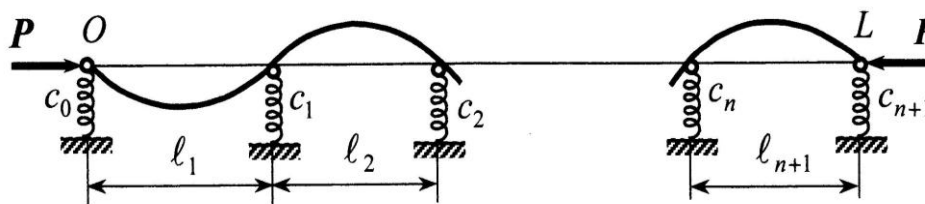


Рис. 1. $(n+1)$ – пролетний упруго опертий стержень S^n

Цілью роботи є рішення узагальненої задачі Бубнова (ОЗБ) – знайти набір значень c_0, c_1, \dots, c_{n+1} коефіцієнтів жорсткості опор, встановлених в вузлах $(n+1)$ -ї форми, що знаходяться в довільному наперед заданому відношенні, при якому основна КрС S^n дорівнює P_{n+1} і зменшення будь-якого з c_j тягне за собою зменшення основної КрС.

Методика дослідження. Рішення ґрунтується на якісних результатах теорії стійкості стержневих систем [6]. В частині, використовується наступна теорема про накладенні зв'язей.

Основна КрС стержневої системи S^n , сформованої з початкової S^0 введенням n зв'язей, не перевищує величини P_{n+1} $(n+1)$ -ї критичної сили початкової системи і може стати рівною P_{n+1} тільки при умові, що накладені зв'язі не перешкоджають здійсненню $(n+1)$ -ї форми початкової системи.

В розглянутому випадку стержня і зв'язей у вигляді точкових опор вимога теореми означає, що всі проміжні опори повинні розташовуватися в вузлах $(n+1)$ -ї форми [5].

Результати дослідження. Для визначення шуканих коефіцієнтів жорсткості образуємо розрізний стержень \bar{S}^n (рис. 2), вводячи внутрішні шарнири на опорах, розташованих в вузлах $(n+1)$ -ї форми. Його спектр містить КрС його окремих звеньєв як однопролетних стержнів, шарнирно опертих по кінцях на жорсткі опори, і особливі КрС, яким відповідають кусочно-лінійні форми, в яких ці звенья залишаються прямокутними (рис. 2). Якщо вибрати коефіцієнти c_0, c_1, \dots, c_{n+1} так, щоб найменша з особливих КрС стала рівною P_{n+1} , то в спектрі стержня \bar{S}^n P_{n+1} буде основною і $(n+2)$ – кратною, якою, крім кусочно-лінійної, відповідають $(n+1)$ форм, в яких деформований тільки один з $(n+1)$ пролетів. Вилучення розрізів є накладенням n зв'язей, в результаті чого згідно з теоремою про накладенні зв'язей утворюється стержень S^n з двукратною основною КрС, рівною P_{n+1} .

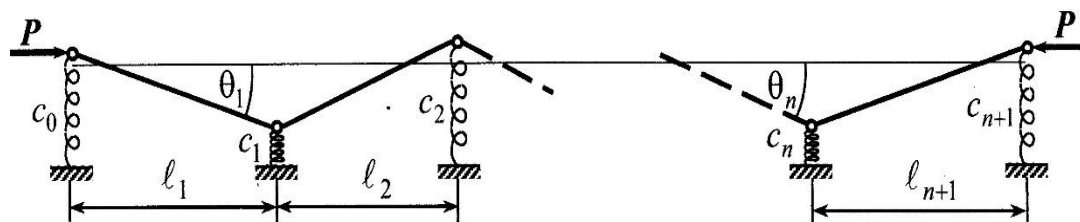


Рис. 2. Стержень \bar{S}^n и его кусочно-линейная форма

При определении особых КрС стержня \bar{S}^n его отдельные звенья можно рассматривать как абсолютно жесткие. Обозначая угол наклона j -го звена при потере устойчивости под действием продольной силы P по одной из особых (кусочно-линейных) форм через θ_j , а вертикальное смещение j -й опоры – через y_j , можем записать уравнения:

$$c_0 y_0 = -P\theta_1, \quad c_j y_j = P(\theta_j - \theta_{j+1}) \text{ для } j=1, 2, \dots, n, \quad c_{n+1} y_{n+1} = P\theta_{n+1}, \quad (1)$$

