

ВЛИЯНИЕ ПРОЦЕССОВ РАЗРУШЕНИЯ НА НЕСУЩУЮ СПОСОБНОСТЬ И ДЕФОРМАЦИИ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ

Мазуренко Л.В. (Одесская государственная академия строительства и архитектуры)

Рассмотрено влияние процессов разрушения для плоских рам и статически-неопределимых балок лишь при учете напряженного состояния, вызванного изгибающими моментами.

Анализ влияния процессов разрушения проведем в "классической" схеме расчетов рам и балок за пределами упругости. Все выкладки, приведенные в статье, справедливы лишь для идеального тела Прандтля и направлены на выяснение необходимости гипотезы о бесконечности деформаций. В качестве иллюстрации рассматривается балка прямоугольного сечения из материала с обрывающейся диаграммой σ - ϵ .

Как обычно постулируется справедливость гипотезы плоских сечений. В процессе деформирования балка проходит стадии, показанные на рис. 1

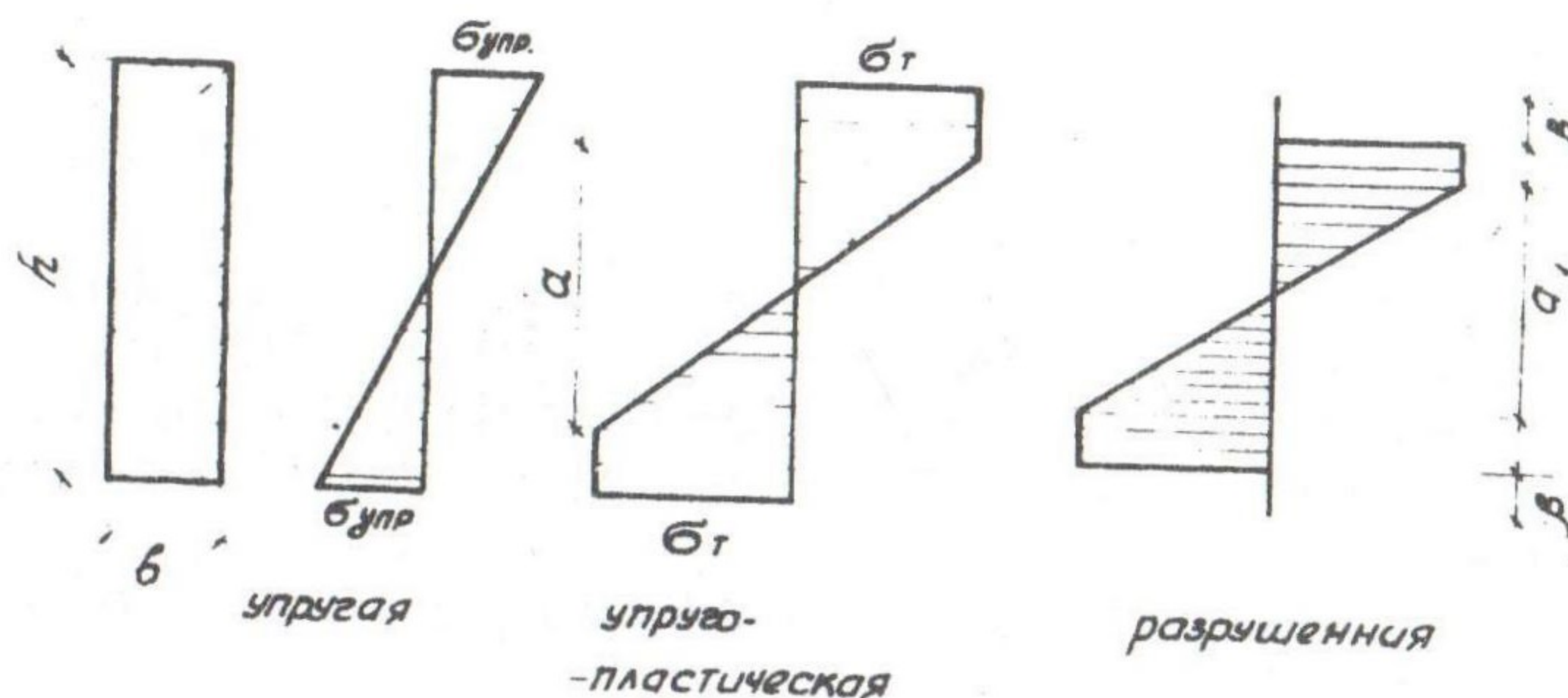


Рис. 1 Стадии работы балки

Уравнения связи момента и кривизны для упругой и упруго-пластической стадий известны [1].

