А. О. ПЕРПЕРІ, В. П. БРЕДНЬОВА,
В. В. ДУМАНСЬКА, В. С. МАРЧЕНКО

ІНЖЕНЕРНА ГРАФІКА

Навчальний посібник

з нарисної геометрії
для студентів спеціальностей:
192 «Будівництво та цивільна інженерія»,
133 «Галузеве машинобудування»

Одеса 2018
УДК 514.18(075)

П 27

Рекомендовано до друку Вченою Радою
Одеської державної академії будівництва і архітектури
(протокол № від 2018 р.)

П 27 **Перпері А. О.**
Інженерна графіка. Навчальний посібник з нарисної геометрії / А. О. Перпері, В. П. Бредньова, В. В. Думанська, В. С. Марченко. – Одеса : ОДАБА, 2018. – 220 с.
ISBN

Автори:
А. О. Перпері, завідувач кафедри нарисної геометрії та інженерної графіки Одеської державної академії будівництва та архітектури, кандидат технічних наук, доцент;
В. П. Бредньова, професор кафедри нарисної геометрії та інженерної графіки Одеської державної академії будівництва та архітектури, кандидат технічних наук;
В. В. Думанська, доцент кафедри нарисної геометрії та інженерної графіки Одеської державної академії будівництва та архітектури, кандидат технічних наук;
В. С. Марченко, професор кафедри нарисної геометрії та інженерної графіки Одеської державної академії будівництва та архітектури, кандидат технічних наук.

Рецензенти:
Іванова Л. О. – завідувач кафедри інженерної графіки та технічного дизайну Одеської національної академії харчових технологій, доктор технічних наук, професор;
Усов В. В. – завідувач кафедри технологічної і професійної освіти Південноукраїнського національного педагогічного університету імені К.Д.Ушинського, доктор фізико - математичних наук, професор.

Навчальний посібник підготовлений відповідно до програми з дисципліни «Інженерна графіка», яка викладається студентам спеціальностей: 192 «Будівництво та цивільна інженерія», 133 «Галузеве машинобудування».

У посібнику освітлені найважливіші теоретичні положення за всіма розділами дисципліни: метод ортогонального проекціювання, позиційні та метричні властивості геометричних об'єктів, проекції з числовими позначками, побудова розгорток поверхонь, аксонометричні проекції, основи теорії тіней та перспективи. Наведені численні приклади розв'язання конструктивних і прикладних задач, питання для самоконтролю знань, а також в Додатках міститься стислий історичний огляд виникнення та розвитку нарисної геометрії, перелік зразкових питань для іспиту та Термінологічний словник.

Навчальний посібник буде корисним як студентам будівельних спеціальностей, так і тим, хто бажає самостійно засвоїти дисципліну «Інженерна графіка» та придбати стійкі навички графічної культури.

УДК 514.18(075)

П 27

ISBN

ЗМІСТ

ВСТУП

Нарисна геометрія – це математична наука, що вивчає оточуючі трьохвимірні об'єкти за допомогою плоских зображень. Нарисна геометрія повинна розвинути просторове уявлення студента, надати теоретичну основу геометричному моделюванню з використанням сучасної комп'ютерної техніки, а також навчити обґрунтуванню засобів побудови креслень, які є графічними моделями конкретних інженерних деталей, виробів, конструкцій, будівель. «Нарисна геометрія» є першим **базовим** розділом дисципліни **«Інженерна графіка»,** яка відіграє значну роль в формуванні інженера-будівельника та архітектора-проектувальника, тому що вона навчає майбутнього фахівця образно сприймати навколишнє середовище.

В результаті вивчення дисципліни студенти повинні знати:

- у чому полягає предмет і метод нарисної геометрії;
- які положення можуть займати точка, пряма, площина;
- основи теорії параметризації поверхонь та способи їх утворення, багатогранники та криві поверхні;
- дві групи задач нарисної геометрії – позиційні та метричні, перетин багатогранників та кривих поверхонь з прямою, площиною та між собою;
- основні способи перетворення комплексного креслення;
- основні аксонометричні системи;
- основи теорії тіней в прямокутних проекціях та перспективи;
- що є комп'ютерна графіка, її можливості, алгоритми формування зображень, загальна структура та можливості системи T-FLEX Cad або Auto Cad.

На основі набутих знань студенти повинні вміти:

- зображати основні геометричні фігури в прямокутних та в різних аксонометричних проекціях;
- розв'язувати позиційні задачі на взаємну належність та перетин геометричних фігур;

- розв'язувати метричні задачі на визначення відстаней, кутів та площин;

- знаходити точки та лінії перетину багатогранників і кривих поверхонь з прямою, площиною та між собою;

- будувати розгортки граних та кривих поверхонь;

- виконувати креслення предметів за правилами і вимогами державних стандартів;

- користуватися засобами введення-виведення графічної інформації при роботі з комп'ютером;

Поточний контроль здійснюється за допомогою усного опитування, опитувальних аркушів та аудиторних самостійних робіт. Крім цього, кожний студент повинен виконати чотири контрольні роботи та розрахунково-графічну роботу, що оформлюються у вигляді **Альбому креслень**, який супроводжується титульним листом та пояснювальною запискою до розрахунково-графічної роботи. Завдання виконуються за індивідуальними варіантами, що визначаються викладачем або за останньою цифрою у номері залікової книжки студента. До виконання графічних завдань на форматах рекомендується приступати після детального вивчення відповідної теми**,** тобто після придбання необхідних теоретичних знань та графічних навичок.

Підсумковий контроль передбачає іспит у письмовій формі за білетами та усне опитування за програмою дисципліни.

Таблиця 1

ОСНОВНІ СИМВОЛИ ГЕОМЕТРИЧНОЇ МОВИ

№ п/п	Символи	Позначення
1	**Π_1, Π_2, Π_3**	Основні площини проекцій: горизонтальна, фронтальна та профільна
2	**Π_4, Π_5, Π_6**	Додаткові площини проекцій
3	***x, y, z***	Координатні осі: абсцис, ординат, аплікат
4	**O**	Точка **O** – початок координат
5		Позначення точок:
	A, B, C, D…	великі літери латинської абетки
	1, 2, 3,…I, II	арабські або римські цифри
6		Лінії в просторі (рядкові літери латинської абетки)
	a, b, c, d, l	Прямі
	k, n, g	Криві
	m	Коло
	h	горизонтальна пряма рівня
	f	фронтальна пряма рівня
	p	профільна пряма рівня
7	**Σ, Г, Λ… Ф, Θ, Ω…**	Площини, поверхні (великі грецькі літери)
8		Проекції образів позначаються тими ж літерами (або цифрами) із вказівкою індексу:
	A_1, B_1,…1_1, I_1…	горизонтальні проекції точок
	A_2, B_2,…1_2, I_2…	фронтальні проекції точок
	A_3, B_3,…1_3, I_3…	профільні проекції точок
	a_1, b_1,…l_1	горизонтальні проекції ліній
	a_2, b_2,…l_2	фронтальні проекції ліній
	a_3, b_3,…l_3	профільні проекції ліній
	Γ_1, Σ_1,…Φ_1…	горизонтальні проекції площин, поверхонь
	Γ_2, Σ_2,…Φ_2…	фронтальні проекції площин, поверхонь
	Γ_3, Σ_3,…Φ_3…	профільні проекції площин, поверхонь
	$\|(AB)\|$, $\|\Delta(ABC)\|$	натуральна величина відрізка **(AB)**, площини **Δ(ABC)**
	$\| l\,^{\Lambda}\, \Pi_1 \|$, $\| \varphi \|$	натуральна величина кута
	$\| A, a \|$	натуральна величина відстані від точки **A** до прямої ***a***
	$\| a \parallel b \|$	натуральна величина відстані між паралельними прямими ***a*** та ***b***

Продовження табл. 1

	П′	площина проекцій при побудові аксонометричних і перспективних зображень
	$\mathbf{П_0}$	площина проекцій в методі проекцій з числовими відмітками (позначками)
	$\mathbf{A'_1, A'_2 \ldots} \boldsymbol{a'_1, a'_2}$	вторинні проекції об’єктів проекціювання
	$\mathbf{A_{10}, B_{25}, C_0}$	проекції точок в проекціях з числовими відмітками
9		Позначення основних операцій:
	$\mathbf{A=B, A_1=}\boldsymbol{a_1}\ldots$	збіг двох геометричних образів або їх проекцій
	$\in$, $\subset$	знак приналежності
	$\mathbf{A} \in \boldsymbol{l}$	точка **A** належить прямій ***l***
	$\boldsymbol{l} \subset \mathbf{\Sigma}$	пряма ***l*** належить площині **Σ**
	$\boldsymbol{l} \supset \boldsymbol{S}$	пряма ***l*** проходить через точку ***S***
	$\mathbf{\Sigma} \supset \boldsymbol{l}$	площина **Σ** проходить через пряму ***l***
	$\cap$	знак перетину:
	$\boldsymbol{l} \cap \mathbf{\Phi}$	пряма ***l*** перетинає поверхню **Ф**
	$\mathbf{\Sigma} \cap \mathbf{\Theta}$	площина **Σ** перетинає поверхню **Θ**
	$\varnothing$	обертання навколо вказаної осі
	$\boldsymbol{m^i}=\boldsymbol{m}\ \varnothing\ \boldsymbol{j}$	коло $\boldsymbol{m^i}$ є результатом обертання ***m*** навколо осі ***j***
	=	результат геометричної побудови
	=>	логічне слідство
	<=>	рівнозначність висловлювання
	$\mathbf{M} = \boldsymbol{l} \cap \mathbf{\Gamma}$	точка **M** є результатом перетину прямої ***l*** з площиною **Г**
	$\wedge(\vee)$	сполучник «і» («або»)
	⌈‾‾‾	побудувати, задати
	$\overline{\mid\ \mathbf{M^i} \in \mathbf{\Phi_1}}$	побудувати (задати) довільну точку $\mathbf{M^i}$, що належить до поверхні **Ф**
	∟	позначення прямого кута
	$\parallel$	знак паралельності
	$\perp$	знак перпендикулярності
	$\smile$	знак дотику
	$\underline{\parallel}$	знак проекціюючого геометричного образу

РОЗДІЛ 1. НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ ЯК НАВЧАЛЬНА ДИСЦИПЛІНА

1.1. Мета і задачі нарисної геометрії

Дисципліна **«Інженерна графіка»** та її перша частина **«Нарисна геометрія»** відіграє значну роль в формуванні інженера-будівельника та архітектора, тому що вона розвиває просторове уявлення майбутнього фахівця, навчає образно сприймати навколишнє середовище, сприяє розвитку творчих здібностей, удосконаленню графічних навичок тощо.

Основними задачами курсу «Нарисна геометрія» є розробка методів побудови та читання креслень, методів розв'язання геометричних задач, а також методів геометричного моделювання, тобто створення предмету чи оригіналу об'єкта, які відповідали б наперед заданим умовам.

Зміст курсу «Нарисна геометрія» складається з основних тем, що перелічені у робочій програмі і становлять основу дисципліни, та розділів, де викладено геометричний апарат для розв'язування різноманітних задач, які відповідають конкретній спеціалізації студентів. Кінцевою метою курсу «Нарисна геометрія» є навчання студентів геометричному моделюванню об'єктів і процесів, раціональному розв'язуванню інженерних геометричних задач сучасними засобами в тому числі з використанням комп'ютерної техніки.

Інженерна графіка – одна з перших інженерних дисциплін, що вивчається студентами вищих технічних закладів. Бурхливий розвиток техніки та інноваційних технологій, подальше впровадження комп'ютерної техніки в інженерну справу значно підвищили вимоги до графічної підготовки майбутніх інженерів та наукових працівників, які займаються прикладною діяльністю, що, в свою чергу, ставить більш високі вимоги до викладання як теоретичних основ інженерної графіки, так і до стійкого розвитку графічних навичок.

Інженерна графіка – комплексна дисципліна. Теоретичну основу саме нарисної геометрії визначають у концентрованому вигляді три базових задачі:

1. Побудова алгоритмів графічного відображення просторових

тривимірних фігур на двовимірній площині (оволодіння здібностями будувати креслення).

2. Побудова алгоритмів розкриття геометричних властивостей просторових фігур за їх плоскими зображеннями (оволодіння здібностями читати креслення).

3. Вивчення способів розв'язання задач на взаємне положення елементів просторових фігур на двовимірному плоскому кресленні (оволодіння здібностями розв'язувати різноманітні задачі графічними засобами).

Предметом дослідження нарисної геометрії є вивчення просторових форм та їх відносин за допомогою графічних зображень, які називають ***проекційними*** кресленнями (метод дослідження в нарисній геометрії – графічний, що заснований на операції проекціювання).

1.2. Види, апарат та властивості проекціювання

В залежності від положення ***центра проекціювання*** **S** відносно площини проекцій відрізняють:

а) ***центральне проекціювання*** **(рис.1.1);** операція проекціювання:

$$\mathbf{A_1 = \ell \cap \Pi_1}$$

Тут і далі:

S - центр проекціювання,

$\mathbf{\Pi_1}$ – площина проекцій,

A – оригінал,

$\boldsymbol{\ell}$ – проекціюючий промінь,

$\mathbf{A_1}$ – проекція (креслення) точки **A**

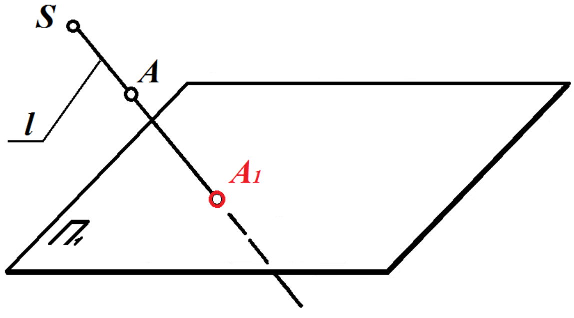


Рис. 1.1. Схема центрального проекціювання

б) ***паралельне проекціювання*** **(рис.1.2);** операція проекціювання:

$$\mathbf{A_1 = \ell \cap \Pi_1;\ \ \ell \parallel \bar{s}},$$

де $\bar{\mathbf{s}}$ – напрямок проекціювання.

Паралельне проекціювання має місце у випадку, якщо центр проекціювання **S** віддалити в нескінченність. Тоді проекціюючі промені **s** стануть паралельними. Ці промені можуть утворювати з площиною проекцій гострі (косі) або прямі кути. Залежно від цього розрізняють ***косокутне*** та ***прямокутне (ортогональне)*** проекціювання.

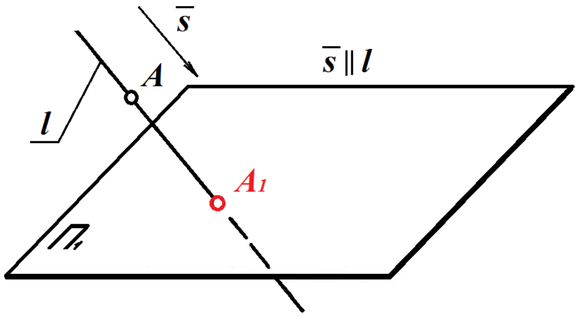


Рис. 1.2. Схема паралельного проекціювання

Згідно із способом проекціювання проекції називають ***центральними, косокутними*** чи ***прямокутними.*** Вони характеризуються певними властивостями **(рис. 1.3)**. Так, для прямокутного способу проекціювання характерне наступне:

- **проекцією точки є точка перетину проекціюючого променя з площиною чи іншою поверхнею (рис. 1.3а)**. Обернена задача – відновлення точки в просторі за її проекцією – неоднозначна, бо в одну й ту ж точку на площині проекцій проекціюється множина точок, які належать проекціюючому променю. Так само за однією проекцією геометричної фігури, яка складається з множини точок, не можна судити про її форму та положення у просторі;

- пряму лінію в нарисній геометрії розглядають як множину точок, і в загальному випадку **проекцією прямої є пряма (рис. 1.3б)**. Критерій задання прямої укладається в наступному: якщо відомі проекції хоча б двох точок прямої, то визначається проекція всієї прямої. Якщо пряма паралельна до площини, то її проекція на цю площину паралельна самій прямій;

- якщо точка належить прямої, то її проекція належить до проекції цієї прямої;

- проекції паралельних прямих також паралельні;

- при паралельному проекціюванні відношення довжин відрізків прямої та проекцій зберігається: (**AB) : (CD)** = (**A_1B_1) : (C_1D_1) (рис. 1.3в).**

Наслідок: відношення довжин проекцій паралельних відрізків прямої до дійсних довжин відрізків є сталою величиною, яку називають **коефіцієнтом** або **покажчиком** спотворення;

- для ортогонального проекціювання характерною є **теорема про проекціювання прямого кута (рис. 1.3г)**: прямий кут проекціюється без спотворення, якщо одна його сторона паралельна до площини проекцій, а друга – не перпендикулярна до неї.

Серед елементів трьохвимірного простору визначають точку як ***нульвимірний*** геометричний образ, лінію – ***одновимірний*** образ і поверхню (площину) – ***двовимірний*** образ.