выражающие условия равновесия каждого узла, и

$$y_j - y_{j-1} = l_j \cdot \theta_j, \quad j=1, 2, \dots, n+1, \quad (2)$$

которое выражает геометрическую связь наклона j -го стержня и смещений его концов.

Исключая из (1) и (2) смещения y_j , приходем к линейной однородной системе:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{c_0} + \frac{1}{c_1}\right)\theta_1 - \frac{1}{c_1}\theta_2 &= \frac{l_1}{P}\theta_1 \\ -\frac{1}{c_{j-1}}\theta_{j-1} + \left(\frac{1}{c_{j-1}} + \frac{1}{c_j}\right)\theta_j - \frac{1}{c_j}\theta_{j+1} &= \frac{l_j}{P}\theta_j \text{ для } j=2, 3, \dots, n \\ -\frac{1}{c_n}\theta_n + \left(\frac{1}{c_n} + \frac{1}{c_{n+1}}\right)\theta_{n+1} &= \frac{l_{n+1}}{P}\theta_{n+1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Особые КрС определяются как корни уравнения:

$\frac{1}{c_0} + \frac{1}{c_1} - \frac{l_1}{P}$	$-\frac{1}{c_1}$	0	...	0	0	0
$-\frac{1}{c_1}$	$\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} - \frac{l_2}{P}$	$-\frac{1}{c_2}$...	0	0	0
.....
0	0	0	...	$-\frac{1}{c_{n-1}}$	$\frac{1}{c_{n-1}} + \frac{1}{c_n} - \frac{l_n}{P}$	$-\frac{1}{c_n}$
0	0	0	...	0	$-\frac{1}{c_n}$	$\frac{1}{c_n} + \frac{1}{c_{n+1}} - \frac{l_{n+1}}{P}$

= 0, (4)

выражающего условия существования нетривиальных решений системы (3).

Пусть r_0, r_1, \dots, r_{n+1} произвольный заданный набор положительных чисел. Набор коэффициентов жесткости опор, решающих задачу Бубнова и находящихся в тех же отношениях, что и $\{r_j\}$, можно представить в виде $c_j = c \cdot r_j$, где c – коэффициент, подлежащий определению. Чтобы его найти, подставим $c_j = c \cdot r_j$ в систему (3) и перепишем

ее в виде:

$$-\frac{1}{r_{j-1}}\theta_{j-1} + \left(\frac{1}{r_{j-1}} + \frac{1}{r_j}\right)\theta_j - \frac{1}{r_j}\theta_{j+1} = \frac{\ell_j}{(P/c)}\theta_j = \frac{\ell_j}{P^*}\theta_j. \quad (5)$$

Если теперь в уравнение (4) подставить r_j вместо c_j и найти его наименьший корень P_{\min}^* , то наименьший корень уравнения (4) будет равен $c \cdot P_{\min}^*$. Потребовав, чтобы он был равен P_{n+1} , найдем:

$$c = P_{n+1}/P_{\min}^* \Rightarrow c_j = r_j(P_{n+1}/P_{\min}^*). \quad (6)$$

З а м е ч а н и е. Предложенная схема применима и в том случае, если некоторые из крайних или промежуточных опор будут абсолютно жесткими. В этом случае следует в уравнениях (3) – (5) принять $1/c_j = 1/r_j = 0$, что не препятствует отысканию P_{\min}^* .

При произвольных r_0, r_1, \dots, r_{n+1} и произвольном распределении изгибной жесткости по длине стержня коэффициент c определяется посредством численного решения уравнения (4) при r_j вместо c_j . В следующем примере благодаря регулярности системы это определение удастся выполнить аналитически при произвольном числе n промежуточных опор.