Для малых деформаций $y'' = K$.

В упругой стадии:

$$K = \frac{M}{EI} = \frac{12M}{bh^3E}; M = \frac{Ebh^3}{12} K \quad (1)$$

То есть, график М-К – прямая, проходящая через начало координат.

В упруго-пластической стадии

$$K = \frac{2\varepsilon_1}{h} = \frac{2\sigma_T}{Ea}; a = \frac{2\sigma_T}{EK} \quad (2)$$

Здесь ε_1 - относительное удлинение крайнего волокна упругого ядра, а - высота его.

Условие равновесия внутренних и внешних сил:

$$M = \frac{bh\sigma_T}{2} \cdot \frac{h}{2} - \frac{ba\sigma_T}{4} \cdot \frac{a}{3}$$

Используя (2), имеем:

$$M = \frac{b\sigma_T h^2}{4} - \frac{b\sigma_T^3}{3E^2 K^2} \quad (3)$$

Зависимость (3) является исходной для вывода уравнения М-К при разрушении и справедлива до $\varepsilon = \varepsilon_{крит}$,

где $\varepsilon_{крит}$ - относительное удлинение перед обрывом волокон.

Это соответствует кривизне $K_{крит} = \frac{2\varepsilon_{крит}}{h}$

При идущем процессе обрыва волокон высота сечения стала равной $h - 2\beta$.

Формула (3) справедлива для сечения высотой $h - 2\beta$:

$$M = \frac{b\sigma_T}{4} (h - 2\beta)^2 - \frac{b\sigma_T^3}{3E^2 K^2} \quad (4)$$

Исходя из гипотезы плоских сечений, получаем:

$$\frac{\varepsilon_{крит}}{h - 2\beta} = \frac{\varepsilon_T}{a_1}$$

Значение a_1 получается по аналогии с (2)

$$a_1 = \frac{2\sigma_T}{EK}$$

Тогда

$$h - 2\beta = \frac{\varepsilon_{\text{крит}}}{\varepsilon_T} \cdot \frac{2\sigma_T}{EK} \quad (5)$$

Подставляя (5) в (4), получим окончательно:

$$M = \frac{b\sigma_T}{K^2} \left(\varepsilon_{\text{кр}}^2 - \frac{\varepsilon_T}{3} \right) \quad (6)$$

Непрерывный переход при деформации из одной стадии в другую обеспечивает непрерывность кривой М-К.

Экстремум у функций (4) и (6) отсутствует. Это означает, что его следует искать среди граничных точек для (4) и (6). Простейшие вычисления показывают, что точкой максимума \overline{M} является граница упруго-пластической стадии и стадии разрушения, что отвечает

$$K_{\text{крит}} = \frac{2\varepsilon_{\text{крит}}}{h}$$

Из (4) и (6) при $K=K_{\text{крит}}$ находим:

$$M_{\text{max}} = \frac{bh^2}{4} \sigma_T \left[1 - \frac{\varepsilon_T^2}{3\varepsilon_{\text{крит}}^2} \right]$$