Проекціюючі образи – це об'єкти, що проекціюються на будь-яку площину проекцій у вигляді геометричних образів, які мають вимірність на одну одиницю менше, ніж задані об'єкти. Наприклад, якщо $\mathbf{\Pi_1}$ – горизонтальна площина проекцій, то ℓ – горизонтально-проекціююча пряма (**рис. 1.4**):

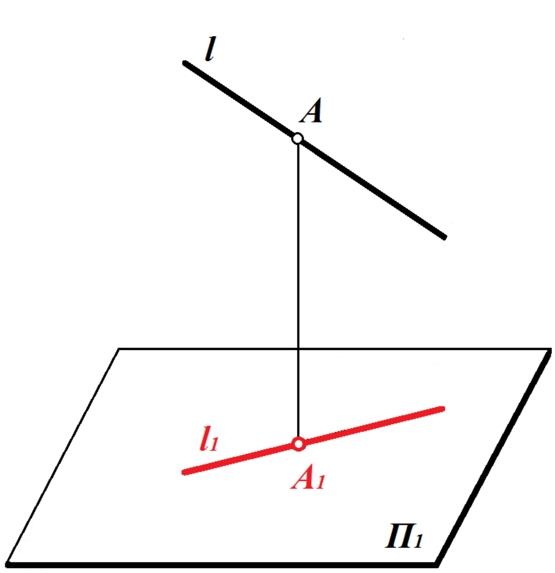
$$\boldsymbol{\ell \perp \Pi_1,\ A \in \ell;}$$

$\mathbf{\Sigma}$ – горизонтально-проекціююча площина: $\mathbf{\Sigma \perp \Pi_1,\ B \in \Sigma;}$

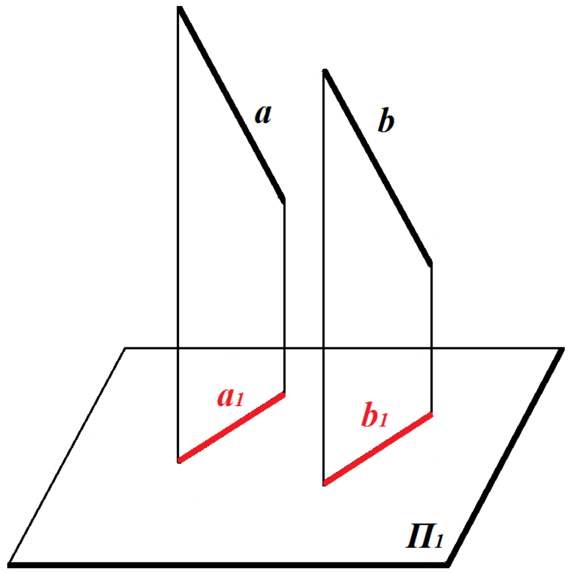
$\mathbf{\Phi}$ – горизонтально-проекціююча циліндрична поверхня: $\mathbf{\Phi \perp \Pi_1,\ K \in \Phi}$;

$\mathbf{\Theta}$ – горизонтально-проекціююча призматична поверхня: $\mathbf{\Theta \perp \Pi_1, C \in \Theta}$ (див. рис. 1.4).

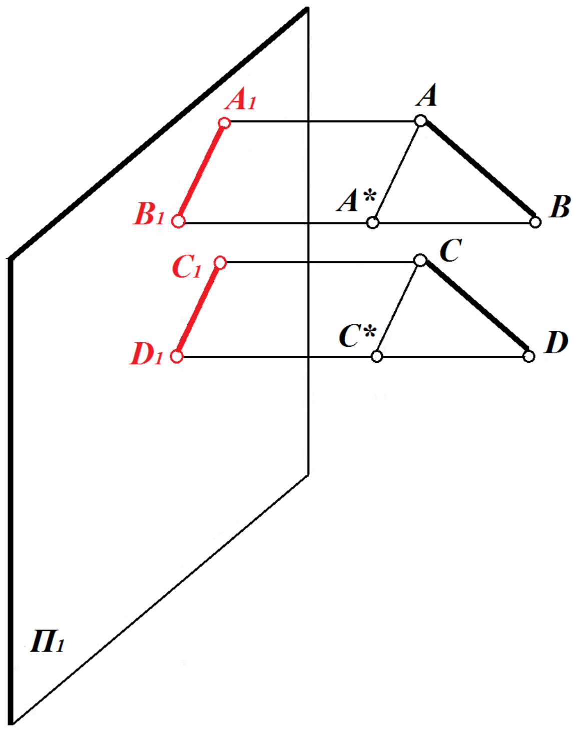
Вироджена проекція проекціюючого геометричного образа називається ***основною:*** $\boldsymbol{\ell_1}$, $\mathbf{\Sigma_1}$, $\mathbf{\Phi_1}$, $\mathbf{\Theta_1}$.



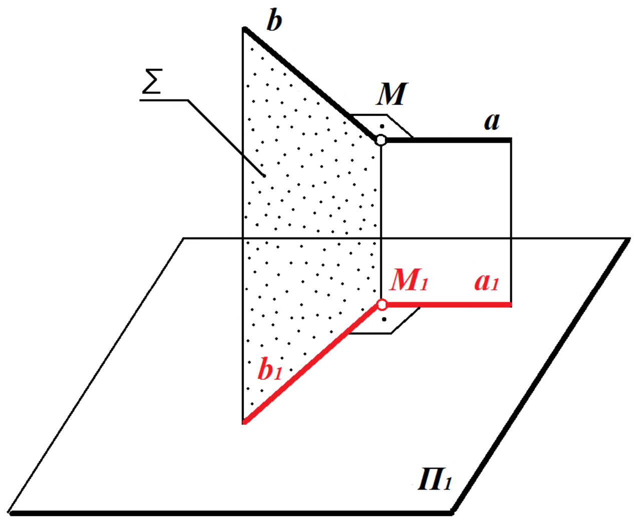
а)



б)



в)



г)

Рис. 1.3. Приклади властивостей прямокутного проекціювання

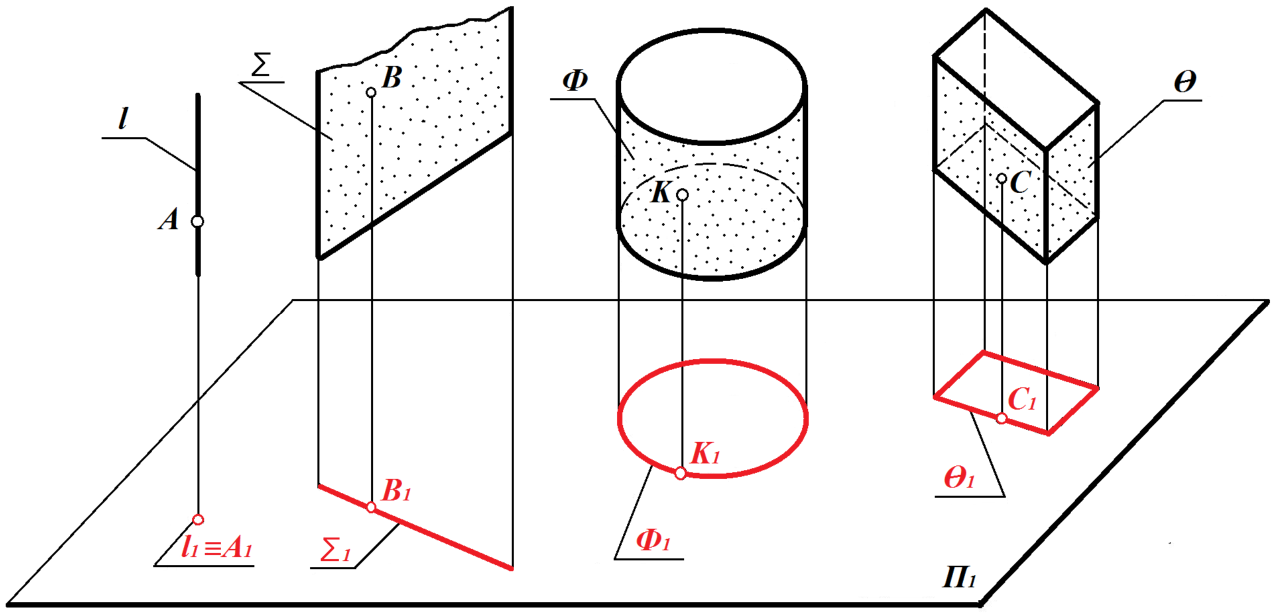


Рис. 1.4. Проекціюючі геометричні образи

1.3. Комплексне креслення. Точка та її декартові координати

Найпоширеніша графічна система, що застосовується в техніці, архітектурі та будівництві – це система прямокутних (ортогональних) проекцій або метод Монжа (***Гаспар Монж*** – засновник нарисної геометрії, французький геометр, 1746-1818 рр.)

В такій системі дві, три, або більше площин проекцій (до шести): де **$П_1$** – горизонтальна, **$П_2$** – фронтальна, **$П_3$** – профільна. Вони між собою перпендикулярні, а центри проекціювання віддалені до нескінченності по напрямах, перпендикулярних до площин проекцій, тобто напрями проекціювання $\mathbf{s^1 \perp П_1}$, $\mathbf{s^2 \perp П_2}$ і $\mathbf{s^3 \perp П_3}$.

Креслення, що складається з кількох (мінімум двох) зв’язаних між собою взаємноперпендикулярних проекцій фігури, називається ***комплексним.*** Комплексне креслення є графічною моделлю просторового об’єкту – вся інформація про його форму та розміри кодується на кресленні за допомогою точок, ліній та різних знаків і позначень (термінологія комплексного креслення та основні символи графічної мови наведені на стор. 7 - 8).

Для утворення комплексного креслення досить горизонтальну площину проекцій Π_1 обертанням навколо осі Ox – лінії перетину площин Π_1 і Π_2 і профільну площину проекцій Π_3 обертанням навколо осі Oy – лінії перетину площин Π_2 і Π_3 сумістити з фронтальною площиною проекцій Π_2 та з площиною креслення.

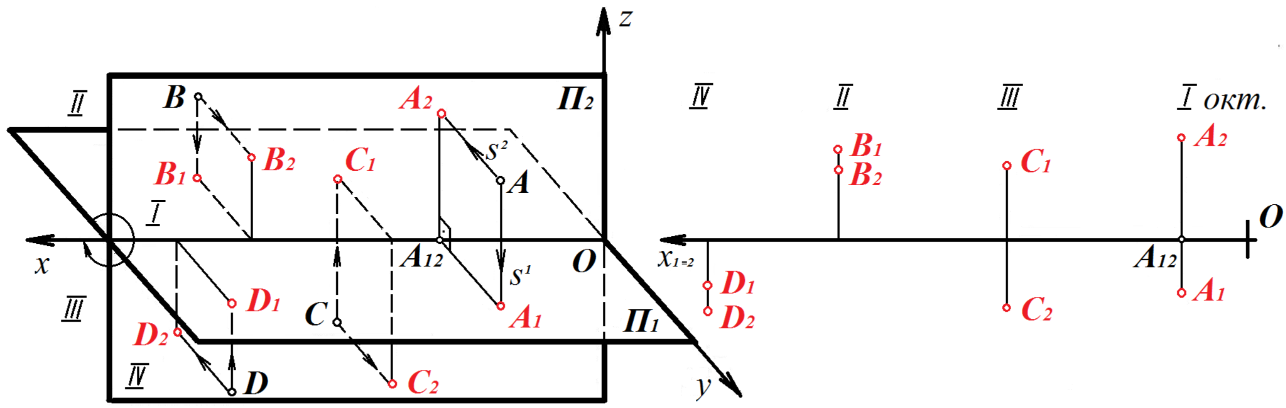
Площини проекцій, що перетинаються по трьох лініях, задають просторову декартову систему координат. На **рис. 1.5** та **рис. 1.6** показано утворення двокартинного і трикартинного комплексних креслень відповідно, а також взаємозв'язок з декартовою системою координат. Так, будь-яка точка простору на комплексному кресленні задається за допомогою двох проекцій:

A_1 – горизонтальна $A_1 = s^1 \perp \Pi_1$;

A_2 – фронтальна $A_2 = s^2 \perp \Pi_2$.

Пряма лінія, що з'єднує проекції A_1 і A_2, називається **проекційною лінією зв'язку** або просто лінією зв'язку. Всі ці лінії між собою паралельні та розташовані перпендикулярно до осі **Ox** (її проекції x_1 і x_2, що збігаються, позначають як $x_{1\equiv 2}$).

Комплексне креслення має прямий зв'язок з декартовою системою координат, тобто для довільної точки **A** за її декартовими координатами x_A, y_A, z_A можна побудувати її комплексне креслення (див. рис. 1.6).



а) *б)*

Рис. 1.5. Схема утворення двокартинного комплексного креслення

Абсциса x_A вимірюється як відстань на осі $x_{1\equiv 2}$ від початку координат точки **O** до допоміжної точки $A_{1\equiv 2}$ перетину лінії зв'язку (A_1 - A_2) з віссю Ox; **ордината** y_A вимірюється відстанню по лінії зв'язку (A_1 - A_2) від $A_{1\equiv 2}$ до A_1 (можна казати, що це глибина – відстоювання точки **A** до площини $П_2$); **апліката** z_A вимірюється відстанню по лінії зв'язку (A_1 - A_2) від $A_{1\equiv 2}$ до A_2 (інакше, це висота точки **A** над площиною $П_1$).

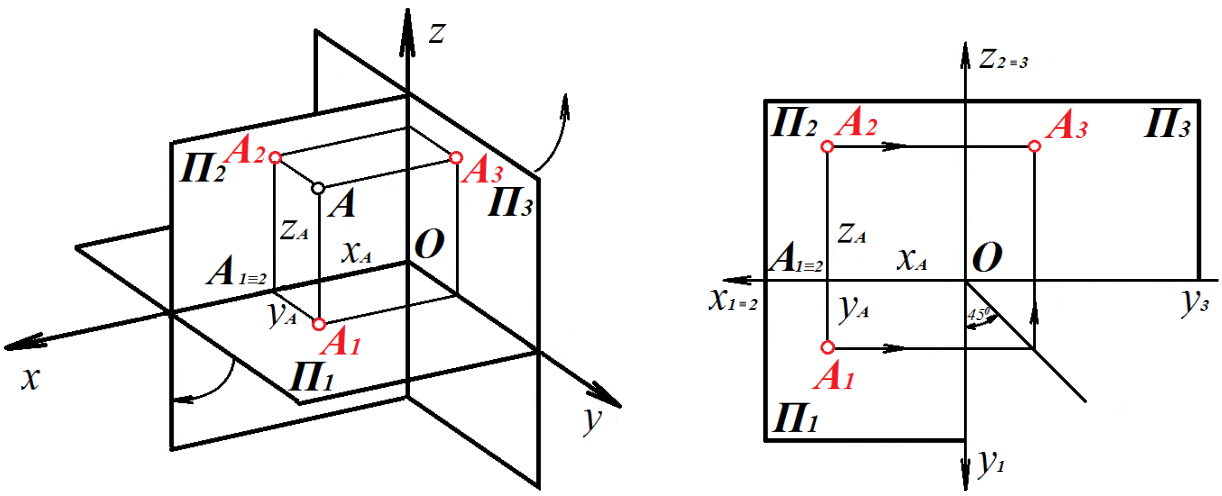
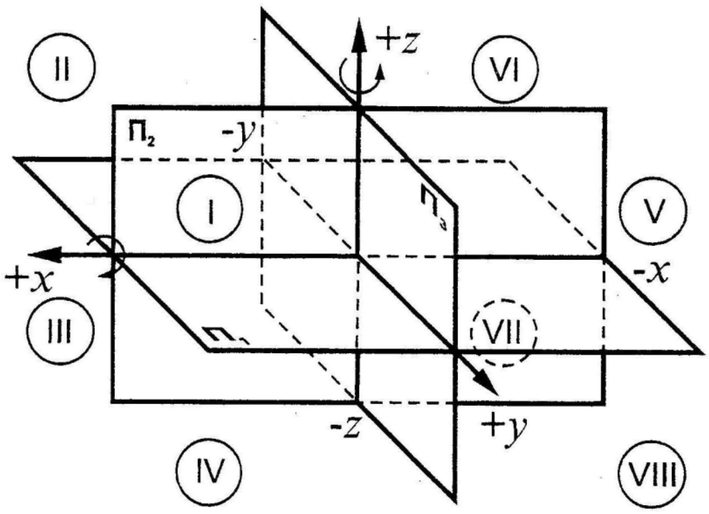


Рис. 1.6. Схема утворення трикартинного комплексного креслення

Дві основні площини проекцій $П_1$ і $П_2$ поділяють весь Евклідів простір на чотири частини – квадранти, а три площини – $П_1$, $П_2$ і $П_3$ ділять на вісім частин – октантів (**рис. 1.7**). Для довільної точки, що знаходиться у будь-якому октанті, існує правило знаків декартових координат (див. **рис. 1.7**). Так, наприклад, для точки **F**, що знаходиться у шостому октанті: x – негативна координата (« - » – мінус); y – негативна; z – позитивна («+» – плюс).

Є підстави вважати, що координований рисунок з нанесенням всіх трьох координатних осей в нарисній геометрії буде найпоширенішим у зв'язку з розвитком систем автоматизації виробництва, тому при розв'язанні задач нарисної геометрії комплексний рисунок супроводжується осями $x_{1\equiv 2}$, $y_{1\equiv 3}$, $z_{2\equiv 3}$.



I – VIII – октанти

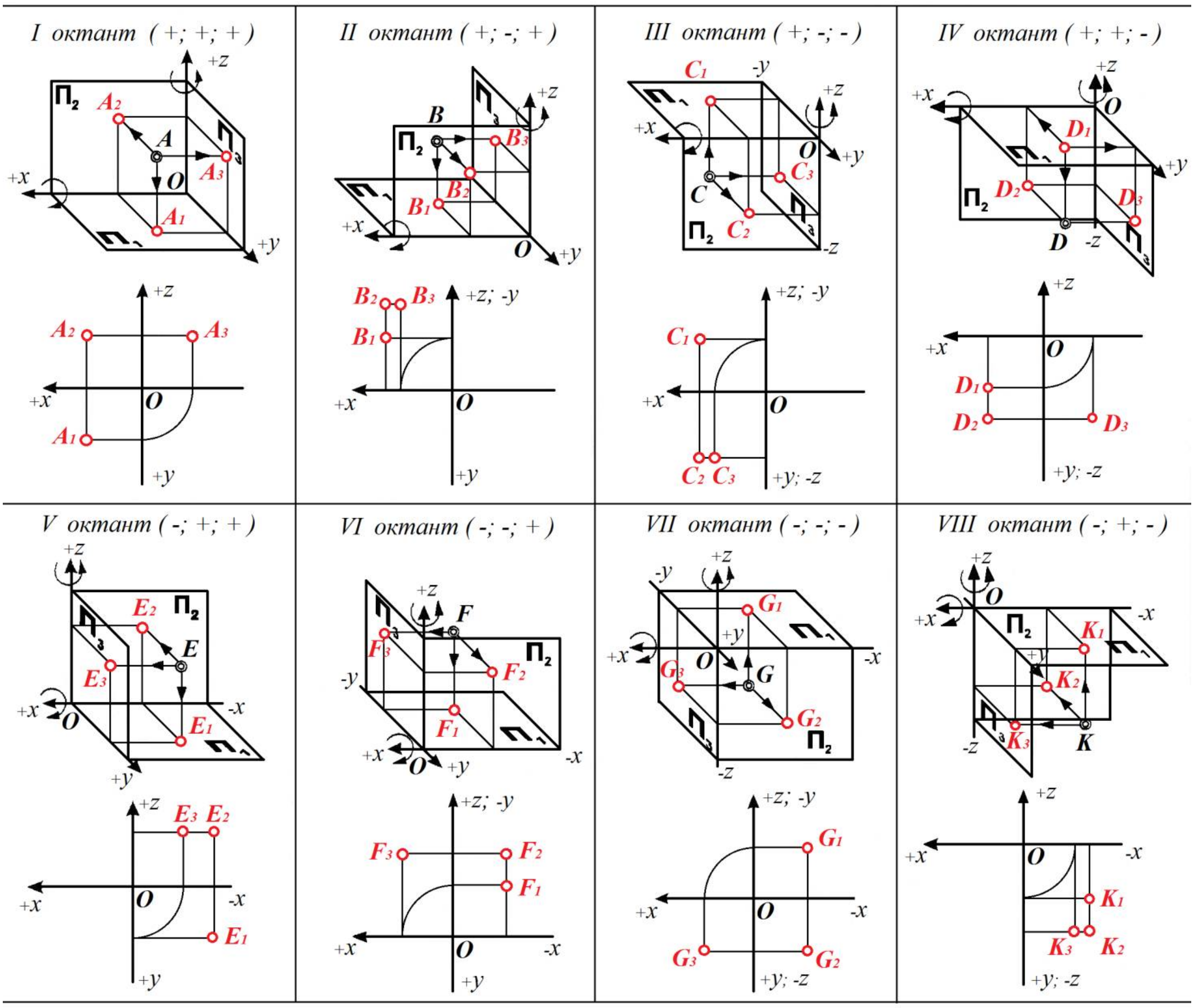


Рис. 1.7. Система прямокутних координат. Октанти

Комплексне креслення є позиційно повним та метрично визначеним: воно визначає форму, розміри та положення оригіналу у просторі, тобто за його допомогою можна однозначно реконструювати об'єкт у просторі та розв'язувати будь-які задачі. Розглянемо, наприклад, наступні задачі:

Задача 1 **(рис. 1.8).** Побудувати на трьох площинах проекцій проекції точки **B**, що симетрична до точки **A (30, 20, 10)** відносно осі **O*y***,та вказати октанти, в яких знаходяться точки **A** і **B**.

