УДК 627.824.2/.3:624.131.6

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ТЕМПЕРАТУРНОЙ ВОЛНЫ ФИЛЬТРИРУЮЩИМСЯ ПОТОКОМ В ТЕЛЕ ЗЕМЛЯНОЙ ПЛОТИНЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЗАКОНОМЕРНОСТИ МЕЖДУ ТЕМПЕРАТУРОЙ ПОТОКА В ДАННОЙ ТОЧКЕ И СКОРОСТЬЮ ФИЛЬТРАЦИИ.

Анисимов К.И., Дмитриев С.В. *(Одесская государственная академия строительства и архитектуры, кафедра гидротехнических сооружений и гидромелиорации, НИЛ обследования и экспериментального проектирования конструкций зданий и сооружений объектов гидротехнического и гидромелиоративного строительства, Украина)*

Основной задачей данной работы является, установление теоретической закономерности между температурой потока фильтрующегося через тело земляной плотины, в данной точке и скоростью фильтрации. Работа включает в себя постановку задачи, определение граничного условия и решение дифференциального уравнения, описывающего изучаемый процесс, а также математический анализ полученного решения.

Основной задачей данной работы является, установление теоретической закономерности между температурой потока фильтрующегося через тело земляной плотины, в данной точке и скоростью фильтрации. В первую очередь установим дифференциальное уравнение, описывающее изучаемый процесс, и определим граничные условия для этого уравнения. Итак, в верхнем бьефе происходят колебания температуры воды. Образуемая таким образом температурная волна распространяется в тело плотины, что обуславливается двумя факторами: фильтрацией воды в грунте, слагающем сооружение и теплопроводностью последнего. Такой характер распространения тепла соответствует конвективному теплообмену. В рамках данной работы ограничимся линейной постановкой задачи и, полагая скорость фильтрации постоянной, запишем:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial T}{\partial x} u_x \, , \tag{1}$$

где T – функция изменения температуры, $T = f(\tau, x)$;

τ – время;

x – продольная координата (см. рис.1);

u_x – скорость фильтрации в проекции на ось X, $u_x = const$;

a – коэффициент температуропроводности водонасыщенного грунта тела плотины, $м^2/сут$.

Граничным условием в данном случае является уравнение колебаний температуры воды в верхнем бьефе. Строго говоря, в естественных условиях эти колебания не являются гармоническими и носят нестационарный пульсирующий характер и здесь можно отмечать лишь общую закономерность периодического изменения температуры от минимальных значений зимой до максимальных – летом. На практике в результате наблюдений мы получаем дискретное множество точек, определяющих зависимость $T_i(\tau_i)$. Соединяя соседние точки отрезками прямых, получаем график, характеризующий такие колебания. Предварительно для этой функции должно быть дано аналитическое описание.

Мы будем говорить о получении тренда (функция, аппроксимирующая исходную дискретную зависимость $T_i(\tau_i)$ в виде):

$$\overline{T}(\tau) = A\cos(\sigma\,\tau + \omega) + T_0 \qquad (2),$$

где: A – амплитуда колебаний, °С;

σ – циклическая частота; $\sigma = \dfrac{2\pi}{365}$, $сут^{-1}$;

ω – начальная фаза, $\omega = \dfrac{2\pi}{365}\tau_0$,

где: τ_0 – сдвиг по фазе от начала координат, сут.;

T_0 – среднегодовая температура воды в верхнем бьефе, °С.

Например, такой тренд был получен при аппроксимации графика колебания температур в верхнем бьефе Рижской ГЭС (см. рис.2).

Относя начало координат в точку (-ω, 0), с точностью до константы запишем уравнение (2) в виде:

$$\overline{T}(\tau) = A\cos(\sigma\,\tau) \qquad (3)$$

Эта упрощенная запись окончательно определяет граничное условие.

Решение уравнения (1) с граничным условием (3) будем искать как функцию комплексных переменных. Такой подход упрощает решение и представляет его в более общем виде. В дальнейшем из полученного решения выделяется действительная часть. Общий вид искомого решения:

$$T(x,\tau) = A\,e^{\alpha x + \beta\tau} \qquad (4)$$

где: α и β – комплексные коэффициенты.