П р и м е р. Определим значения коэффициентов жесткости опор, решающих задачу Бубнова в случае призматического стержня, один из концов которого шарнирно оперт на абсолютно жесткую опору, $c_0 = \infty$, а остальные $(n+1)$ опор одинаковы, $c_1 = \dots = c_{n+1} = c$, и расположены на равных расстояниях $\ell_1 = \ell_2 = \dots = \ell_{n+1} = \ell$. Система (3) принимает вид:

$$\begin{aligned} (1-\mu)\theta_1 - \theta_2 &= 0, \\ -\theta_{j-1} + (2-\mu)\theta_j - \theta_{j+1} &= 0 \quad \text{для } j=2, 3, \dots, n, \\ -\theta_n + (2-\mu)\theta_{n+1} &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\mu = c\ell/P$.

Решение системы (7) ищем в виде $\theta_j = A\cos j\varphi + B\sin j\varphi$. Для определения постоянных A, B и φ введем две новые неизвестные θ_0 и θ_{n+2} , и дополним систему (7) определяющими их уравнениями:

$$-\theta_0 + \theta_1 = 0, \quad \theta_{n+2} = 0, \quad (8)$$

прибавив которые соответственно к первому и последнему уравнениям системы (7), получим $n+1$ уравнений $-\theta_{j-1} + (2-\mu)\theta_j - \theta_{j+1} = 0$, имеющих единообразную форму записи для $j=1, 2, \dots, n+1$. Как легко проверить, для $\theta_j = A\cos j\varphi + B\sin j\varphi$ справедливо равенство:

$$\theta_{j-1} + \theta_{j+1} = \theta_j \cdot 2\cos\varphi,$$

что после подстановки в (7) приводит к уравнению $\mu = 2(1 - \cos\varphi)$. Подстановка $\theta_j = A\cos j\varphi + B\sin j\varphi$ в (8) приводит к системе:

$$\begin{aligned} -A + A\cos\varphi + B\sin\varphi &= 0; \\ A\cos(n+2)\varphi + B\sin(n+2)\varphi &= 0, \end{aligned}$$

условием существования нетривиального решения которой является равенство:

$$\begin{vmatrix} -(1-\cos\varphi) & \sin\varphi \\ \cos(n+2)\varphi & \sin(n+2)\varphi \end{vmatrix} = 0,$$

которое может быть приведено к виду $\cos(n+3/2)\varphi = 0$, откуда находим $n+1$ различных значений φ :

$$\varphi_j = \frac{(2j-1)\pi}{2n+3}, \quad j = 1, 2, \dots, n+1, \quad (9)$$

котрим відповідають $n+1$ особих КрС стержня \bar{S}^n , рівних $P = \frac{c\ell}{\mu} = \frac{c\ell}{2(1-\cos\varphi_j)}$. Найменша

із них повинна відповідати максимуму знаменателя $1-\cos\varphi_j$, для чого відповідуюче значення φ_j повинно бути максимально близьким до π . Як видно із (9), воно рівно:

$$(\varphi_j)_{\max} = \varphi_{n+1} = \frac{(2n+1)\pi}{2n+3} = \pi - \frac{2\pi}{2n+3}, \quad (10)$$

откуда значення коефіцієнта жорсткості, забезпечуюче задане значення P найменшої із особих КрС, рівно:

$$c = \frac{2P}{\ell}(1-\cos\varphi_{n+1}) = \frac{2P}{\ell}\left(1+\cos\frac{2\pi}{2n+3}\right) = \frac{2P}{\ell}\left(1+\cos\frac{\pi}{n+3/2}\right),$$