График зависимости М-К приведен на рис. 2

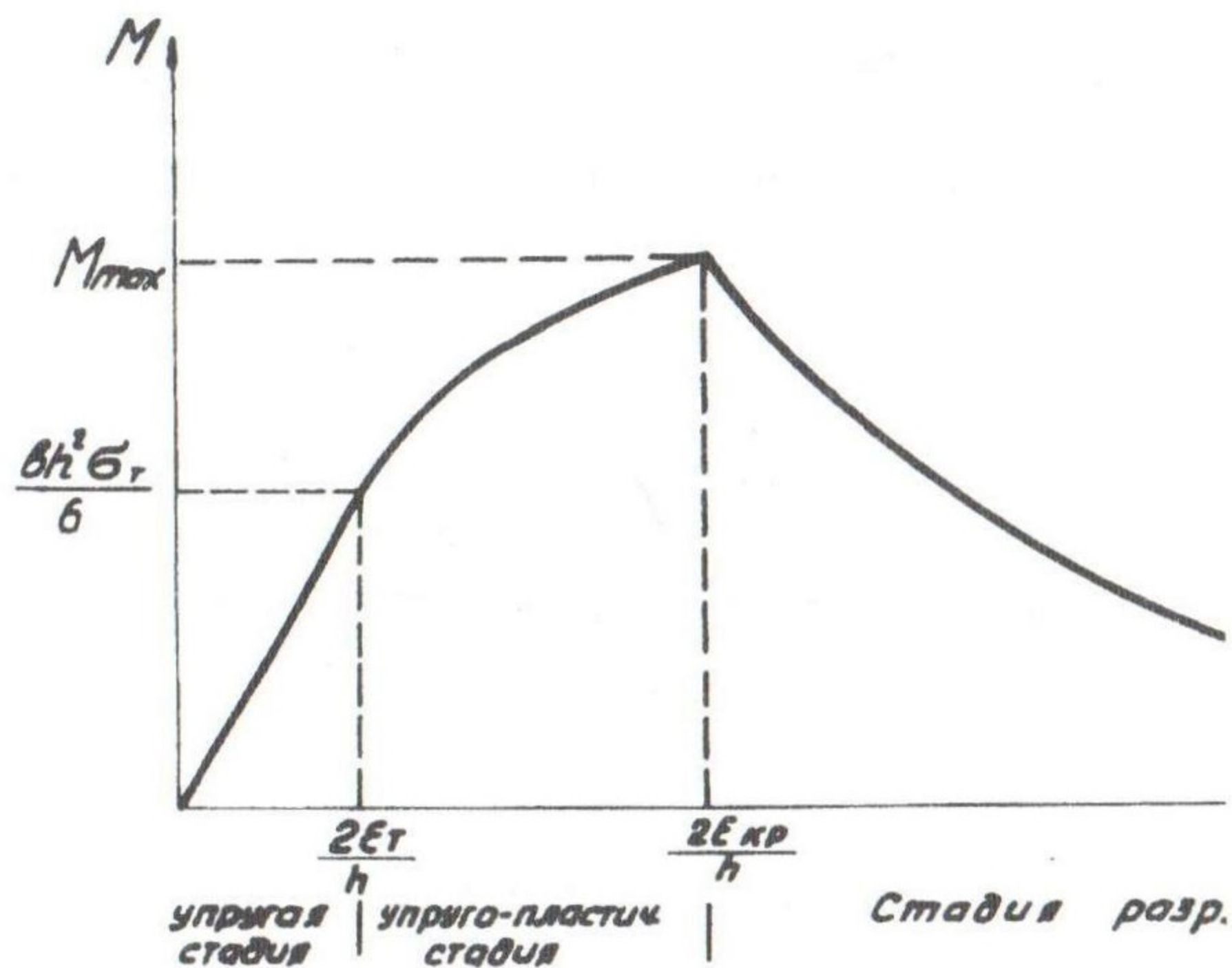


Рис. 2 График М-К для балки прямоугольного сечения

В качестве примера расчета рассмотрим балку, изображенную на рис. 3.