Рис. 1: РАСЧЕТНАЯ СХЕМА К ЗАДАЧЕ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА В ТЕЛЕ ЗЕМЛЯНОЙ ПЛОТИНЫ

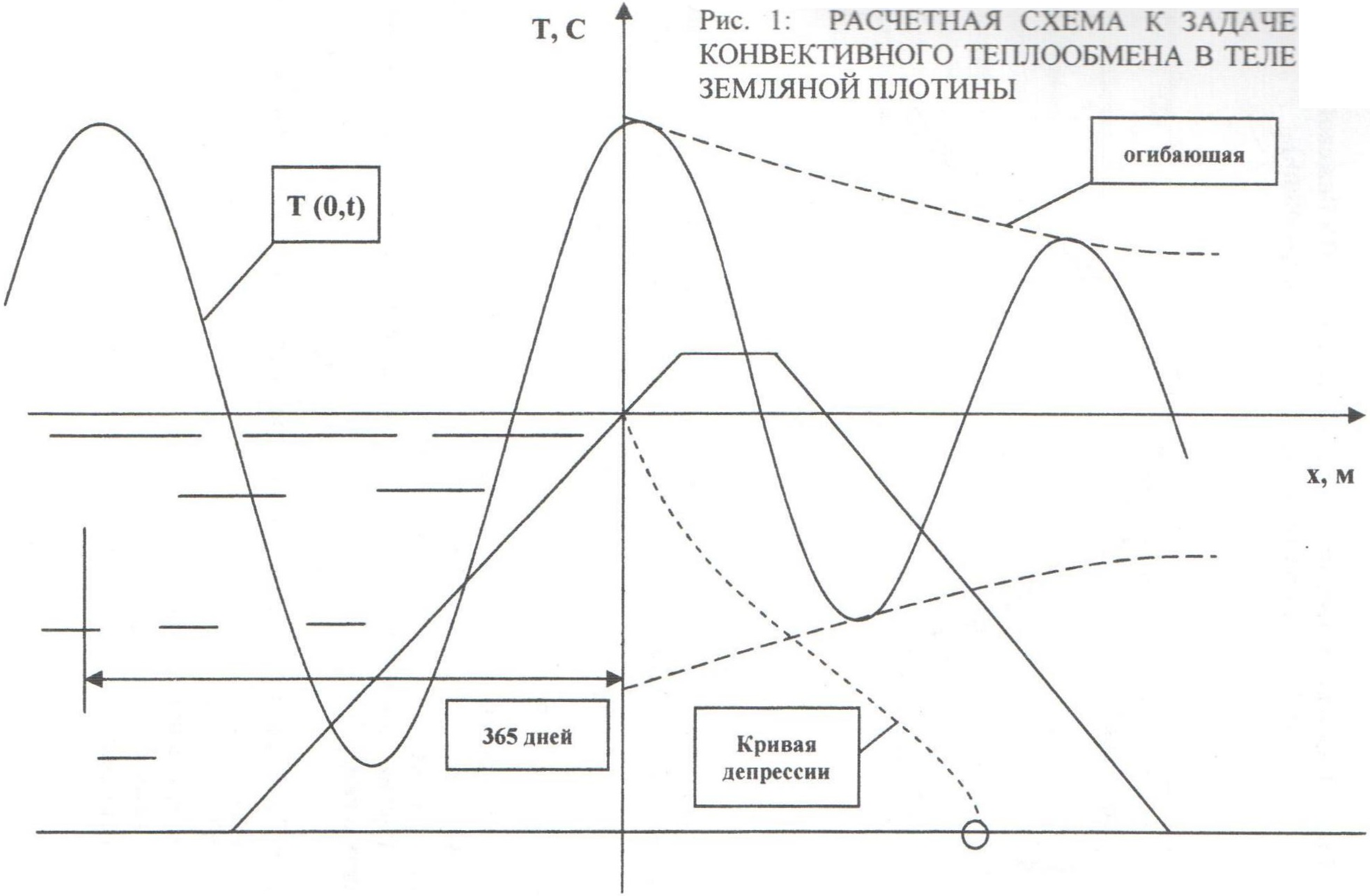
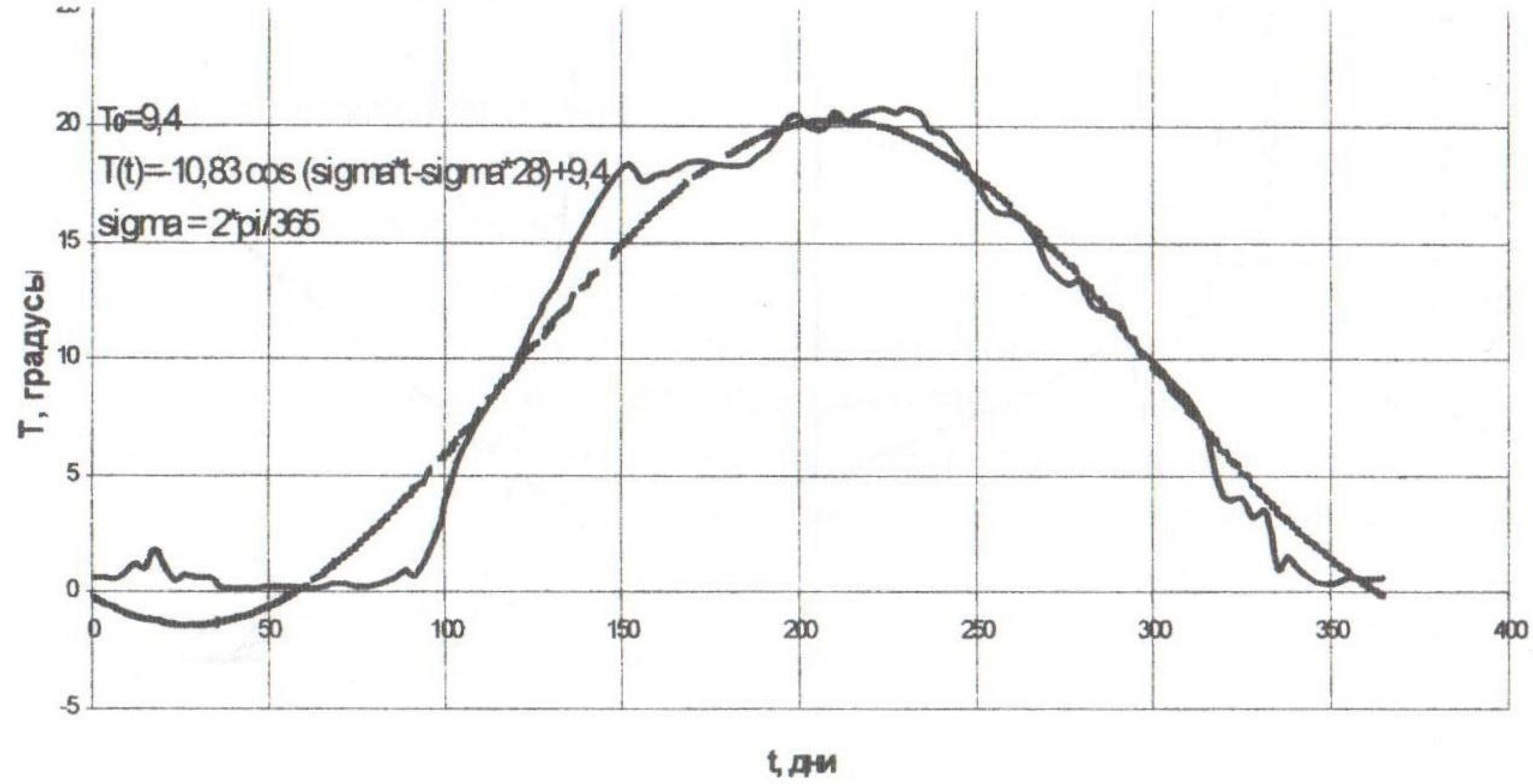