а рішення відповідуючої ОЗБ визначається рівністю:

$$c = \frac{2EJ\pi^2}{\ell^3}\left(1+\cos\frac{\pi}{n+3/2}\right). \quad (11)$$

Відомі рішення ОЗБ для призматического стержня S^n И.Г. Бубнова – для випадку абсолютно жорстких крайніх опор і однакових проміжочних – і Я.Л.Нудельмана [5] – для випадку однакових як крайніх, так і проміжочних опор, рівні відповідно:

$$c_B = \frac{2EJ\pi^2}{\ell^3}\left(1+\cos\frac{\pi}{n+1}\right), \quad c_H = \frac{2EJ\pi^2}{\ell^3}\left(1+\cos\frac{\pi}{n+2}\right).$$

Як видно, знайдене рішення (11) задовольняє нерівностям $c_B < c < c_H$, що відображає цілком поясниме обставина: зменшення жорсткості крайніх опор при збереженні КрС повинно компенсуватися збільшенням жорсткості проміжочних.

Висновки. В роботі поставлена і вирішена задача відшукування таких систем коефіцієнтів жорсткості крайніх і проміжочних опор багатопролетного продольно стиснутого стержня, які забезпечують максимально можливе при заданому числі опор значення його критическої сили. Встановлено існування і запропоновано спосіб численного визначення шуканих коефіцієнтів, знаходячихся в довільних наперед заданих відношеннях. Отримані результати можуть використовуватися при вирішенні задач проектування і оптимізації інженерних споруджень, що містять продольно стиснуті елементи.

Литература

1. G.I.N. Rozvany, T. Lewiński (eds). Topology Optimization in Structural and Continuum Mechanics / George I. N. Rozvany, Tomasz Lewiński // CISM International Centre for Mechanical Sciences – Springer, 2014. – 471 p.
2. Бекшаев С.Я. Повышение устойчивости стержня за счет изменения длины / С.Я. Бекшаев // «World Science». – Warsaw, Poland, June 2018. – № 6 (34). – Vol. 2. – pp. 12 – 16.
3. Бекшаев С.Я. О влиянии длины стержня на его критические силы / С.Я. Бекшаев // Proceedings of the VII International Scientific and Practical Conference «International Trends in Science and Technology». – Warsaw, Poland, November 30, 2018. – Vol. 1. – pp. 59 – 64.
4. Бубнов И.Г. Строительная механика корабля, ч. 1 / И.Г. Бубнов. – СПб, 1912. – 330 с.
5. Нудельман Я.Л. Устойчивость упруго опертых балок / Я.Л. Нудельман // ПММ, т. 3. – 1939. – №4. – С. 33–48.

6. Нудельман Я.Л. Методы определения собственных частот и критических сил для стержневых систем / Я.Л. Нудельман. – М.-Л. ГТТИ, 1949. – 176 с.

References

- [1] G.I.N. Rozvany, T. Lewiński (Eds), "Topology Optimization in Structural and Continuum Mechanics", *CISM International Centre for Mechanical Sciences – Springer*, 2014.
- [2] S.Ya. Bekshaev, "Povyshenie ustoichivosti sterzhnya za schet izmeneniya dliny", *World Science*, Warsaw, Poland, no. 6 (34), Vol. 2, pp. 12 – 16, 2018.
- [3] S.Ya. Bekshaev, "O vliyani dliny sterzhnya na ego kriticheskie sily", *Proceedings of the VII International Scientific and Practical Conference «International Trends in Science and Technology»*, Warsaw, Poland, Vol. 1, pp. 59 – 64, 2018.
- [4] I.G. Bubnov, *Stroitel'naya mekhanika korablya*, v. 1, S.-Pb, 1912.
- [5] Ya.L. Nudelman, "Ustoichivost' uprugo opertykh balok", *PMM*, v. 3, no. 4, pp. 33–48, 1939.
- [6] Ya.L. Nudelman, "*Metody opredelenia sobstvennyh chastot i kriticheskikh sil dlya sterzhnevyyh sistem*". M.-L.: GTTI, 1949.

ПРО РОЗВ'ЯЗКИ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ЗАДАЧІ БУБНОВА

Бекшаєв С.Я.