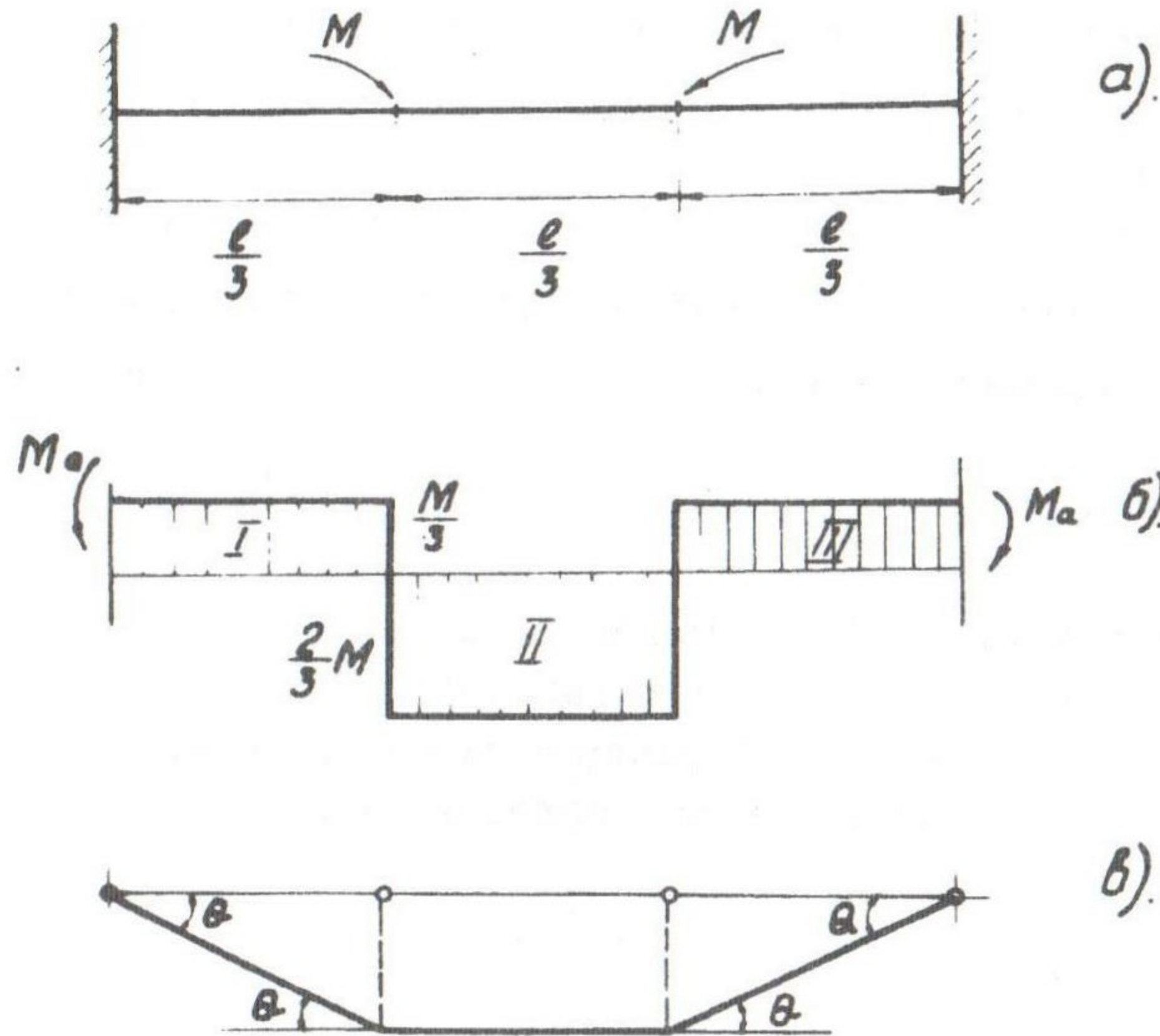


Рис. 3 Балка, рассчитанная с учетом эффекта разрушения

- а) схема балки
- б) эпюра моментов
- в) механизм разрушения

Эпюру моментов в упругой стадии можно получить, используя [2]. Можно показать, что упруго-пластическая стадия и стадия разрушения наступают раньше на II-м участке балки.

В любой стадии работы балки, ввиду симметрии нагрузок и конструкции, форма эпюры моментов остается такой же, как в упругой стадии.