Рис.2. Графики колебания температуры воды в ВБ Рижской ГЭС, 1983 г. (действительный и аппроксимирующий)



Граничное условие (функция колебания температуры воды в верхнем бьефе), принимая во внимание сделанное замечание, примет вид:

$$T(0,\tau) = A\,e^{i\,\sigma\,\tau} = A\left[\cos(\sigma\, i) + i\sin(\sigma\, i)\right] \qquad (5)$$

где: σ – циклическая частота; $\sigma = \dfrac{2\pi}{P}$, сек$^{-1}$; (P – сезонный период колебаний температуры воды в верхнем бьефе, сек).

Отметим, что если в функции (5) выделить действительную часть получим уравнение, аналогичное уравнению (3).

Примечание: строго говоря, искомую функцию необходимо записать в виде:

$$T(x,\tau) = T_0 + \Delta T(x,\tau),$$

где: T_0 = const (в нашем случае среднегодовая температура воды в верхнем бьефе);

$\Delta T(x, \tau)$ – функция колебания температуры около значения T_0, которую записали как $T(x, \tau)$.

Таким образом, будем искать функцию $T(x, \tau)$ с точностью до T_0.

Решение уравнения (4) было получено в виде:

$$T(x,\tau) = A\,e^{-Kx}\cos(\sigma\tau - cx),$$

где: $K = \frac{1}{2a}\left[\sqrt{\frac{r + U_x^2}{2}} - U_x\right]$ – декремент затухания (K>0),

$$c = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{r + U_x^2}{2}}$$ – циклическая частота колебаний по x,

$$r = \sqrt{U_x^4 + 16\,a^2\,\sigma^2}\ .$$

Таким образом, полученная функция T(x, τ) описывает колебания температуры в двухфазной среде тела плотины (вода – твердая составляющая) как затухающие с декрементом K, и циклическими частотами: по времени τ – σ и по координате x – c, при любых положительных x, τ и не отрицательном U_x при колебаниях температуры воды в верхнем бьефе по зависимости:

$$\operatorname{Re} T(0, \tau) = A\cos(\sigma\tau) \tag{6}$$

Учитывая сделанное примечание, решение получаем с точностью до константы. В действительности:

$$T(0, \tau) = A\cos(\sigma\tau) + T_0 \tag{7}$$

$$\operatorname{Re} T(x, \tau) = A\,e^{-Kx}\cos(\sigma\tau - cx) + T_0 \tag{8}$$

где: T_0 – среднегодовая температура воды в верхнем бьефе.

Как видно, полученное уравнение является достаточно сложным, и отыскание его аналитического решения относительно U_x представляет собой значительные трудности (при попытке осуществления такого решения мы приходим к кубическому уравнению, отягощенному громоздкими коэффициентами). В этой связи, такой подход представляется нецелесообразным, и для решения этой задачи была написана программа. Работа с программой осуществляется в следующей последовательности: вводятся параметры функции, описывающей граничные условия (амплитуда колебаний A, циклическая частота σ), затем вводятся коэффициент температуропроводности a, время τ, координата x, точки наблюдений. Затем компьютер осуществляет перебор практически возможных скоростей фильтрации U_x (в интервале от 0 до 20 м/сут.) и принимает в качестве расчетного значения то из них, при котором температура T, рассчитанная по (6) менее всего отличается от действительного (вводимого) значения T. Перебор значений U_x осуществляется дискретно, с шагом 0,01 м/сут.

Ввиду вышеизложенного можно отметить, что с помощью разрабатываемого метода можно определять, в известной степени, локальные изменения U_x, при известных значениях температуры в пьезометрах грунтовых сооружений. Это обстоятельство придает рассматриваемому методу исследования фильтрации определенную практическую ценность и позволяет говорить о возможности выявления фильтрационных неоднородностей, постоянного мониторинга фильтрационных процессов и прогнозирования положения уровня грунтовых вод в наблюдаемом грунтовом массиве.

Разработке предметных критериев применимости метода, безусловно, должен предшествовать всемерный анализ большого комплекса лабораторных и натурных наблюдений с широким спектром изменяемых и измеряемых величин.

Литература

1. М. Маскет. «Течение однородных жидкостей в пористой среде», гос. научно-техническое издательство нефтяной и топливной литературы, 1949 г.
2. Г. Корн, Т. Корн, «Справочник по математике для научных работников и инженеров», Наука, 1978 г.
3. В.И. Аравин, О.Н. Носова «Натурные исследования фильтрации», Энергия, 1969 г.
4. В.И. Аравин, С.Н. Нумеров, «Фильтрационные расчеты гидротехнических сооружений, 2-е издание», гос. издательство литературы по строительству и архитектуре, 1955 г.