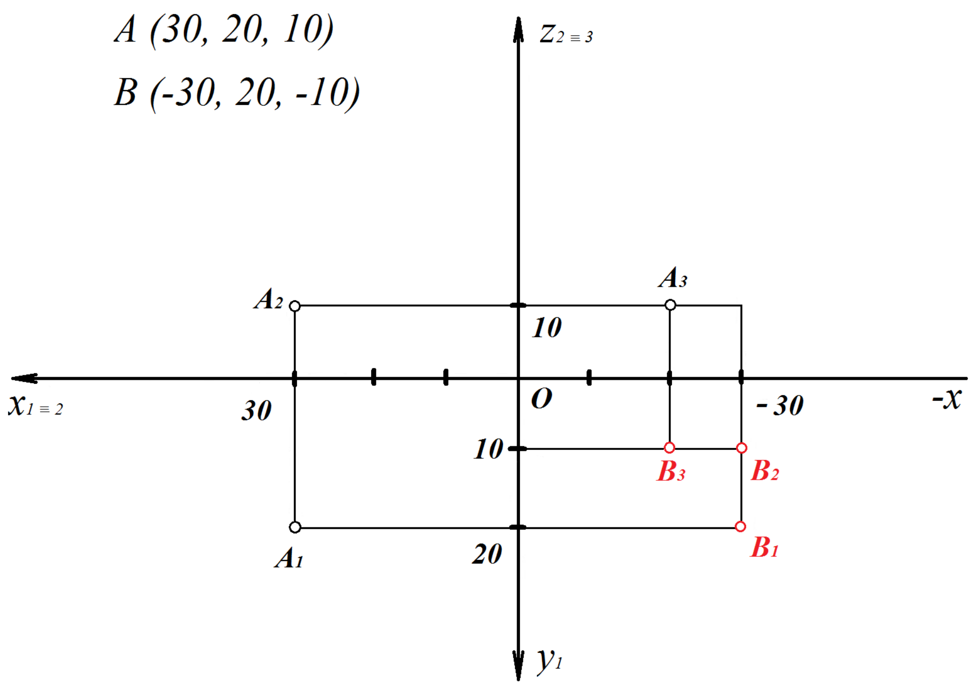


Рис. 1.8. Задача 1

Розв'язання. Точка ***A***, яка має позитивні координати *x*, *y*, *z*, знаходиться у першому октанті. Симетрична до неї відносно осі ***Oy*** точка ***B*** знаходиться з протилежної сторони, тобто у восьмому октанті, та координати т. ***B*** наступні: **x = - 30, y = 20, z = - 10.**

Задача розв'язана.

Задача 2 **(рис. 1.9).** Побудувати на трьох площинах проекцій проекції довільних точок **A, B, C,** які відповідно належать до площин $\mathbf{\Pi_1}$, $\mathbf{\Pi_2}$, $\mathbf{\Pi_3}$.

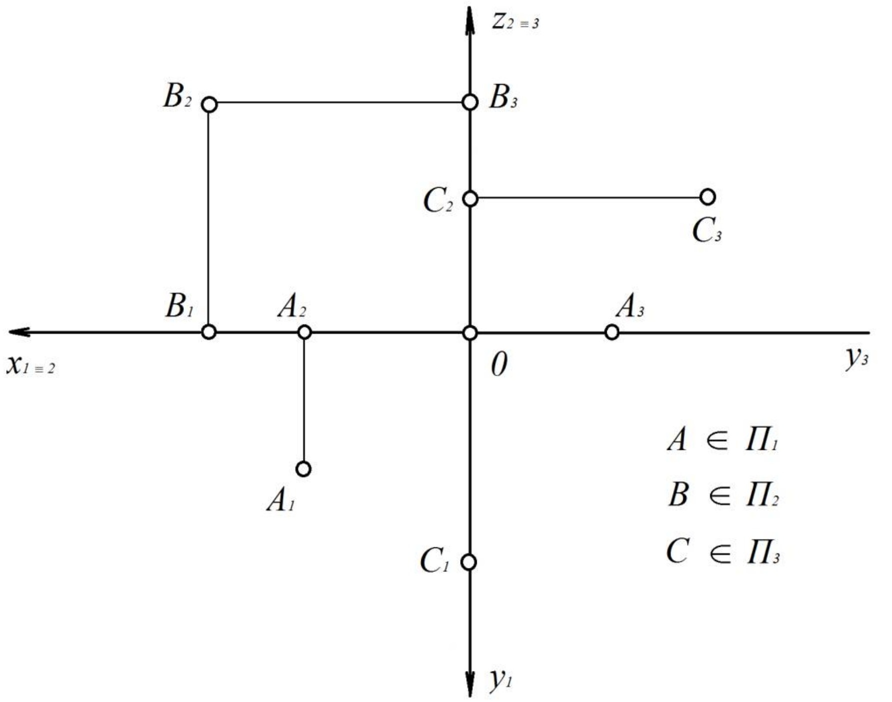


Рис. 1.9. Задача 2

1.4. Питання для самоконтролю

1. У чому містяться мета і задачі вивчення нарисної геометрії?

2. Які види проекціювання існують? Вказати основні елементи апарату проекціювання кожного виду та їхні властивості.

3. Які геометричні образи відносяться до проекціюючих? Основна проекція проекціюючого образу та її характерна властивість.

4. Яке креслення визначається як комплексне (або епюр) та як воно утворюється? У чому сутність побудови комплексного креслення точки?

5. Яким чином можна поділити Евклідів простір за допомогою двох і трьох основних площин проекцій, та яку назву мають утворені частини простору?

6. Покажіть на прикладі зв'язок комплексного креслення та декартової системи координат.

7. Яка кількість координат визначає положення точки у просторі?

РОЗДІЛ 2. ЗАДАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБРАЗІВ НА КОМПЛЕКСНОМУ КРЕСЛЕННІ

2.1. Задання лінії на комплексному кресленні. Лінії криві, ламані, прямі

Лінія є основним елементом креслення. За означенням Евкліда, лінія є те, що має довжину, але не має товщини (одновимірний образ).

Лінія вважається заданою на кресленні, якщо можна побудувати проекції довільної точки, що належить до цієї лінії – це **критерій задання** лінії. Тобто якщо точка **D** належить до лінії ***a***, то із властивостей проекціювання виходить, що і проекції $\mathbf{D_1}$, $\mathbf{D_2}$ повинні належати до однойменних проекцій прямої лінії $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$ (тобто якщо $\mathbf{D} \in \boldsymbol{a}$, то $\mathbf{D_1} \in \boldsymbol{a_1}$, $\mathbf{D_2} \in \boldsymbol{a_2}$). Це ствердження взаємообратне.

Криві – це лінії, що утворюються рухом точки, яка в кожний момент часу змінює напрям свого руху. В нарисній геометрії криві вивчають за їхніми проекціями на комплексному кресленні. ***Плоскі*** криві – це лінії, всі точки яких належать до однієї площини. Найбільш поширені плоскі криві другого порядку – ***еліпс, парабола, коло, гіпербола*** тощо. Порядок кривої графічно визначається кількістю точок її перетину з прямою (**рис. 2.1а**).

Просторові криві – це лінії, точки яких не лежать в одній площині. Порядок просторової кривої визначається кількістю точок її перетину з площиною загального положення (**рис. 2.1б**).

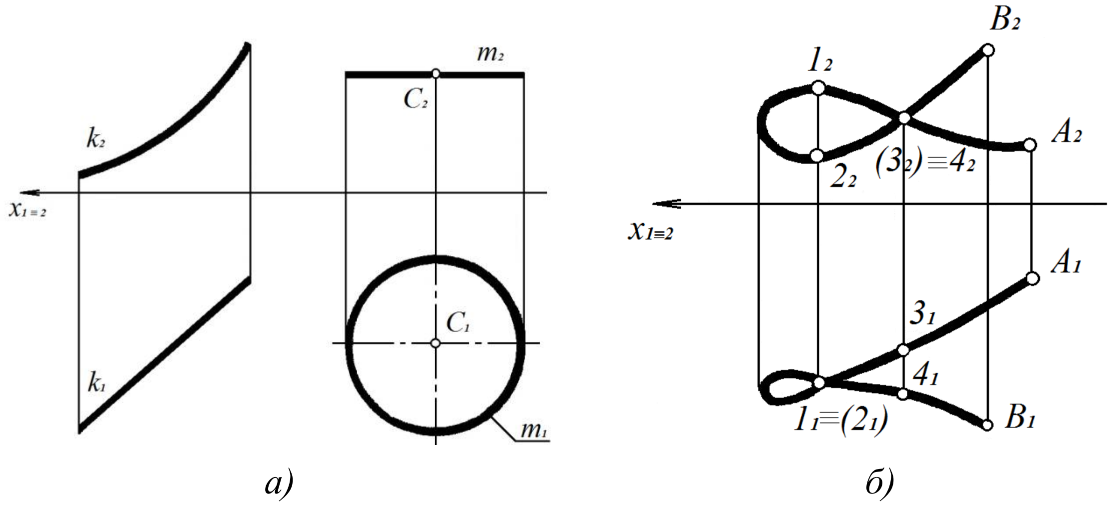


Рис. 2.1. Задання кривих ліній

Ламані – це лінії, що утворюються рухом точки, яка змінює напрям свого переміщення у точках зламу, наприклад, ***B*** і ***C*** **(рис. 2.2)**. ***AB, BC, CD*** – окремі ланки ламаної.

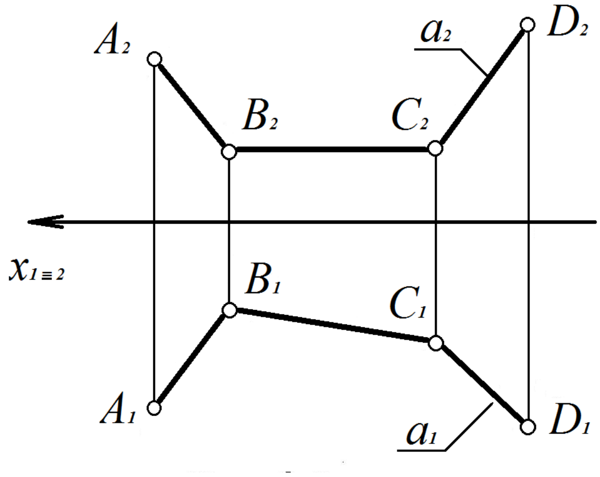


Рис. 2.2. Задання ламаних ліній

Прямі – це лінії, що утворюються рухом точки, яка не змінює напрям свого руху. Проекціями прямої в загальному випадку є прямі лінії **(рис. 2.3)**. Пряма, що довільно розташована у просторі, є ***прямою загального положення***. Якщо така пряма підіймається по мірі віддалення від спостерігача, то її називають **висхідною** прямою загального положення (**рис. 2.3а**). Якщо ж пряма спускається, то її називають **низхідною** (**рис. 2.3б**).

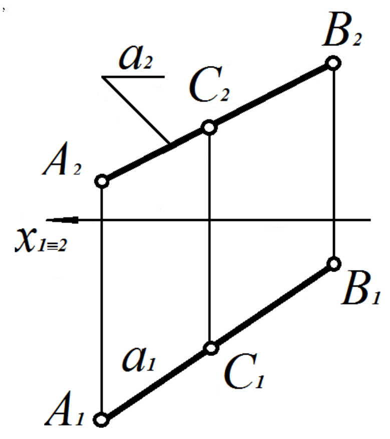
Точки перетину прямої лінії з площинами проекцій визначають як сліди – особливі точки прямої, в яких одна з координат дорівнює нулю (**рис. 2.3в**):

M (M_1, M_2 , M_3) – горизонтальний слід (точка перетину з **Π_1**, координата $z_M = 0$);

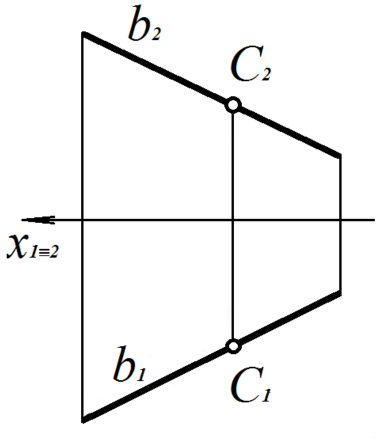
N (N_1, N_2 , N_3) – фронтальний слід (точка перетину прямої з **Π_2**, $y_N = 0$).

P (P_1, P_2, P_3) – профільний слід (точка перетину прямої лінії з **Π_3** ($x_P = 0$).

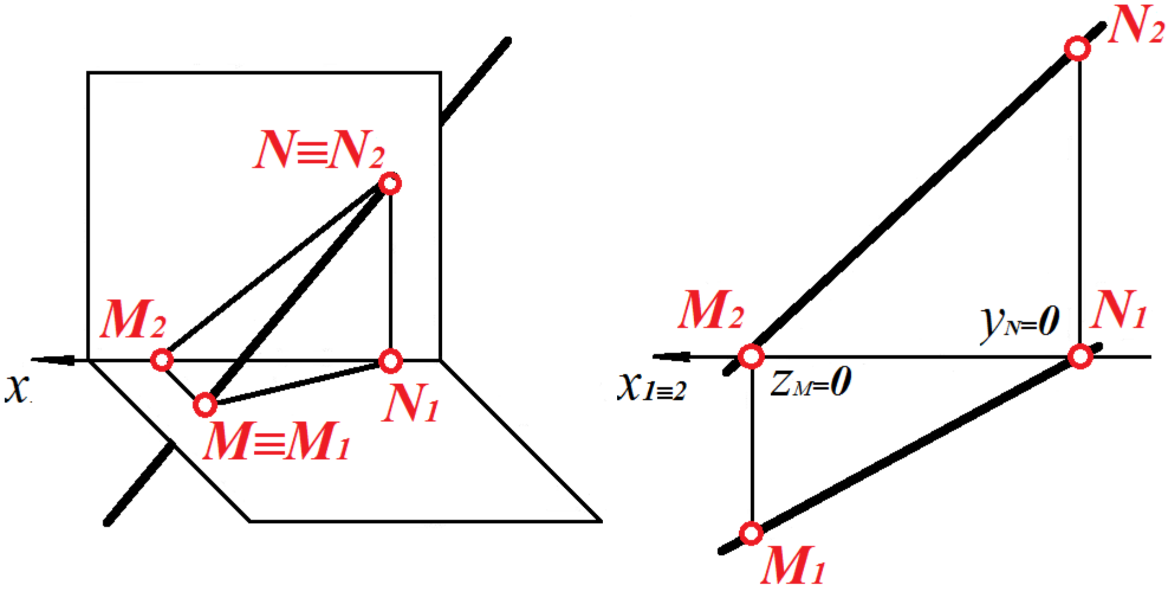
Комплексне креслення, як відомо, є *позиційно повним* та *метрично визначеним*, тому за двома проекціями будь-якого відрізка можна знайти його натуральну величину – для цього існує ***правило прямокутного трикутника***.



а)



б)



в)

Рис. 2.3. Задання прямих ліній

Правило прямокутного трикутника (**рис. 2.4**): натуральна величина відрізка прямої загального положення є гіпотенуза прямокутного трикутника, один катет якого дорівнює довжині проекції відрізка, а другий катет дорівнює різниці недостатніх координат кінців відрізка прямої (**рис. 2.4**). При цьому на кресленні також можна визначити і натуральну величину кутів нахилу відрізка до площин проекцій Π_1 і Π_2 відповідно.

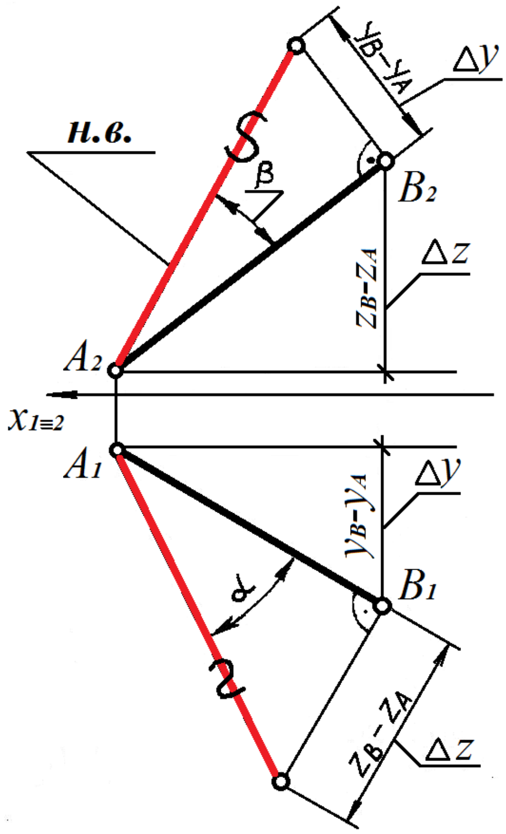


Рис. 2.4. Правило прямокутного трикутника

До прямих ***окремого положення*** відносяться:

а) ***прямі рівня*** – це прямі, що паралельні до будь-якої площини проекцій (**рис. 2.5**);

б) ***прямі проекціюючі*** – це прямі, що перпендикулярні до будь-якої площини проекцій (**рис. 2.6**).