Уравнения моментов:

На I участке $M_{(x)} = -M_a$

На II участке $M_{(x)} = -M_a + M$

На III участке $M_{(x)} = -M_a$

При обычной методике расчета по предельным состояниям (гипотеза пластических шарниров) механизм разрушения будет иметь вид, показанный на рис. 3в.

По принципу возможных перемещений

$$4M_0\theta = 2M\theta; M = 2M_0, \text{ где}$$

M_0 - пластический момент балки, а M - действующий момент.

Определим несущую способность этой же балки, используя исходящую ветвь М-К.

Предельное состояние для такой балки можно выразить, $M_0 = -M_0$ ибо для обычных конструктивных материалов (сталь, сплавы) с одинаковой прочностью на сжатие и растяжение отношение

$$\frac{\varepsilon_T^2}{3\varepsilon_{\text{крит}}^2} \text{ крайне мало по сравнению с 1 и } M_{\text{max}} \simeq M_0.$$

При этом участок II уже подвергается разрушению. Отметим, что из постоянства моментов на участках I, II и III вытекает и постоянство их кривизн, т.е. кривые деформации на участках являются окружностями. Тогда из (6) на II участке в предельном состоянии:

$$K = \sqrt{\frac{b\sigma_T \left(\varepsilon_{\text{крит}}^2 - \frac{\varepsilon_T^2}{3} \right)}{-M_0 + M}}$$

На I участке $M_{(x)} = -M_{\text{max}}$ и кривизна равна $y'' = -\frac{2\varepsilon_{\text{кр}}}{h}$

$$\text{Отсюда } y' = -\frac{2\varepsilon_{\text{крит}}}{h}x + c_1$$

При $x = 0$; $y' = 0$ и $c_1 = 0$

$$\text{При } x = \frac{l}{3}; y' = -\frac{2\varepsilon_{\text{крит}}}{h} \cdot \frac{l}{3}$$

Уравнение углов поворота на II-м участке:

$$y' = \sqrt{\frac{b\sigma_T \left(\varepsilon_{\text{крит}}^2 - \frac{\varepsilon_T^2}{3} \right)}{-M_0 + M}} \cdot x + c_2$$

Граничные условия: при $x = \frac{l}{3}$; $y' = -\frac{2}{3}\varepsilon_{\text{крит}} \cdot \frac{l}{h}$ и

$$c_2 = -\frac{2}{3}\varepsilon_{\text{крит}} \frac{l}{h} - \sqrt{\frac{b\sigma_T \left(\varepsilon_{\text{крит}}^2 - \frac{\varepsilon_T^2}{3} \right)}{-M_0 + M}} \cdot \frac{l}{3};$$

$$y' = -\frac{2}{3}\varepsilon_{\text{крит}} \frac{l}{h} + \sqrt{\frac{b\sigma_T \left(\varepsilon_{\text{крит}}^2 - \frac{\varepsilon_T^2}{3} \right)}{-M_0 + M}} \left(x - \frac{l}{3} \right)$$

Симметрия конструкции и нагрузок приводит к выполнению при $x = \frac{l}{2}$ условия совместности деформаций $y' = 0$

$$\frac{2}{3}\varepsilon_{\text{крит}} \frac{l}{h} + \sqrt{\frac{b\sigma_T \left(\varepsilon_{\text{крит}}^2 - \frac{\varepsilon_T^2}{3} \right)}{-M_0 + M}} \cdot \frac{l}{6} = 0$$

Отсюда

$$-M_0 + M = \frac{b\sigma_T \left(\varepsilon_{\text{крит}}^2 - \frac{\varepsilon_T^2}{3} \right) h^2}{16\varepsilon_{\text{крит}}^2} = \frac{M_0}{4}$$

$M = \frac{5}{4}M_0$, что меньше предельной нагрузки, полученной обыч-

ным методом.

В принятой нами схеме разрушения понижение момента в сечении оказывается возможным лишь при разрушении его волокон. Тут инвариантность деформаций и несущей способности от вида нисходящей ветви М-К будет совпадать с их инвариантностью относительно процесса разрушения [3]. Рассмотрение воздействия только изгибающего момента означает, что вопросы устойчивости и ее влияния не учитываются.