Одеська державна академія будівництва та архітектури
fevs@ogasa.org.ua ORCID: 0000-0002-5752-5321

Анотація. Для підвищення критичних сил поздовжньо стисненого стержня можуть встановлюватися додаткові пружні або абсолютно жорсткі шарнірні опори. І. Г. Бубнов сформулював і розв'язав таку задачу: знайти мінімальне значення коефіцієнта жорсткості однакових проміжних шарнірних опор багатопрогнового призматичного стержня (однакове для всіх опор), розташованих на рівних відстанях одна від одної, при якому основна критична сила стержня, кінці якого шарнірно оперті на абсолютно жорсткі опори, досягає максимально можливого при даному числі опор значення. Передбачається, що поздовжня сила є постійною по довжині стержня. Пізніше задача Бубнова була узагальнена на стержні з довільним розподілом згинальної жорсткості і було встановлено, що одне і те ж саме максимальне значення критичної сили можна забезпечити при різних розподілах жорсткості (і матеріалу) між опорами, тобто зменшення жорсткості деяких з опор можливо компенсувати зростанням жорсткості інших. Таким чином, можна ставити задачу вибору серед нескінченної кількості систем опор, що забезпечують максимум критичної сили, такої, яка задовольняла б певним додатковим умовам. У статті пропонується простий прийом, який дозволяє обчислювати коефіцієнти жорсткості опор (включаючи кінцеві), які розв'язують узагальнену задачу Бубнова і при цьому знаходяться між собою в довільних наперед заданих відношеннях. Випадок, коли деякі з опор можуть бути абсолютно жорсткими, не виключається. Задача зводиться до обчислення найбільшого кореня алгебраїчного рівняння, ступінь якого дорівнює числу прогонів стержня. Цей корінь є власним значенням лінійної алгебраїчної задачі із симетричною тридіагональною матрицею. Для розв'язання таких задач існує багато ефективних прийомів, описаних в літературі. У статті наведено приклад, який ілюструє запропонований підхід і дозволяє зіставити отриманий результат зі знайденими раніше і описаними в літературі. Обґрунтування результатів роботи виконується з використанням якісних методів теорії стійкості стержневих систем, зокрема, теорем про вплив накладення в'язей на критичні сили.

Ключові слова: багатопрогновий стержень, стійкість, критична сила, максимум, якісні методи.

Bekshaev S.Ya.*Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture*

fevs@ogasa.org.ua ORCID: 0000-0002-5752-5321

Abstract. To increase the critical forces of the longitudinally compressed rod, additional elastic or absolutely rigid supports can be installed. I.G. Bubnov formulated and solved the following problem: to find the minimum value of the stiffness coefficient of identical intermediate hinge supports of a multi-span prismatic rod (the same for all supports) located at equal distances from each other, at which the main critical force of the rod, whose ends are hinged on absolutely rigid supports, gets the maximum possible value for a given number of supports. The longitudinal force is assumed to be constant along the length of the rod. Later, the Bubnov problem was generalized to rods with an arbitrary distribution of flexural stiffness and it was found that the same maximum value of the critical force can be got with different distributions of stiffness between the supports, i.e. reducing the stiffness of some of them may be offset by increasing the stiffness of others. You can set the task of choosing among an infinite number of support systems providing the maximum of the critical force, one that would satisfy various additional conditions. The article proposes a simple technique that allows one to calculate the stiffness coefficients of the supports (including the end ones) that solve the generalized Bubnov problem, which are in arbitrary predetermined relations among themselves. It does not exclude that some of the supports may be absolutely rigid. The problem reduces to calculating the largest root of an algebraic equation, the degree of which is equal to the number of spans of the rod. This root is an eigenvalue of a linear algebraic problem with a symmetric three-diagonal matrix. To solve such problems, there are many effective techniques described in the literature. The article provides an example that illustrates the proposed approach and allows you to compare the result obtained with results found earlier and described in the literature. The results of the work were obtained using qualitative methods of the theory of stability of rod systems, in particular, theorems on the effect of the imposition of constraints on critical forces.

Keywords: multi-span rod, stability, critical force, maximum, qualitative methods.

Стаття надійшла 30.05.2019