_а_) прямі рівня

Горизонтальна пряма рівня – це пряма, що паралельна до горизонтальної площини проекцій Π_1.

Її властивості (див. **рис. 2.5а**):

1) фронтальна проекція горизонталі (ФПГ) h_2 завжди паралельна до $x_{1\equiv2}$; $h_2 \parallel x_{1\equiv2}$;

2) горизонтальна проекція (ГПГ) h_1 є натуральна величина відрізка горизонталі: $h_1 = |h|$;

3) кут $\boldsymbol{\beta}$ – це натуральна величина кута нахилу відрізка $\boldsymbol{h}$ до фронтальної площини проекцій $\mathbf{П_2}$*:* $\boldsymbol{\beta} = |\boldsymbol{h} \wedge \mathbf{П_2}|$.

Фронтальна пряма рівня – це пряма, що паралельна до фронтальної площини проекцій $\mathbf{П_2}$. Її властивості (**рис. 2.5б**):

1) горизонтальна проекція фронталі (ГПФ) f_1 завжди паралельна до $x_{1\equiv2}$: $f_1 \parallel x_{1\equiv2}$;

2) фронтальна проекція (ФПФ) f_2 є натуральна величина відрізка f; $f_2 = |f|$;

3) кут $\boldsymbol{\alpha}$ – це натуральна величина кута нахилу відрізка $\boldsymbol{f}$ до площини проекцій $\mathbf{П_1}$: $\boldsymbol{\alpha} = |\boldsymbol{f} \wedge \mathbf{П_1}|$.

Профільна пряма рівня – це пряма, що паралельна до профільної площини проекцій $\mathbf{П_3}$ (**рис. 2.5в**).

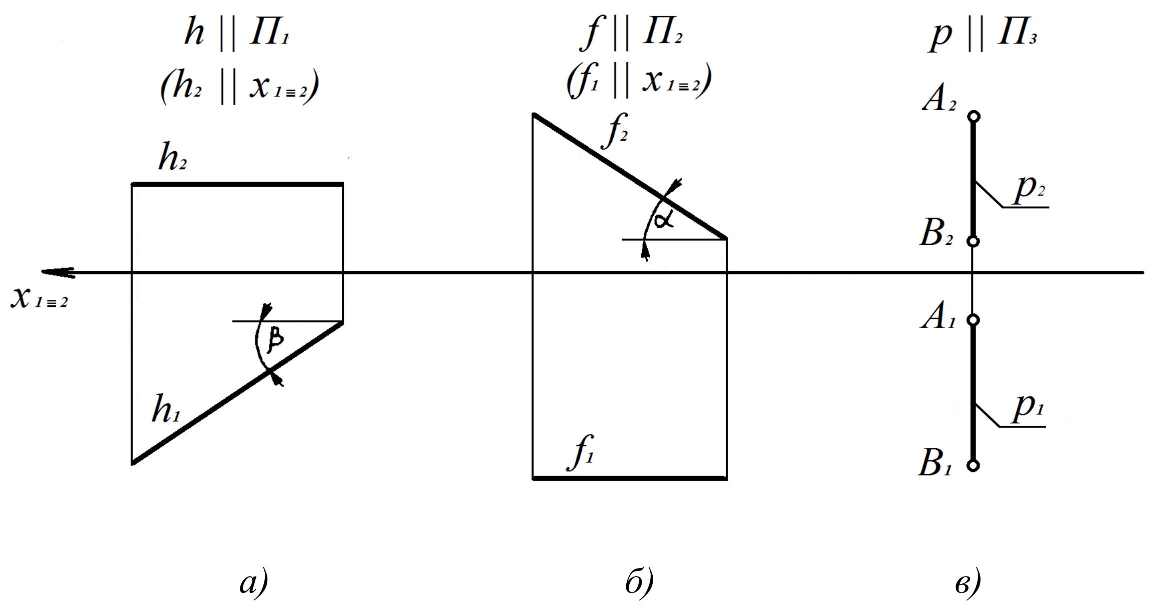


Рис. 2.5. Прямі рівня та їх властивості

б) проекціюючі прямі

- ***горизонтально-проекціююча*** – це пряма, що перпендикулярна до площини $\mathbf{П_1}$: $(\mathbf{AB}) \perp \mathbf{П_1}$ (**рис. 2.6а**);

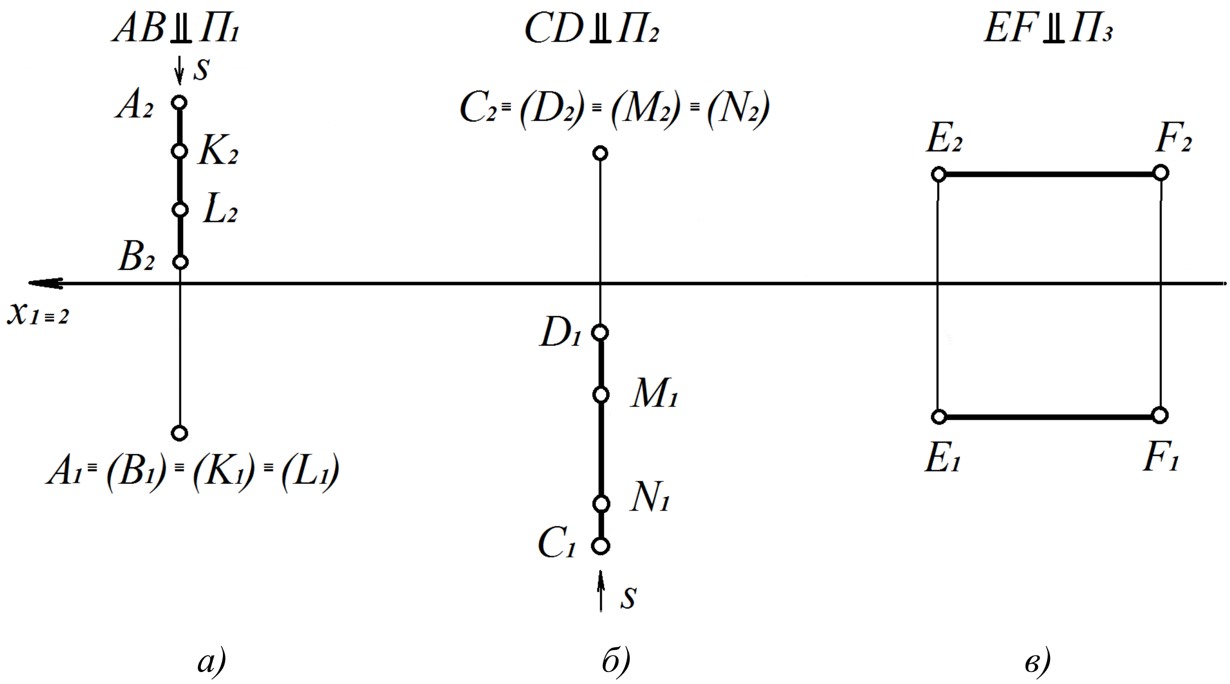


Рис. 2.6. Прямі проекціюючі

- *фронтально-проекціююча* – це пряма, що перпендикулярна до $\mathbf{П_2}$**:** (**CD**) $\perp$ $\mathbf{П_2}$ (**рис. 2.6б**);

- ***профільно-проекціююча*** – це пряма, що перпендикулярна до $\mathbf{П_3}$: (**EF**) $\perp$ $\mathbf{П_3}$ (**рис. 2.6в).**

Характерною ознакою таких прямих є те, що одна з проекцій прямої є точкою – це ***основна проекція*** геометричного проекціюючого образу**.**

Конкуруючими (за напрямом погляду **S**) визначаються точки, що належать до одного проекціюючого променя (див. **рис. 2.6**). За їхньою допомогою встановлюють видимість об'єктів: точка, яка є найближчою до спостерігача (за напрямом погляду), є видимою. Невидимі точки показуються у дужках **( )**.

Взаємне положення двох прямих **(рис. 2.7):** прямі у просторі можуть бути паралельними, перетинатись між собою або бути мимобіжними.

Ознаки двох паралельних прямих: якщо дві прямі паралельні між собою, то однойменні проекції прямих теж паралельні **(рис. 2.7а**):

якщо $\boldsymbol{c} \parallel \boldsymbol{d}$, то $\boldsymbol{c_1} \parallel \boldsymbol{d_1}$; $\boldsymbol{c_2} \parallel \boldsymbol{d_2}$.

$c \parallel d$ $\qquad\qquad$ $a \cap b = M$ $\qquad\qquad$ $e \dot{-} g$

$c_1 \parallel d_1,\ c_2 \parallel d_2$ $\qquad$ $a_1 \cap b_1 = M_1,\ a_2 \cap b_2 = M_2$

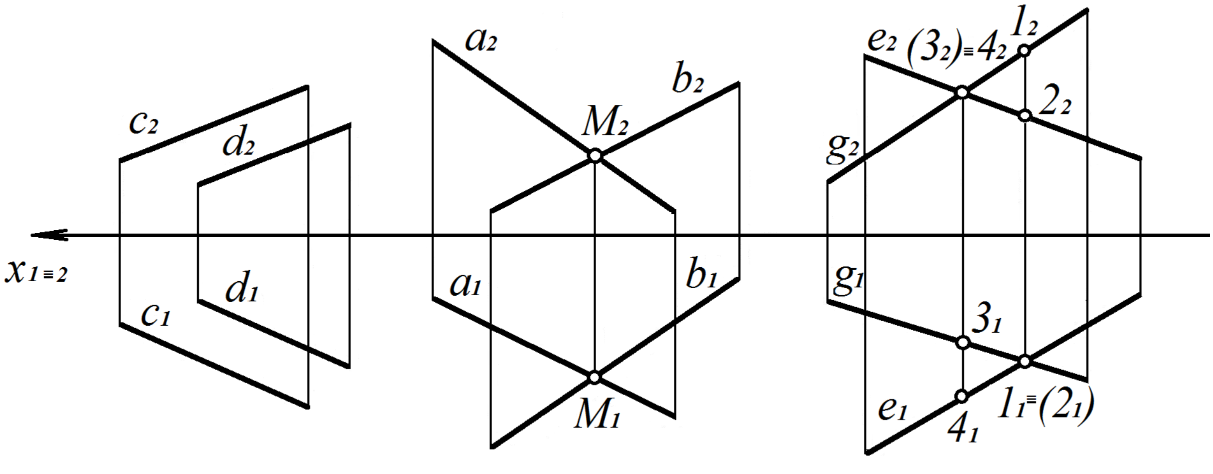


Рис. 2.7. Взаємне положення двох прямих

Ознаки двох прямих, що **перетинаються:** якщо дві прямі перетинаються, то однойменні проекції прямих теж перетинаються, причому проекції точки перетину лежать на одній лінії зв'язку (**рис. 2.7б**):

якщо $\boldsymbol{a} \cap \boldsymbol{b} = \mathbf{M}$; то $\boldsymbol{a}_1 \cap \boldsymbol{b}_1 = \mathbf{M}_1$, $\boldsymbol{a}_2 \cap \boldsymbol{b}_2 = \mathbf{M}_2$

Якщо **прямі мимобіжні**, то в них порушуються ознаки паралельності та перетину (**рис. 2.7в**).

Розглянемо розв'язання наступних задач.

Задача 1 **(рис. 2.8).** Побудувати на трьох площинах проекцій комплексне креслення відрізка **(AB),** якщо точка **A** належить до Π_1, точка **B** – до Π_2. Знайти натуральну величину відрізка **(AB)** та кути його нахилу до Π_1 і Π_2.

Розв'язання. Якщо т. **A** належить до Π_1, то координата $z_A = 0$, а координати $\boldsymbol{x}$ та $\boldsymbol{y}$ – довільні. Якщо т. **B** належить до Π_2, це означає, що $y_B = 0$, отже, x_B та z_B – довільні (проекції A_3, B_3 знаходимо координатним або іншим способом).

Для визначення натуральної величини відрізка **(AB)** та кутів його нахилу до Π_1 та Π_2 застосуємо правило прямокутного трикутника (див. **рис. 2.4**).

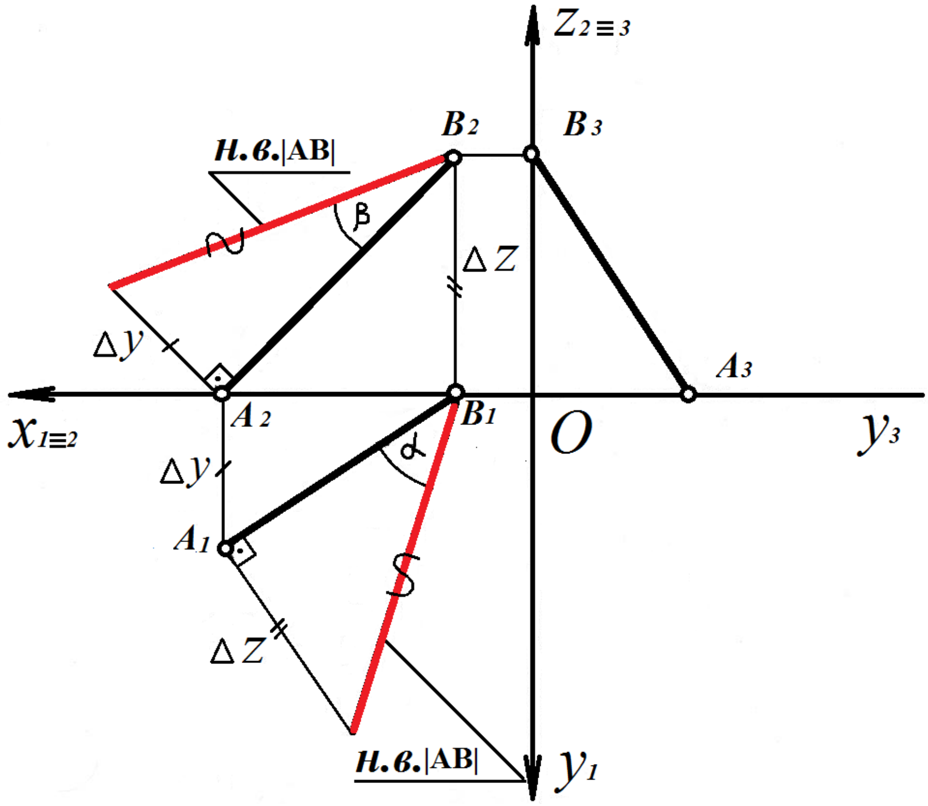


Рис. 2.8. Задача 1

Наприклад, на $\mathbf{П_1}$ через т. $\mathbf{A_1}$ будуємо перпендикуляр до $\mathbf{(A_1B_1)}$, на якому відкладаємо різницю недостатніх координат – $\boldsymbol{\Delta z}$ кінців відрізка **(АВ)**. Гіпотенуза прямокутного трикутника є натуральною величиною **(АВ)**, а кут $\boldsymbol{\alpha}$ між проекцією $\mathbf{(A_1B_1)}$ та гіпотенузою є натуральною величиною кута нахилу **(АВ)** до площини $\mathbf{П_1}$. На площині $\mathbf{П_2}$ відповідно знаходиться кут $\boldsymbol{\beta}$ нахилу **(АВ)** до $\mathbf{П_2}$ (різниця недостатніх координат – $\boldsymbol{\Delta\ y}$).

Задача розв'язана.

Задача 2 **(рис. 2.9).** Побудувати сліди прямої лінії (**АВ**).

Розв'язання: а) Для знаходження фронтальної проекції $\mathbf{M_2}$ горизонтального сліду **М** прямої необхідно продовжити фронтальну проекцію $\mathbf{(A_2\,B_2)}$ до перетину з віссю $\boldsymbol{Ox_{1\equiv 2}}$.

Далі на продовженні проекції $\mathbf{(A_1\,B_1)}$ за проекційним зв'язком знаходимо горизонтальну проекцію **M_1** горизонтального сліду **M**. Горизонтальну проекцію **N_1** фронтального сліду **N** знайдемо, якщо продовжити **(A_1B_1)** до перетину з ***$Ox_{1\equiv 2}$***. Побудова **N_2** зрозуміла з вищенаведеного креслення.

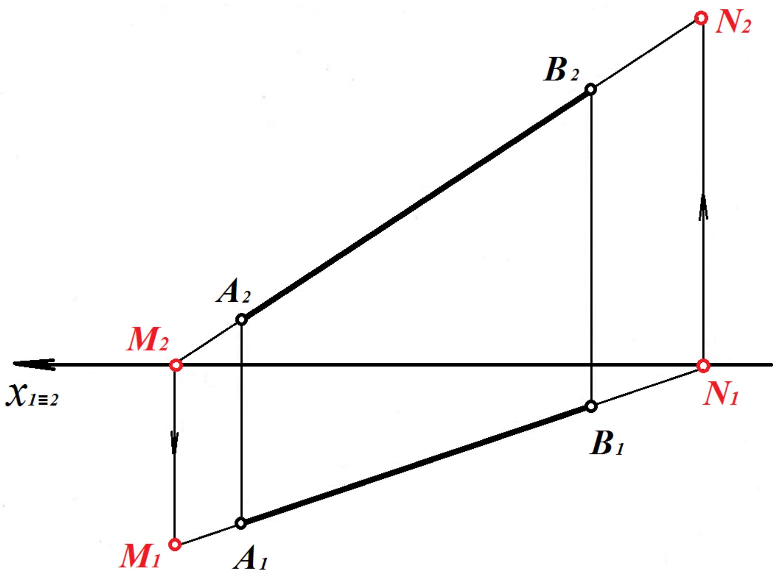


Рис. 2.9. Задача 2

2.2. Задання площини на комплексному кресленні. Умови належності точки та прямої лінії до площини. Головні лінії площини

а) Способи задання площини загального положення

Площини задавати безпосередньо своїми проекціями неможливо (крім проекціюючих площин). Площину, довільно орієнтовану в просторі, називають ***площиною загального положення***. Її задають на комплексному кресленні сукупністю геометричних елементів (точок і ліній), які ми називаємо ***визначником площини***. Таким чином, на комплексному кресленні є наступні ***способи*** задання площини **(рис. 2.10)**:

- проекціями трьох точок, що не лежать на одній прямій **(рис. 2.10а)**;
- проекціями двох паралельних прямих **(рис. 2.10б)**;
- проекціями двох прямих, що перетинаються **(рис. 2.10в)**;
- проекціями прямої лінії і точки, що до неї не належить **(рис. 2.10г)**;
- проекціями плоскої фігури **(рис. 2.10д)**;
- слідами **(рис. 2.10е)**.

