НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНИХ ПРОБЛЕМ
МЕХАНІКИ І МАТЕМАТИКИ
ІМ. Я. С. ПІДСТРИГАЧА

МАТЕМАТИЧНІ ПРОБЛЕМИ МЕХАНІКИ НЕОДНОРІДНИХ СТРУКТУР

ЗБІРНИК НАУКОВИХ ПРАЦЬ

ВИПУСК 5

ЛЬВІВ-2019

MATHEMATICAL PROBLEMS OF MECHANICS OF NONHOMOGENEOUS STRUCTURES

FIFTH ISSUE

Collection of scientific papers

Edited by
Academician of NAS of Ukraine R.M. Kushnir
and Corresponding Member of NAS of Ukraine H.S. Kit

L'viv – 2019

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ МЕХАНІКИ ТА ТЕРМОМЕХАНІКИ

УДК 531.383

ЕВОЛЮЦІЯ РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА ПІД ДІЄЮ НЕСТАЦІОНАРНОГО ВІДНОВЛЮЮЧОГО ТА ЗБУРЮЮЧОГО МОМЕНТІВ

Леонід Акуленко, Тетяна Козаченко, Дмитро Лещенко

Інститут проблем механіки РАН (Росія);

Одеська державна академія будівництва та архітектури (Україна)

gavrikov@ipmnet.ru; kushpil.t.a@gmail.com; leshchenko_d@ukr.net

Досліджуються збурені рухи динамічно симетричного важкого твердого тіла відносно нерухомої точки під дією відновлюючого та збурюючого моментів, які повільно змінюються з часом $\tau = \varepsilon t$, де t – час, а ε – малий параметр, що характеризує величину збурень ($\varepsilon \ll 1$). Рівняння руху мають вигляд:

$$
\begin{aligned}
&A\dot{p} + (C - A)\, qr = \mu(\tau)\sin\theta\cos\varphi + \varepsilon M_1, \\
&A\dot{q} + (A - C)\, pr = -\mu(\tau)\sin\theta\sin\varphi + \varepsilon M_2, \\
&C\dot{r} = \varepsilon M_3; \quad M_i = M_i(p, q, r, \psi, \theta, \varphi, \tau), \quad i = 1,2,3, \\
&\dot{\psi} = (p\sin\varphi + q\cos\varphi)\operatorname{cosec}\theta, \quad \tau = \varepsilon t, \\
&\dot{\theta} = p\cos\varphi - q\sin\varphi, \quad \dot{\varphi} = r - (p\sin\varphi + q\cos\varphi)\operatorname{ctg}\theta.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Тут $p,\ q,\ r$ – проекції вектора кутової швидкості на головні осі інерції тіла, εM_i $(i = 1,2,3)$ – проекції вектора збурюючого моменту на ці ж осі; $\psi,\ \theta,\ \varphi$ – кути Ейлера; A – екваторіальний, а C – осьовий момент інерції тіла. Припускається, що на тіло діє відновлюючий момент $\mu(\tau)$, який повільно змінюється з часом і є функцією, що диференціюється. Зокрема, при $\varepsilon = 0$ і відновлюючому моменті, незалежному від часу, система (1) описує рух у випадку Лагранжа.

Ставиться задача дослідження асимптотичної поведінки розв'язків системи (1) при значеннях малого параметра ε, відмінних від нуля, на досить великому інтервалі часу за допомогою метода усереднення.

Усереднення проводиться по фазі кута нутації за допомогою модифікованої процедури, викладеної в [2]. Після ряду перетворень перші три рівняння системи (1) мають вигляд:

$$\dot{G}_z = \varepsilon F_1(G_z, H, r, \tau, \theta), \quad F_1 = M_1^* \sin\theta + M_3^* \cos\theta,$$
$$\dot{H} = \varepsilon F_2(G_z, H, r, \tau, \theta), \quad F_2 = M_2^* + M_3^* r + \frac{d\mu(\tau)}{d\tau}\cos\theta, \qquad (2)$$
$$\dot{r} = \varepsilon F_3(G_z, H, r, \tau, \theta), \quad F_3 = C^{-1} M_3^*,$$

де G_z – проекція вектора кінетичного моменту на вертикаль, H – повна енергія тіла, r – проекція вектора кутової швидкості на вісь динамічної симетрії. Для можливості застосування методу усереднення праві частини системи (2) мають бути 2π-періодичними функціями по фазі кута нутації θ, а також повинні бути виконані необхідні і достатні умови, що накладаються на збурюючі моменти:

$$M_1 \sin\varphi + M_2 \cos\varphi = M_1^*, \; M_1 p + M_2 q = M_2^*, \; M_3 = M_3^*,$$
$$M_i^* = M_i^*(G_z, H, r, \tau, \theta), \; i = 1,2,3.$$

Систему рівнянь (2) після ряду перетворень, заміни змінних приводимо до усередненої системи рівнянь першого наближення.

Як приклад запропонованої методики розглянуто збурений рух тіла, близький до випадку Лагранжа, під дією зовнішнього середовища. Збурюючі моменти мають вигляд:

$$M_1 = -a(\tau)p, \quad M_2 = -a(\tau)q, \quad M_3 = -b(\tau)r; \; a(\tau), \; b(\tau) > 0,$$

де $a(\tau)$, $b(\tau)$ – інтегровані функції, що залежать від властивостей середовища і форми тіла.

Усереднена система проінтегрована чисельно для $\tau \geq 0$ при різних початкових умовах і параметрах задачі. Повна енергія тіла, проекція вектора кінетичного моменту на вертикаль та кутова швидкість обертання відносно осі динамічної симетрії монотонно спадають. Повна енергія спадає, асимптотично наближаючись до значення $H = -0.5$. Під дією нестаціонарних дисипативного і відновлюючого моментів тіло прагне до стійкого нижнього положення рівноваги швидше, ніж у розглянутих раніше випадках [1, 2].

1. *Akulenko L.D. Zinkevich Ya.S., Kozachenko T.A., Leshchenko D.D.* The evolution of the motions of a rigid body close to the Lagrange case under the action of an unsteady torque // J. Appl. Math. Mech. – 2017. – **81**, № 2. – P. 79-84.
2. *Chernousko F.L., Akulenko L.D., Leshchenko D.D.* Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass. – Cham: Springer, 2017. – 241 p.

THE EVOLUTION OF THE MOTIONS OF A RIGID BODY UNDER THE ACTION OF UNSTEADY RESTORING AND PERTURBATION TORQUES

We investigate the perturbed motion of a rigid body, close to Lagrange's case, under the influence of slowly time varying perturbation and restoring torques.