Это приводит к невозможности смены форм равновесия скачком. Форма равновесия при увеличении нагрузки сохраняется неизменной, благодаря чему деформации ее точек непрерывно возрастают. Докажем это положение. Жесткость сечения определяется на всех стадиях жесткостью его упругого ядра. Так как высота его последовательно

уменьшается, то и жесткость уменьшается. Общеизвестно, что упруго-пластическая работа материала начинается в сечениях с наибольшими напряжениями. Жесткость их падает. Но из теории расчета балок с переменной жесткостью следует большая деформативность менее жестких сечений. Поэтому M_{\max} на диаграмме М-К достигается раньше в этих сечениях и в них при дальнейшем деформировании начинается работа на нисходящей ветви М-К. В рамах и статически неопределенных балках в зависимости от их схемы и жесткости замыкающих элементов возможны два случая:

- 1) опорная экстремальность моментов в элементе;
- 2) пролетная экстремальность. Пусть ширина участка, где сечения находятся в стадии работы на нисходящей ветви М-К, равна μ . Из доказанного выше вытекает непрерывность перехода всех стадий работы сечений друг в друга по длине балки.

Но это означает, что момент в пределах μ -участках нарастает. Подобное преобразование эпюры моментов эквивалентно приложению распределенных и сосредоточенных сил, которые отсутствуют в статической схеме (это справедливо лишь при соблюдении равновесия). Полученное противоречие означает, что протяженность μ -участка равна нулю и на нисходящей ветви М-К могут работать лишь отдельные сечения. Так как условия совместности деформаций – это уравнения относительно углов поворота и прогибов, а для их получения необходимо интегрирование, то уравнение μ -участка в них не фигурируют (длина его равна нулю).

Это означает, что деформации любой точки не зависят от вида нисходящей ветви.

Для каждой рамы или балки существуют "характерные" перемещения Δ , быстро возрастающие при переходе конструкции в предельное состояние.

Перемещения вдоль стоек рамы не являются характерными ввиду пренебрежения нормальными силами.

В качестве характерных могут быть приняты:

- 1) горизонтальные перемещения ригелей;
- 2) перемещения под сосредоточенными силами (распределенные нагрузки заменяются силами).

Для нахождения несущей способности к уравнениям совместности деформаций должно быть присоединено предельное условие. Из отмеченной выше невозможности смены форм равновесия скачком вытекает непрерывность функции $v=f(\Delta)$.

Предельное условие – это условие максимума v .

Для случая гладкой кривой $v=f(\Delta)$ оно может иметь вид:

$$\frac{dv}{d\Delta} = 0$$

Для кривой с точкой перелома оно отвечает точке, где первая производная функции $f(\Delta)$ терпит разрыв.

Δ – для любого значения v не зависит от вида нисходящей ветви, ибо для любого v оно определяется из условия совместности деформаций, т.е. $\Delta = \varepsilon(v)$ и $v=f(\Delta)$ – не зависит от вида нисходящей ветви, но тогда от него не зависит и предельное условие.

Итак, все уравнения (уравнение совместности деформаций и предельное условие) не зависят от вида нисходящей ветви М-К, значит и предельная нагрузка не зависит от него. Очевидно, приведенное выше рассуждение о том, что длина μ -участка равна нулю несправедливо, если моменты на отдельных участках балки постоянны.

Приведенный элементарный пример подтверждает это численно.

Подводя итог исследованиями, приведенными в статье, можно отметить следующие:

1. Показана возможность получения диаграмм с нисходящей ветвью М-К.
2. Дан пример, показывающий существенность этого фактора.
3. Показано, что в практически наиболее важных случаях (кроме случая с постоянными моментами на участках) гипотеза о "бесконечности" деформаций в идеальном теле не является необходимой.

Литература

1. Ржаницын А.Р. Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов. Госстройиздат. Москва. 1964
2. Справочник проектировщика. Расчетно-теоритический. 1960.
3. Черноморниипроект. Отчет по теме НИР "Совершенствование конструкций портовых гидротехнических сооружений и методов их расчета". Одесса, 1966.