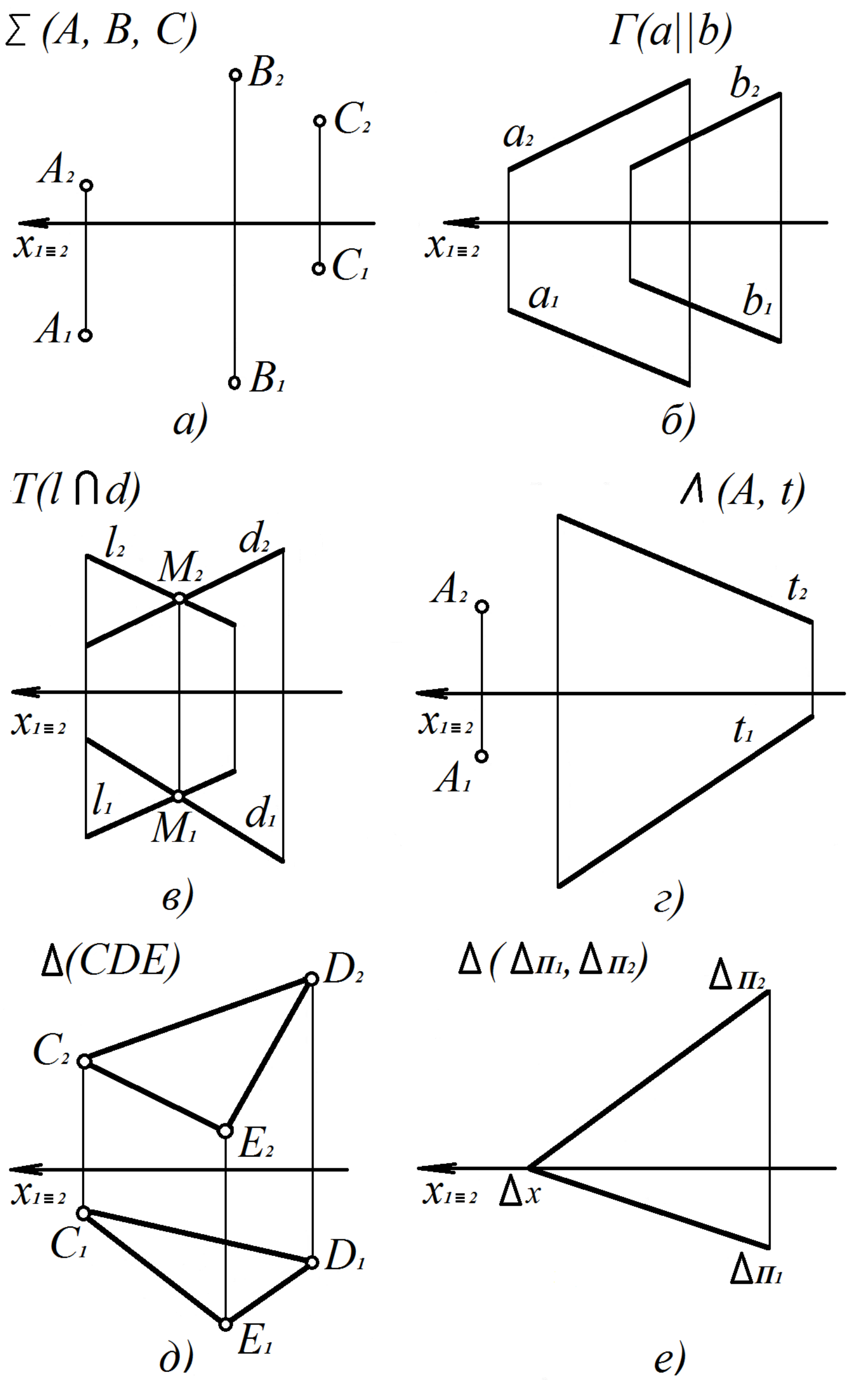
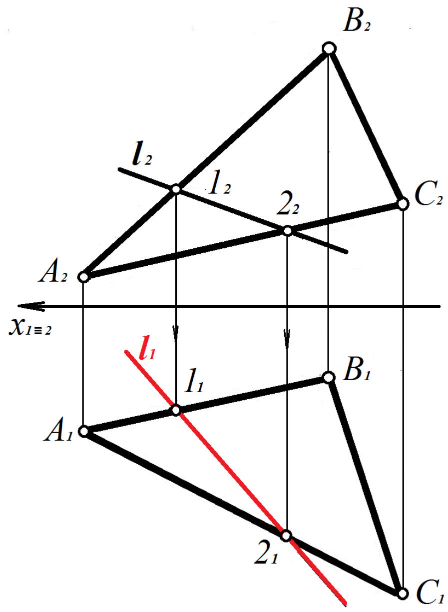


Рис. 2.10. Способи задання площини загального положення

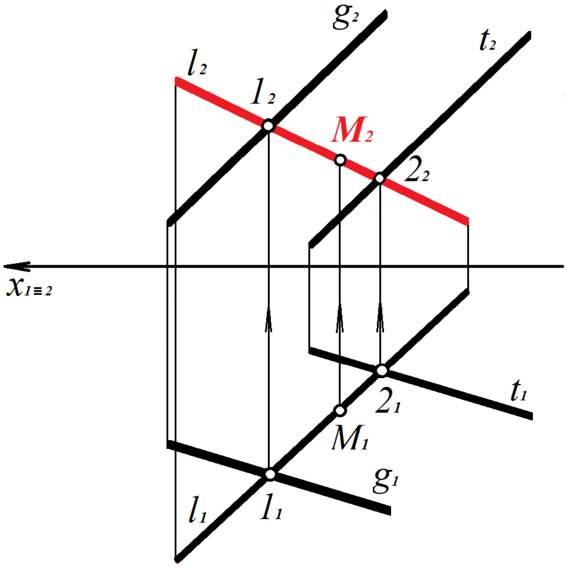
б) Умови належності прямої лінії та точки до площини

Пряма належить до площини, якщо вона має дві спільні точки з цією площиною або перетинає одну пряму і паралельна до іншої прямої, що задають площину (рис. 2.11а).

Точка належить до площини, якщо вона належить до прямої, що лежить у цій площині (рис. 2.11б).



а)



$$\frac{\Sigma\,(g \| t)}{\lceil M \in \Sigma}$$

ПА	ГА
I. $\lceil l \subset \Sigma$	I. 1. $\lceil 1_1 \in g_1$
II. $\lceil M \in l$	2. $\lceil 2_1 \in t_1$
	3. $\lceil l_1 \supset 1_1 \wedge 2_1$
	4. $\lceil 1_2 = (1_1 1_2) \cap g_2$
	5. $\lceil 2_2 = (2_1 2_2) \cap t_2$
	6. $\lceil l_2 \supset 1_2 \wedge 2_2$
	II.1. $\lceil M \in l_1$
	2. $\lceil M_2 = (M_1 M_2) \cap l_2$

б)

Рис. 2.11. Умови належності прямої лінії та точки до площини

в***) Головні лінії площини***

До головних ліній площини відносяться ***прямі рівня: горизонталі***, ***фронталі, профільні прямі*** та ***лінії найбільшого нахилу***. Так, ***горизонталь h*** площини – це пряма, що належить до цієї площини та паралельна до горизонтальної площини проекцій **(рис. 2.12а)**; ***фронталь f*** площини – це пряма, що належить до заданої площини та паралельна до фронтальної площини проекцій **(рис. 2.12б)**. Лінію найбільшого нахилу заданої площини відносно $\mathbf{П_1}$ визначають як ***лінію найбільшого скату (л.н.с.) d***. Вона перпендикулярна до горизонталей площини **(рис. 2.12в)**. Кут між л.н.с. та її горизонтальною проекцією є натуральною величиною кута нахилу заданої площини до $\mathbf{П_1}$.

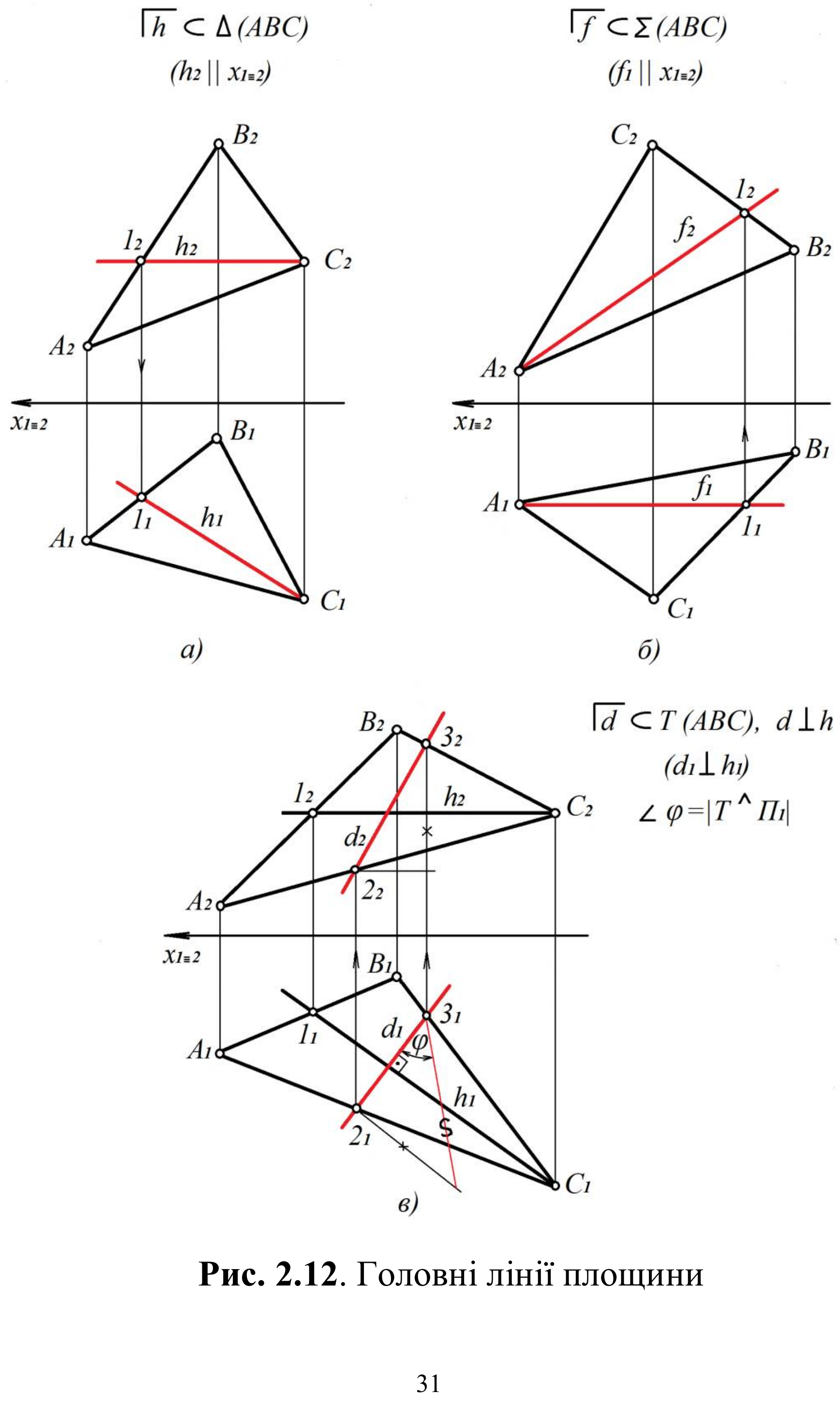


Рис. 2.12. Головні лінії площини

г) Площини окремого положення

До площин окремого положення відносяться ***проекціюючі*** площини та площини ***рівня***. ***Проекціюючі*** – це площини, що перпендикулярні до будь-якої площини проекцій **(рис. 2.13)**. ***Площини рівня*** – це площини, що паралельні до будь-якої площини проекцій **(рис. 2.14)**.

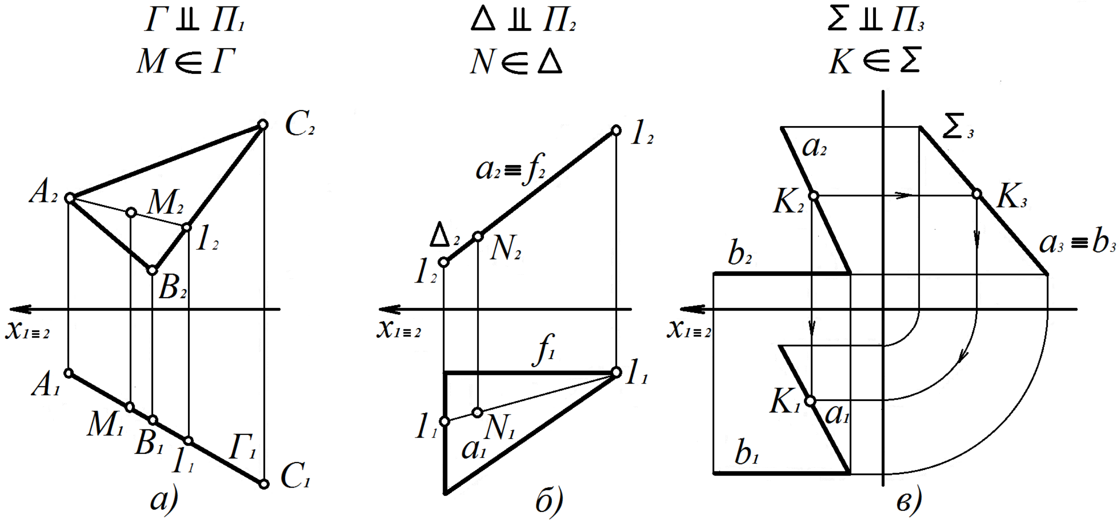


Рис. 2.13. Площини проекціюючі

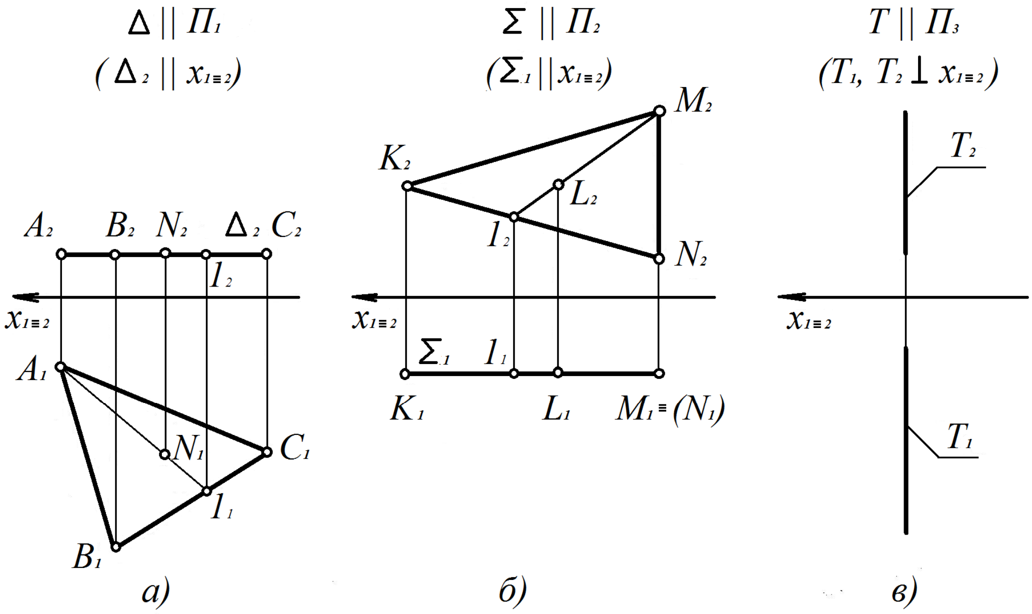


Рис. 2.14. Площини рівня

Розглянемо наступні задачі.

***Задача 3* (рис. 2.15)**. Побудувати довільну пряму лінію $\boldsymbol{\ell}$, що належить до площини **Т [(AB) ∩ (BC)]**.

Розв'язання. Як відомо, пряма лінія належить до будь-якої площини, якщо має з останньою дві спільні точки. Тоді візьмемо довільну т.**1**, наприклад, на прямій **(AB)**, тобто $\mathbf{1_1} \subset (\mathbf{A_1 B_1})$, та будуємо $(\mathbf{1_2}) \Rightarrow (\mathbf{A_2 B_2}) \cap (\mathbf{1_1 1_2})$, де $(\mathbf{1_1 1_2})$ – лінія зв'язку.

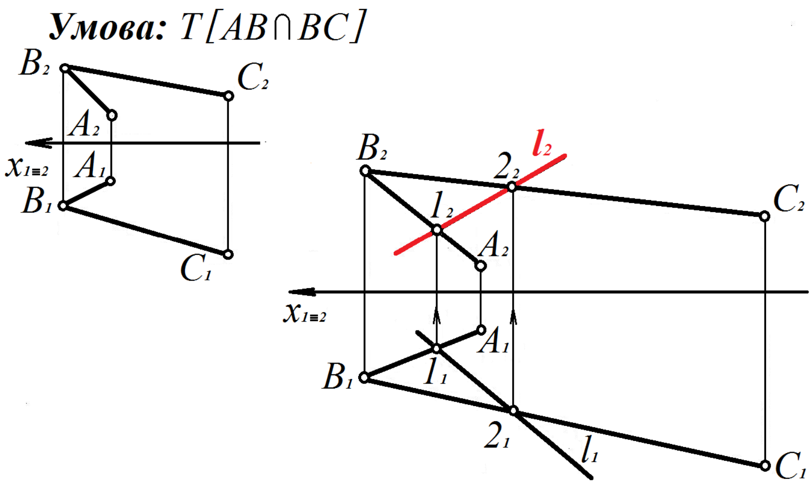


Рис. 2.15. Задача 3

Далі через проекцію $(\mathbf{1_1})$ точки **1** будуємо проекцію $\boldsymbol{\ell_1}$ довільної прямої $\boldsymbol{\ell}$, що перетинає в т.$\mathbf{2_1}$ проекцію $(\mathbf{B_1\ C_1})$ другої прямої **(BC)**. Знаходимо проекцію $\mathbf{2_2}$ точки **2**, тобто $\mathbf{2_2} \Rightarrow (\mathbf{B_2 C_2}) \cap (\mathbf{2_1}, \mathbf{2_2})$. Нарешті будуємо $\boldsymbol{\ell_2}$, що проходить через дві проекції $\mathbf{1_2}$ та $\mathbf{2_2}$ точок *1* та *2*: $\boldsymbol{\ell_2} \supset \mathbf{1_2}$ і $\mathbf{2_2}$.

Задача розв'язана.

***Задача 4* (рис. 2.16)**. Побудувати недостатню проекцію $\mathbf{E_1}$ точки **E**, що належить до площини **Г (K,L,M)**.

Розв'язання. Точка належить до площини, якщо вона знаходиться на будь-якій прямій лінії, що належить до площини. Тоді, наприклад, з'єднаємо $\mathbf{M_2}$, $\mathbf{K_2}$. Далі будуємо $\boldsymbol{\ell_2}$, що проходить крізь $\mathbf{L_2}$ і $\mathbf{E_2}$.

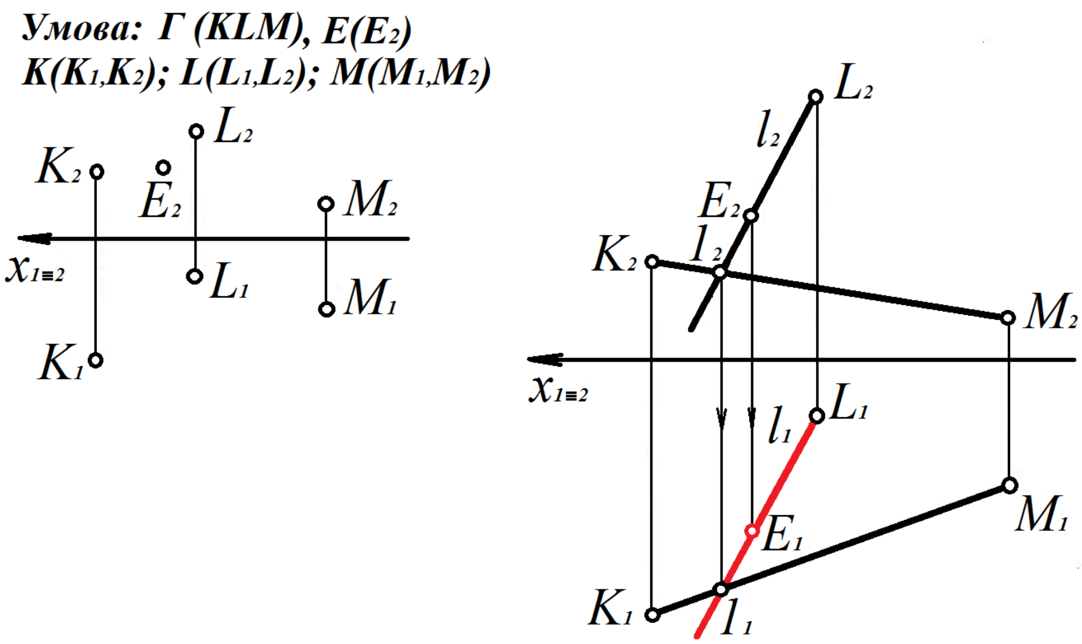


Рис. 2.16. Задача 4

У перетині $\boldsymbol{\ell_2}$ з $(\mathbf{M_2\ K_2})$ знаходимо $\mathbf{1_2}$: $\mathbf{1_2} = \boldsymbol{\ell_2} \cap (\mathbf{M_2\ K_2})$. Відповідно до належності знаходимо на $\mathbf{П_1}$: $\mathbf{1_1} = (\mathbf{M_1K_1}) \cap (\mathbf{1_2}, \mathbf{1_1})$, $\boldsymbol{\ell_1} \supset \mathbf{L_1}$ і $\mathbf{1_1}$.

$\mathbf{E_1} = \boldsymbol{\ell_1} \cap (\mathbf{E_2}, \mathbf{E_1})$.

Задача розв'язана.

***Задача* 5 (рис. 2.17)**. Побудувати довільні головні лінії площини Δ**(CDE)**: горизонталь $\boldsymbol{h} \subset \Delta$ **(CDE)**; фронталь $\boldsymbol{f} \subset \Delta$ **(CDE)**; лінію найбільшого нахилу $\boldsymbol{d} \subset \Delta$**(CDE)**, $\boldsymbol{d} \perp \boldsymbol{h}$.

Розв'язання. Як відомо, горизонталь $\boldsymbol{h}$ – це пряма рівня, яка $\parallel$ $\mathbf{П_1}$. Ознака цієї прямої на комплексному кресленні наступна: фронтальна проекція $\boldsymbol{h_2} \parallel \boldsymbol{x_{1\equiv2}}$. Таких прямих взагалі у площині багато, тому обираємо довільну горизонталь і будуємо крізь проекцію $\mathbf{C_2}$ точки **C** $\boldsymbol{h_2} \parallel \boldsymbol{x_{1\equiv2}}$. Пряма, що належить до площини, повинна мати з нею дві спільні точки, наприклад, $\mathbf{C_2}$ та $\mathbf{1_2}$. Для побудови горизонтальної проекції $\boldsymbol{h_1}$ необхідно знайти проекцію $\mathbf{1_1}$ на $(\mathbf{D_1E_1})$ та з'єднати її з проекцією $\mathbf{C_1}$.

Відомо, що фронталь $\boldsymbol{f}$ – це пряма рівня, яка $\parallel$ $\boldsymbol{\Pi_2}$. Її ознака $\boldsymbol{f_1} \parallel \boldsymbol{x_{1\equiv2}}$. Таких прямих у площині Δ(**CDE**) також багато, тому на довільній відстані від осі $\boldsymbol{x_{1\equiv2}}$ будуємо $\boldsymbol{f_1} \parallel \boldsymbol{x_{1\equiv2}}$, яка перетинає проекцію $\mathbf{(D_1E_1)}$ в точці $\mathbf{2_1}$, а проекцію $\mathbf{(C_1D_1)}$ – в точці $\mathbf{3_1}$. Знаходимо фронтальні проекції $\mathbf{2_2}$ та $\mathbf{3_2}$ точок **2** і **3** за належністю до $\mathbf{(D_2E_2)}$ та $\mathbf{(C_2D_2)}$ відповідно. Далі з'єднаємо $\mathbf{2_2}$ та $\mathbf{3_2}$ та здобуваємо $\boldsymbol{f_2}$.

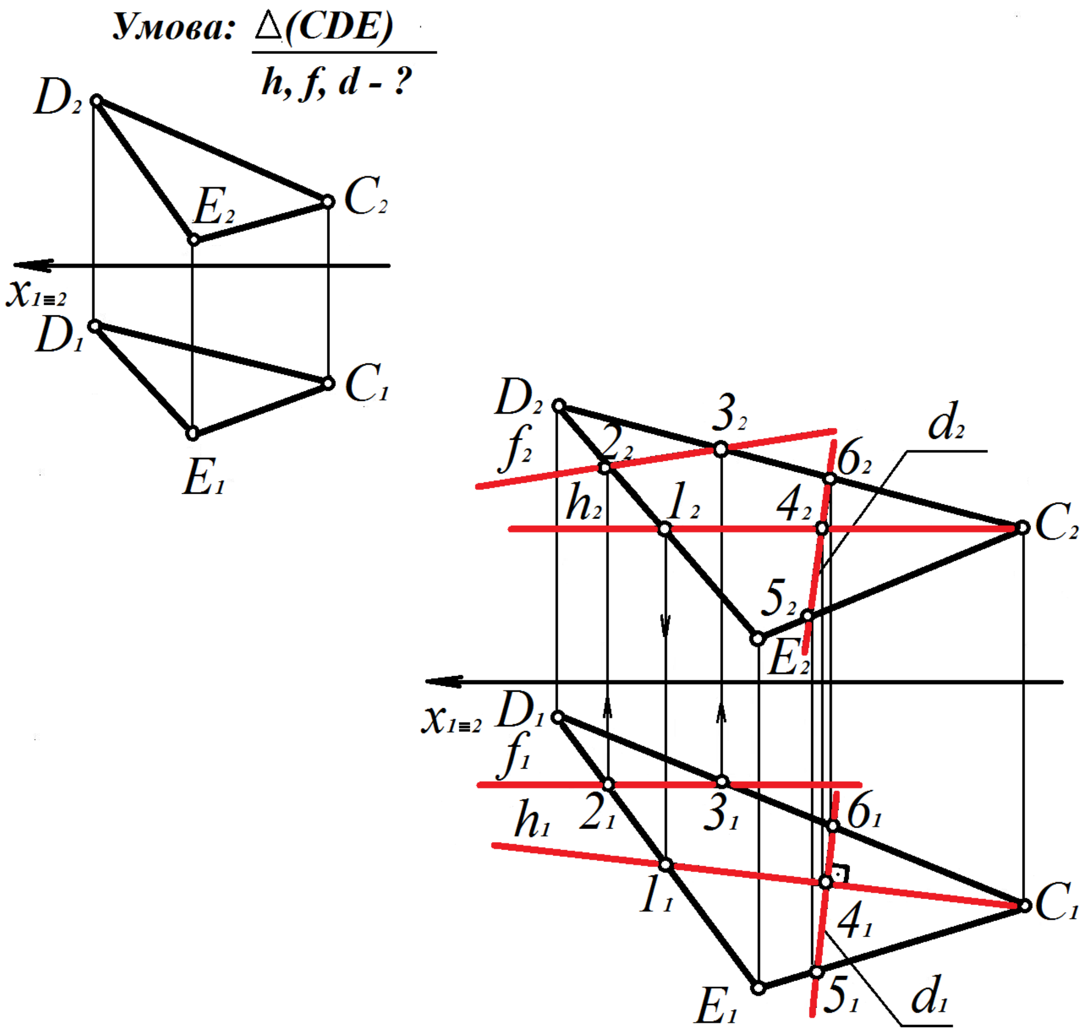


Рис. 2.17. Задача 5

Лінію найбільшого скату $\boldsymbol{d}$, яка перпендикулярна до $\boldsymbol{h}$, починаємо будувати на комплексному кресленні з горизонтальної проекції $\boldsymbol{d_1}$, тому що за теоремою про проекціювання прямого кута, як відомо, $\boldsymbol{d_1} \perp \boldsymbol{h_1}$. Також у довільній точці **4** (на горизонтальній площині проекцій – $\mathbf{4_1}$) будуємо перпендикуляр d_1 до h_1, позначаємо проекції точок $\mathbf{5_1}$ та $\mathbf{6_1}$ перетину d_1 відповідно з **(C_1E_1)** та **(C_1D_1)**. Далі знаходимо $\mathbf{5_2}$ та $\mathbf{6_2}$**,** через які будуємо d_2.

Задача розв'язана.

2.3. Задання та конструювання поверхонь на комплексному кресленні. Елементи теорії параметризації. Класифікація поверхонь

Для задання поверхні як графічної моделі використовують ***двоступеневе моделювання***:

1 – поверхня у просторі задається за допомогою ліній і точок, що належать до неї;

2 – зазначені лінії та точки задаються на кресленні своїми проекціями.

Сукупність ліній, які мають однаковий закон утворення (побудови) та пов'язаних між собою визначеною залежністю, називається *каркасом* поверхні.

Кожна множина ліній, що утворена за однаковим законом, називається **сімейством** ліній (**рис. 2.18**).

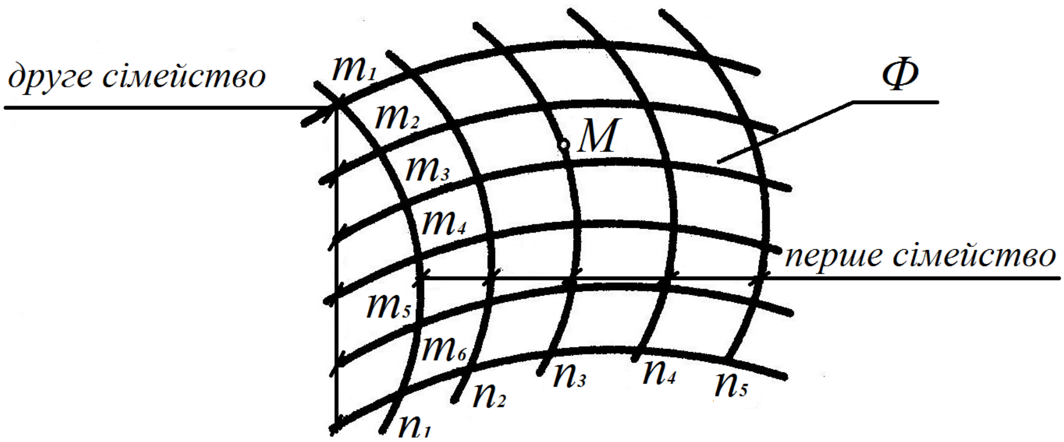


Рис. 2.18. Схема утворення каркасу поверхні

Кожна лінія каркасу називається ***елементом*** каркасу.

Єдине для всіх ліній каркасу правило побудови називається *законом каркасу* поверхні. Каркас, що складається з ліній, розташованих одна від одної на деякій відстані, називається ***дискретним***. Дискретний каркас дозволяє реконструювати поверхню у просторі приблизно. Для точного задання поверхні необхідно задати її ***безперервний*** каркас, тобто каркас, в якому через кожну точку поверхні проходить визначена лінія каркасу.

Спосіб утворення поверхні за допомогою ліній, що рухаються, називається ***кінематичним***. Лінія, що рухається, називається ***твірною***. Лінія, по якій переміщується твірна, називається ***напрямною***. **Найменша сукупність геометричних елементів, яка дозволяє реалізувати закон каркасу, називається *визначником поверхні*.**

Для задання безперервного каркасу поверхні необхідно вказати її визначник та сформулювати закон утворення каркасу. Ці умови можна подати як ***знако-кодову формулу*** поверхні, тобто записати вираз, що складається з чотирьох частин:

$$\mathbf{\Phi}\ \{\boldsymbol{\ell}\ (\mathrm{S},\boldsymbol{a})\ (\boldsymbol{\ell}^{\boldsymbol{i}} \supset \mathrm{S},\ \boldsymbol{\ell}^{\boldsymbol{i}} \cap \boldsymbol{a})\},$$

де **Φ** – код (символ) поверхні,

$\boldsymbol{\ell}$ – код твірної (елемент каркасу),

(S,*a*) – визначник поверхні,

$(\boldsymbol{\ell}^{\boldsymbol{i}} \supset \mathrm{S},\ \boldsymbol{\ell}^{\boldsymbol{i}} \cap \boldsymbol{a})$ – закон каркасу.

Критерій задання **поверхні: поверхня вважається заданою, якщо відносно до будь-якої точки простору однозначно можливо розв'язати задачу про її належність до наданої поверхні.**

Умова належності точки **до поверхні: точка належить до поверхні, якщо вона знаходиться на будь-якій лінії, що належить до цієї поверхні**. Лінія будується, як правило, за законом каркасу.

Креслення, на якому задані лише проекції визначника поверхні, називається *елементарним*. Воно є позиційно повне та метрично визначене, тобто на такому кресленні можливо розв'язувати будь-які задачі.

Елементарне креслення, яке доповнено зображенням контурних ліній

поверхні, будемо називати ***основним***. До контурних ліній відносяться лінії точок дотику поверхні проекціюючим промінням, лінії обрізу поверхні, ребра багатогранників тощо.

Параметром (грец.) називають незалежну величину, за допомогою якої в геометричних задачах виділяють певну фігуру (підмножину) з множини фігур, що відповідає її призначенню. Процес вибору і розрахунку кількості параметрів називають **параметризацією.** Наприклад, для визначення трикутника заданої форми з множини трикутників достатньо задати три величини: три сторони або одну сторону і два кути і т.і. При цьому необхідно враховувати зону існування параметрів. Для оцінки параметрів необхідно прийняти фіксовану систему віднесення: в нарисній геометрії такою системою є **прямокутна декартова система координат**, що визначає наданий трьохвимірний простір $\mathbf{R}^3$. Так, положення довільної точки в трьохвимірному просторі визначається трьома декартовими координатами $x, y, z,$ тобто множина точок в трьохвимірному просторі є **трьохпараметричною** (в площині множина точок є **двопараметричною**). Для задання прямої лінії в трьохвимірному просторі (в тому числі і в аксонометрії, наприклад) необхідно мати чотири параметри: по дві координати на двох площинах проекцій $\mathbf{П_1}$ и $\mathbf{П_2}$, тобто множина прямих в трьохвимірному просторі є **чотирьохпараметричною**.

В нарисній геометрії застосовуються два основних способи утворення поверхонь: ***каркасно-кінематичний*** і ***каркасно-параметричний***. При цьому поверхня розглядається як ***двопараметрична*** множина ***точок або однопараметрична*** множина ***ліній***. Форму і величину конкретної лінії на поверхні визначають **параметром каркасу**.

Велика різноманітність поверхонь вимагає систематизованого підходу до їх вивчення (вибірково наведено у **табл. 1**). При каркасно-кінематичному засобі утворення поверхонь в основу класифікації природно покласти вид твірної та правило її руху у просторі. Таким чином, можна виділити п’ять основних класів поверхонь:

1. ***Лінійчаті*** – це поверхні, що утворюються рухом у просторі ***прямої*** лінії. Необхідно відрізняти лінійчаті ***розгорнуті*** та ***нерозгорнуті*** поверхні. До перших відносяться поверхні, які після розрізу уздовж твірної можливо сумістити з площиною креслення без розривів та складок, наприклад, **пірамідальна, призматична, конічна, циліндрична, торсова** поверхні.

До лінійчатих нерозгорнутих поверхонь відносяться, наприклад, поверхні з *двома напрямними* та *площиною паралелізму*, до якої паралельні всі твірні. Інакше їх називають ***поверхнями Каталана*** – за прізвищем бельгійського математика **Е.Ш. Каталана** (1814-1894 рр.).

Залежно від форми напрямних виділяють три види поверхонь Каталана:

– ***гіперболічний параболоїд*** (коса площина): обидві напрямні – це прямі лінії;

– ***циліндроїд:*** обидві напрямні – криві лінії;

– ***коноїд:*** одна напрямна – пряма лінія, друга напрямна – крива лінія.

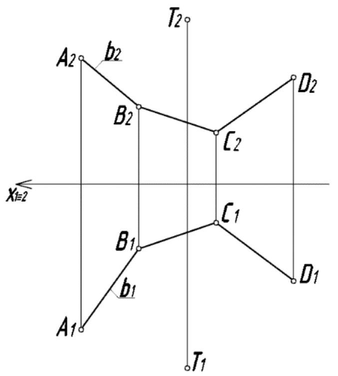
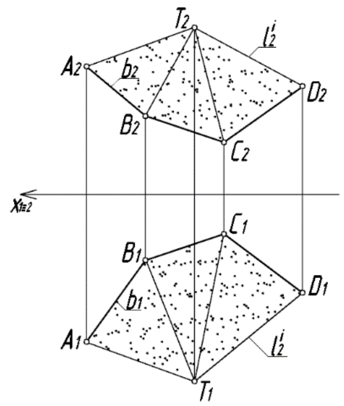
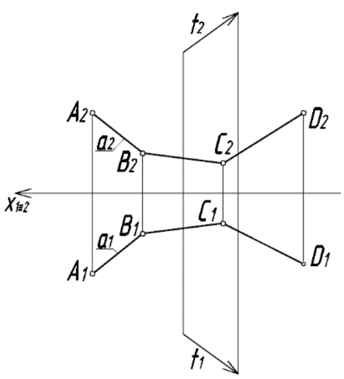
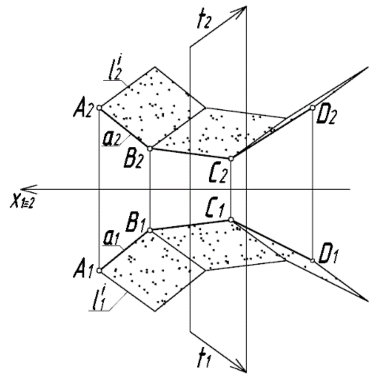
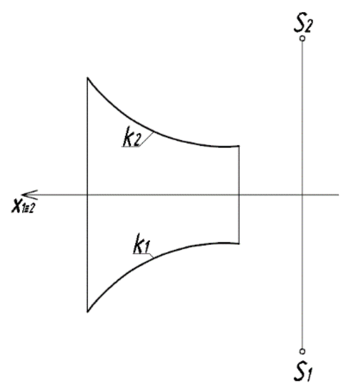
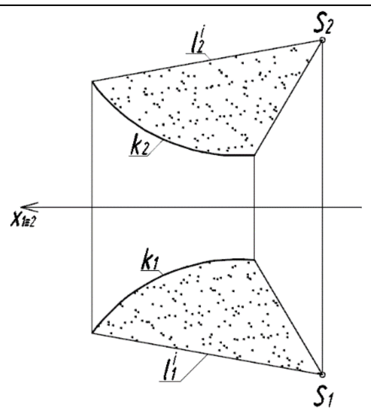
Лінійчату поверхню з трьома напрямними називають ***лінійчатою поверхнею загального виду***.

2. ***Циклічні*** – це поверхні, що утворюються рухом у просторі ***кола*** постійного чи змінного радіусів (**рис. 2.19**). Окремими випадками таких поверхонь є **каналові, трубчасті** та **поверхні обертання** (**сфера, кільце** тощо).

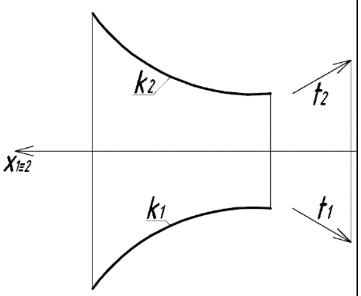
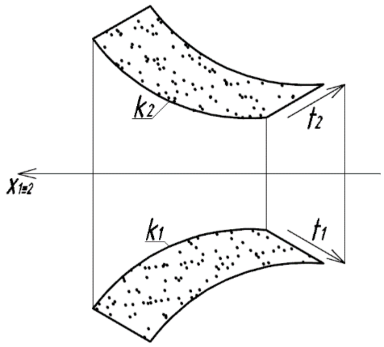
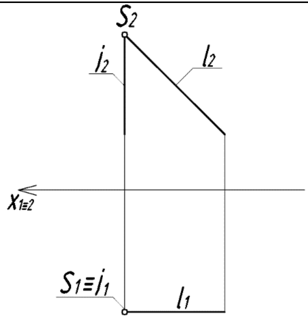
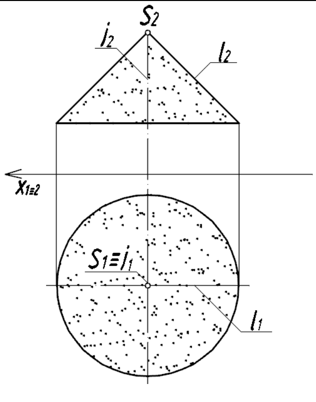
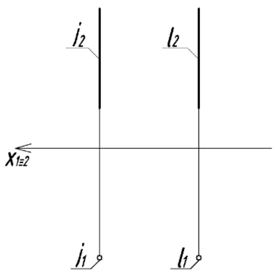
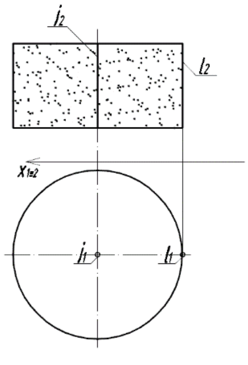
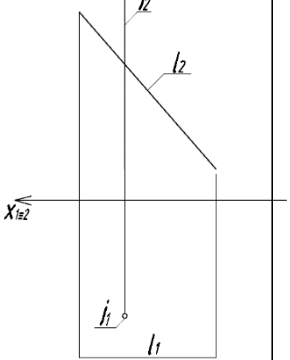
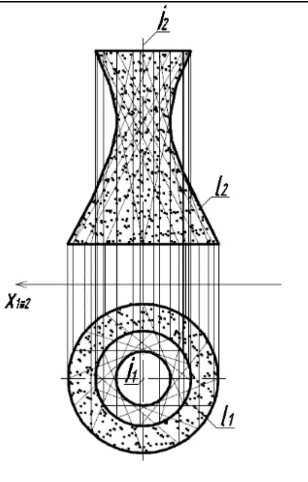
3. **П*оверхні обертання*** утворюються обертанням довільної твірної навколо нерухомої осі. Якщо твірна – прямі лінія, то при її обертанні утворюються ***лінійчаті*** поверхні обертання: **конічна, циліндрична** поверхні обертання, а також **однопорожнинний гіперболоїд обертання**. Якщо твірна – коло, то при обертанні утворюються ***циклічні*** поверхні обертання: **сфера, відкритий тор** (**кільце**), **закритий тор**. Якщо твірна – крива лінія **другого порядку**, то утворюються ***поверхні обертання другого порядку***: **еліпсоїд обертання, параболоїд обертання, гіперболоїди (однопорожнинний, двопорожнинний) обертання.**

Таблиця 2.1

Класифікація поверхонь

Назва поверхні	Елементарне креслення	Основне креслення	Знако-кодова формула та її зміст
1	2	3	4
Лінійчаті розгортні поверхні			
1. Пірамідальна			$\boldsymbol{\Phi\{l(T,b)(l^i \supset T, l^i}$ I $\boldsymbol{b)\};}$ $\boldsymbol{l}$ – твірна; $\boldsymbol{T}$ – вершина; $\boldsymbol{b[A,B,C,D]}$ – напрямна (ламана); $\boldsymbol{(T,b)}$ – визначник поверхні; $\boldsymbol{(l^i \supset T, l^i}$ I $\boldsymbol{b)}$ – закон каркасу.
2. Призматична			$\boldsymbol{\Phi\{l(t,a)(l^i \parallel t, l^i}$ I $\boldsymbol{a)\};}$ $\boldsymbol{l}$ – твірна; $\boldsymbol{t}$ – напрям; $\boldsymbol{a[A,B,C,D]}$ – напрямна (ламана); $\boldsymbol{(t,a)}$ – визначник поверхні; $\boldsymbol{(l^i \parallel t),(l^i}$ I $\boldsymbol{a)}$ – закон каркасу.
3. Конічна			$\boldsymbol{\Phi\{l(S,k)(l^i \supset S, l^i}$ I $\boldsymbol{k)\};}$ $\boldsymbol{l}$ – твірна; $\boldsymbol{S}$ – вершина; $\boldsymbol{k}$ – напрямна (крива); $\boldsymbol{(S,k)}$ – визначник поверхні; $\boldsymbol{(l^i \supset S, l^i}$ I $\boldsymbol{k)}$ – закон каркасу.

Продовження таблиці 2.1

4. Циліндрична			$\boldsymbol{\Phi\{l(t,k)\,(l^i \parallel t,\, l^i \cap k)\}}$; $\boldsymbol{l}$ – твірна; $\boldsymbol{t}$ – напрям; $\boldsymbol{k}$ – напрямна (крива); $\boldsymbol{(t,k)}$ – визначник поверхні; $\boldsymbol{(l^i \parallel t,\, l^i \cap k)}$ – закон каркасу.
Поверхні обертання (лінійчаті)			
5. Конічна поверхня обертання			$\boldsymbol{\Phi\{l(l,j;l \cap j=S)(l^i=l \circlearrowright j)\}}$; $\boldsymbol{l}$ – твірна (пряма); $\boldsymbol{j}$ – вісь обертання; $\boldsymbol{(l,j;l \cap j=S)}$ – визначник поверхні; $\boldsymbol{(l^i=l \circlearrowright j)}$ – закон каркасу.
6. Циліндрична поверхня обертання			$\boldsymbol{\Phi\{l(l,j;l \parallel j)(l^i=l \circlearrowright j)\}}$; $\boldsymbol{l}$ – твірна (пряма); $\boldsymbol{j}$ – вісь обертання; $\boldsymbol{(l,j;l \parallel j)}$ – визначник поверхні; $\boldsymbol{(l^i=l \circlearrowright j)}$ – закон каркасу.
7. Однопорожнинний гіперболоїд обертання			$\boldsymbol{\Phi\{l(l,j;l \dot{-} j)(l^i=l \circlearrowright j)\}}$; $\boldsymbol{l}$ – твірна (пряма); $\boldsymbol{j}$ – вісь обертання; $\boldsymbol{(l,j;l \dot{-} j)}$ – визначник поверхні; $\boldsymbol{(l^i=l \circlearrowright j)}$ – закон каркасу

4. ***Гвинтові*** поверхні – утворюються гвинтовим рухом твірної (наприклад, **поверхня прямого гелікоїда**, **похилого гелікоїда** тощо).

5. ***Незакономірні*** – до них відносяться топографічні поверхні, поверхні корпусів літаків, автомобілів тощо.

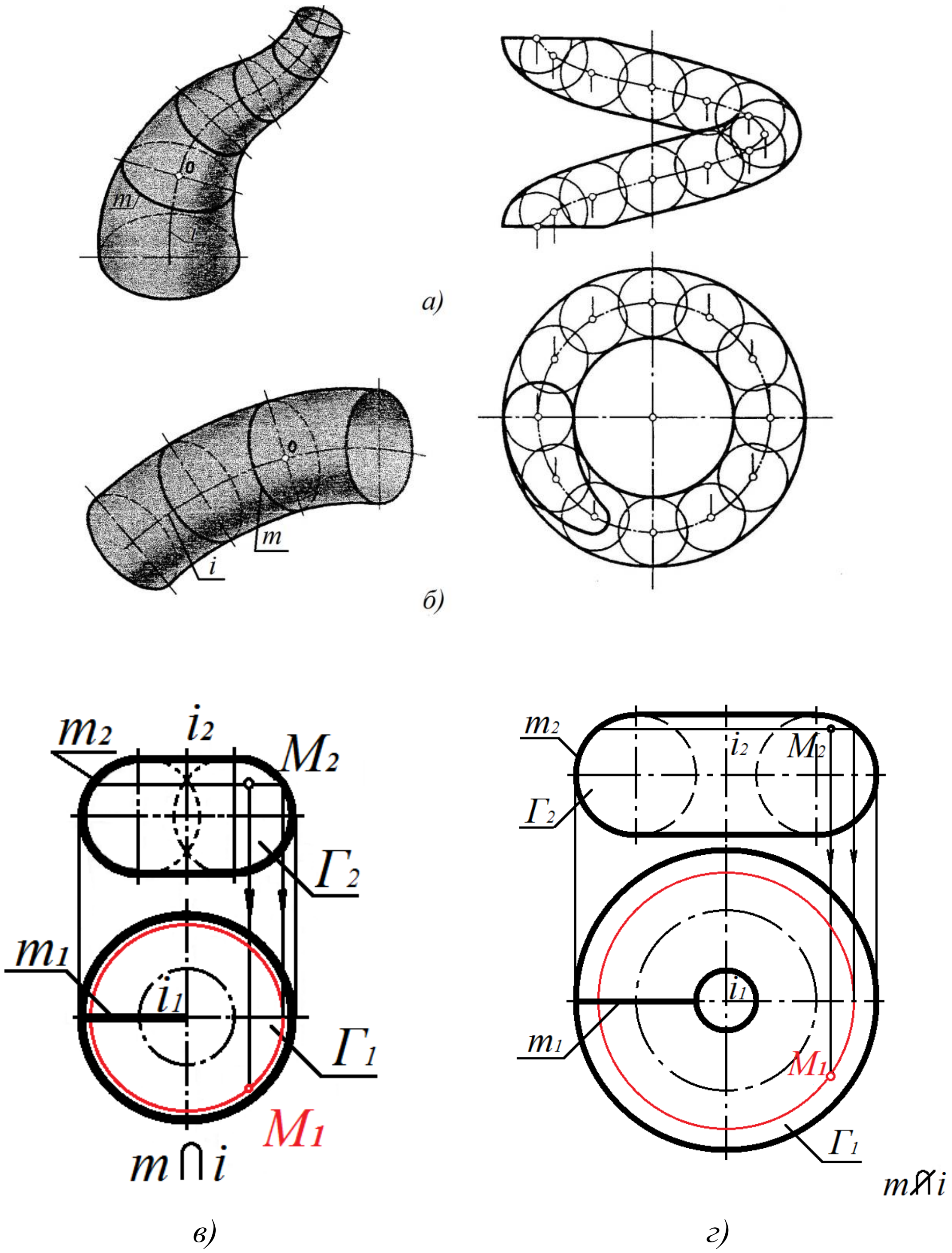


Рис. 2.19. Циклічні поверхні: а) каналова поверхня; б) трубчаста поверхня; в) поверхня закритого тору; г) поверхня відкритого тору

Розглянемо більш детальніше задання, конструювання та зображення деяких поверхонь **(рис. 2.20 – 2.26)**.

Лінійчаті поверхні

Пірамідальна поверхня (рис. 2.20), як відомо – це багатогранник, усі грані якого мають спільну вершину. Оскільки всі бічні грані піраміди – трикутники, піраміда може цілком визначатися заданням її основи та вершини. З точки зору каркасно-кінематичного способу утворення поверхні, замість основи задається ***напрямна*** ламана лінія ***a***, ***вершина*** **S** – це визначник поверхні, який заданий на елементарному кресленні (**рис. 2.20а**), а закон каркасу полягає в тому, що ***твірна l*** повинна перетинати напрямну лінію та постійно проходити через вершину **S** (у символічній формі на рис. 2.20 це записано у вигляді знако-кодової формули). На елементарному кресленні також показано побудову довільної точки **M**, яка належить до поверхні, що у символічній формі супроводжується записом ***просторового алгоритму*** **(ПА)** та ***графічного алгоритму*** **(ГА)** розв'язання цієї задачі. Просторовий алгоритм, повторимось, полягає в тому, що для побудови точки, що належить до поверхні, необхідно побудувати лінію, яка лежить на поверхні. Графічний алгоритм описує наші дії на кресленні.

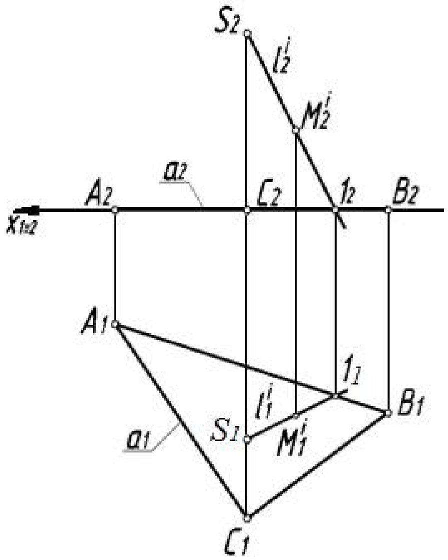
На **рис. 2.20б** показано основне креслення пірамідальної поверхні, тобто елементарне креслення доповнено ребрами багатогранника **(SA)**, **(SB)**, **(SC)** (основне креслення побудовано на трьох площинах проекцій).

Призматична поверхня (рис. 2.21) – як відомо, це багатогранник, усі ребра якого паралельні між собою. З точки зору каркасно-кінематичного способу утворення поверхні задається ***напрямна*** ламана лінія ***a***, ***напрям t***, до якого паралельні всі ребра поверхні, – це визначник поверхні, який заданий на елементарному кресленні (**рис. 2.21а**), а закон каркаса полягає в тому, що ***твірна l*** повинна перетинати напрямну лінію та постійно бути паралельною заданому напряму ***t***.

$\Phi\{\, l(S,a)\,(l^i \supset S,\, l^i\ \mathrm{I}\ \ a)\}$; $a[ABCA]$ **– Пірамідальна поверхня**

(S,a) – визначник поверхні

$(l^i \supset S,\, l^i\ \mathrm{I}\ \ a)$ – закон каркасу



$\lceil M^i \in \Phi$

ПА

I. $\lceil l^i \subset \Phi$

II. $\lceil M^i \in l^i$

ГА

I. 1. $\lceil I_1 \in a_1$

2. $\lceil l_1^i \supset 1_1,\ l_1^i \supset S_1$

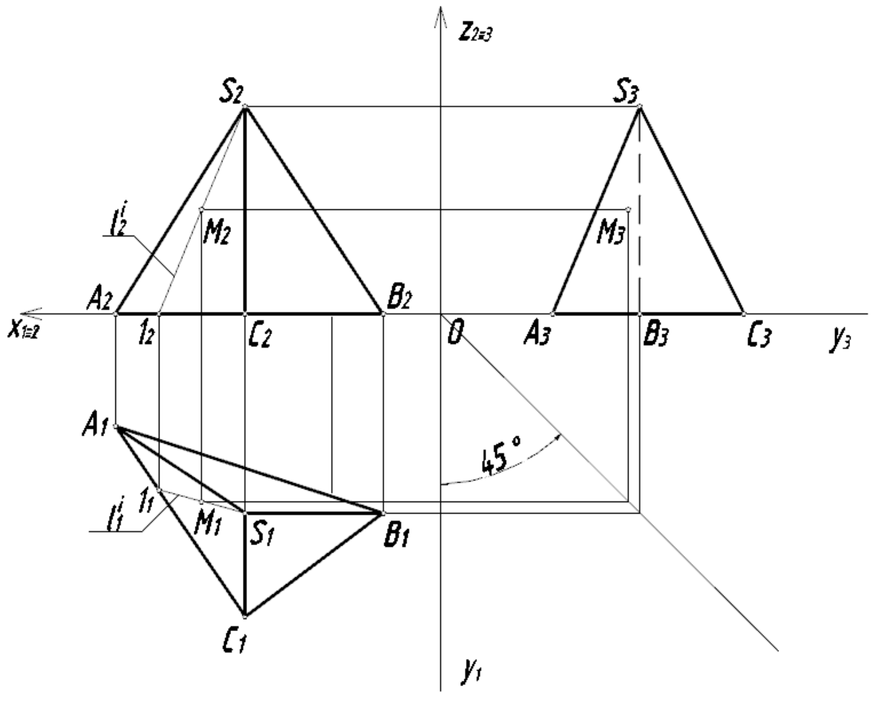
3. $\lceil I_2 = a_2 \cap (1_1, I_2)$

4. $\lceil l_2^i \supset 1_2,\ l_2^i \supset S_2$

II. 1. $\lceil M_2^i \in l_2^i$

2. $\lceil M_1^i \in l_1^i \cap (M_2^i, M_1^i)$

а) Елементарне креслення



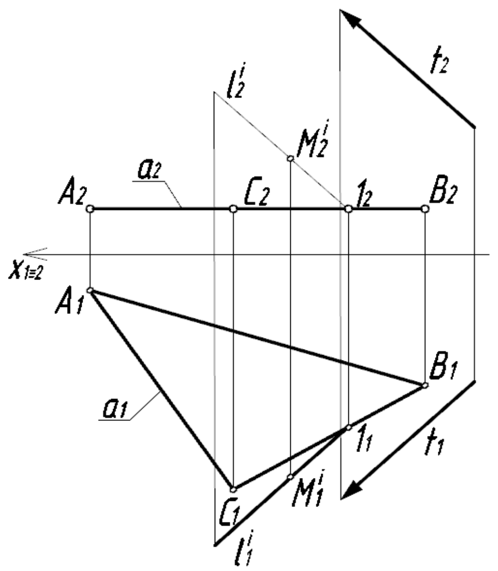
б) Основне креслення

Рис. 2.20. Пірамідальна поверхня

$\Phi\{ l(t,a)\ (l^i \parallel t,\ l^i\ \mathrm{I}\ a)\};\ a[ABCA]$ – **Призматична поверхня**

(a,t) – визначник поверхні

$(l^i\ \mathrm{I}\ a,\ l^i \parallel t)$ – закон каркасу



$\sqrt{M^i} \in \Phi$

ПА

I. $\sqrt{l^i} \subset \Phi$

II. $\sqrt{M^i} \in l^i$

ГА

I. 1. $\sqrt{1_1} \in a_1$

2. $\sqrt{l_1^i} \supset a_2 \cap (1_1,1_2)$

$(1_1,1_2) \supset 1_1;\ (1_1,1_2) \perp x_{1\equiv 2}$

3. $\sqrt{l_1^i} \supset 1_1;\ l_1^i \parallel t_1$

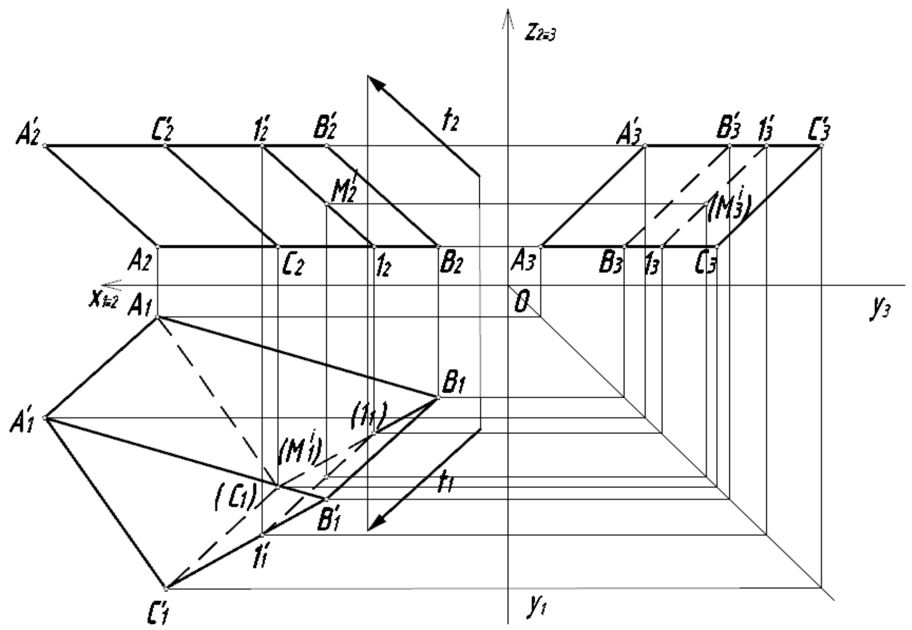
4. $\sqrt{l_2^i} \supset 1_2,\ l_2^i \parallel t_2$

II. 1. $\sqrt{M_1^i} \in l_1^i$

2. $\sqrt{M_2^i} \in l_2^i \cap (M_1^i, M_2^i)$

$(M_1^i, M_2^i) \supset M_1^i; (M_1^i, M_2^i) \perp x_{1\equiv 2}$

а) Елементарне креслення



б) Основне креслення

Рис. 2.21. Призматична поверхня

У символічній формі на **рис. 2.21** це записано у вигляді знако-кодової формули. На елементарному кресленні також показано побудову довільної точки $\mathbf{M}^{i}$, яка належить до поверхні, що супроводжується у символічній формі записом просторового алгоритму **(ПА)** та графічного алгоритму **(ГА)** розв'язання цієї задачі (міркування у даному випадку аналогічні).

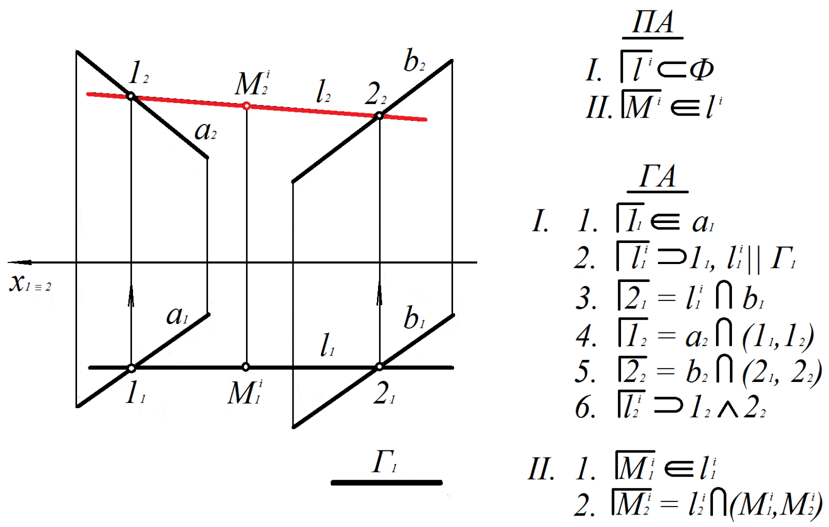
На **рис. 2.21*б*** показана побудова основного креслення призматичної поверхні, тобто елементарне креслення доповнено ребрами багатогранника **(АА')**, **(ВВ')**, **(СС')** (основне креслення побудовано на трьох площинах проекцій).

Гіперболічний параболоїд (рис. 2.22) – це поверхня ***Каталана*** (лінійчата нерозгортна поверхня), як відомо, з двома ***напрямними прямими*** лініями та ***площиною паралелізму***. З точки зору каркасно-кінематичного способу утворення поверхні задаються дві **напрямні** лінії ***a*** та ***b***, а також площина паралелізму $\mathbf{Г(Г_1)}$ – це визначник поверхні, який заданий на елементарному кресленні (**рис. 2.22а**), а закон каркаса полягає в тому, що ***твірна l*** повинна перетинати обидві напрямні лінії та постійно проходити паралельно площині паралелізму $\mathbf{Г(Г_1)}$ (у символічній формі на рис. 2.22 це записано у вигляді знако-кодової формули).

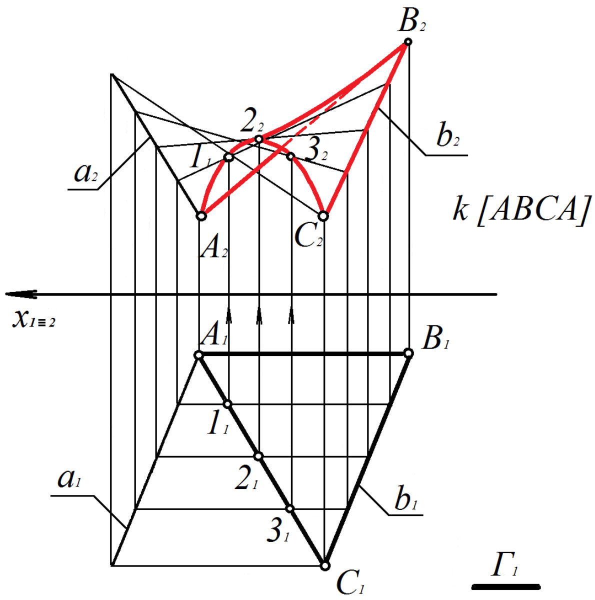
На елементарному кресленні також показано побудову довільної точки $\mathbf{M}^{i}$, яка належить до поверхні, що супроводжується у символічній формі записом просторового алгоритму **(ПА)** та графічного алгоритму **(ГА)** розв'язання цієї задачі. Просторовий алгоритм, повторимось, полягає в тому, що для побудови точки, що належить до поверхні, необхідно побудувати лінію, яка лежить на поверхні. Графічний алгоритм описує наші дії на кресленні.

На **рис. 2.22б** показано основне креслення поверхні гіперболічного параболоїду, тобто елементарне креслення доповнене лініями обрізу – в даному випадку це лінія ***k*** (основне креслення побудовано на двох площинах проекцій).

$\Phi\{ l\,(a, b, \Gamma)\ (l^i \cap a,\ l^i \cap b,\ l^i \cap \Gamma)\ \}$ – Гіперболічний параболоїд



а)



б)

Рис. 2.22. Поверхня гіперболічного параболоїду

Поверхні обертання

Поверхні обертання загального вигляду (рис. 2.23) утворюються обертанням довільної твірної навколо нерухомої осі. З точки зору каркасно-кінематичного способу утворення поверхні задається вісь обертання – пряма лінія ***j***, яка перпендикулярна, наприклад, до площини проекцій $\mathbf{\Pi_1}$, а також

твірна **–** довільна крива лінія ***k*** – визначник поверхні, який заданий на елементарному кресленні (**рис. 2.23а**), а закон каркасу полягає в тому, що ***твірна*** ***k*** повинна обертатись навколо осі ***j*** (у символічній формі на рис. 2.23 це записано у вигляді знако-кодової формули).

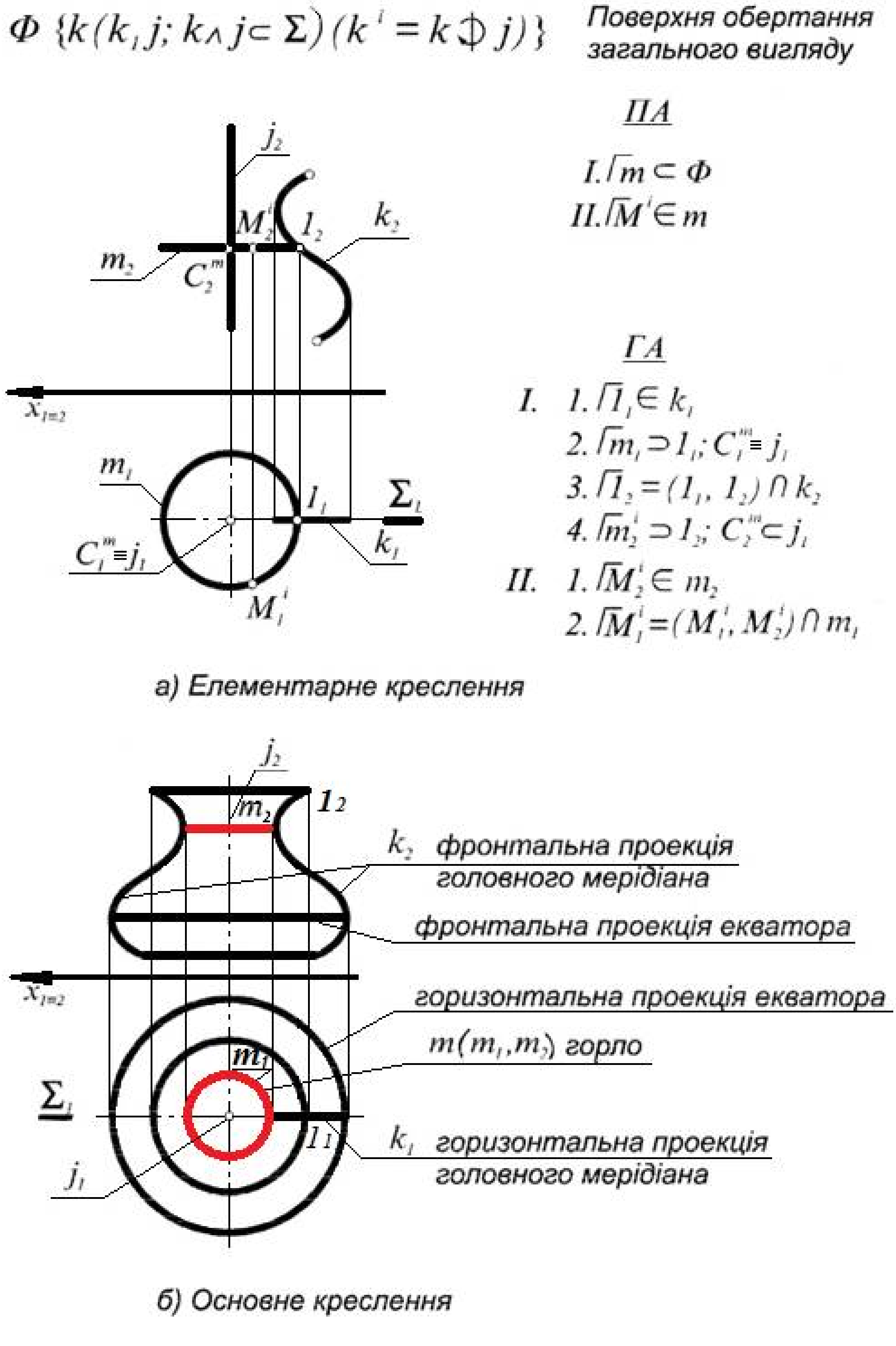


Рис. 2.23. Поверхня обертання загального вигляду

На елементарному кресленні також показано побудову довільної точки $\mathbf{M}^{i}$, яка належить до поверхні, що супроводжується у символічній формі записом просторового алгоритму **(ПА)** та графічного алгоритму **(ГА)** розв'язання цієї задачі. Просторовий алгоритм, повторимось, полягає в тому, що для побудови точки, що належить до поверхні, необхідно побудувати лінію, яка лежить на поверхні. У даному випадку доцільно брати лінію, яку описує кожна точка твірної при її обертанні, така лінія визначається як **паралель – коло, радіус якого дорівнює відстані від осі до твірної**. Графічний алгоритм описує наші дії на кресленні.

На **рис. 2.23б** показано основне креслення поверхні обертання, тобто елементарне креслення, що доповнене проекціями контурних ліній та ліній обрізу (основне креслення побудовано на двох площинах проекцій). Крім цього, на основному креслені поверхні обертання показані проекції характерних ліній: ***екватора***, ***горла*** та ***головного меридіану***.

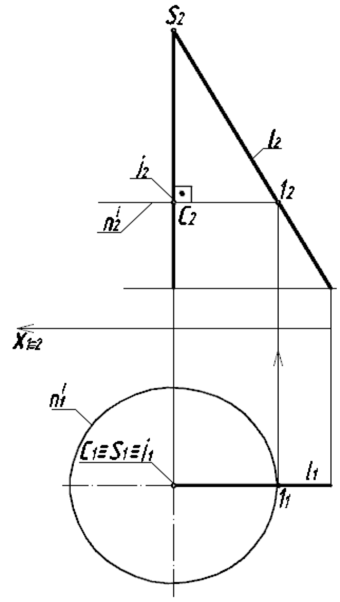
Залежно від виду твірної поверхні обертання поділяються на три групи: лінійчаті поверхні обертання, циклічні поверхні обертання та поверхні обертання другого порядку.

а) ***Лінійчаті поверхні обертання***

Конічна поверхня обертання – це **лінійчата** поверхня обертання **(рис. 2.24)**. Вона утворюється обертанням ***твірної*** – прямої лінії $\boldsymbol{\ell}$ навколо нерухомої осі $\boldsymbol{j}$. З точки зору каркасно-кінематичного способу утворення поверхні задається вісь обертання – пряма лінія $\boldsymbol{j}$, яка перпендикулярна, наприклад, до площини проекцій $\mathbf{\Pi_1}$, а також ***твірна*** – ***пряма*** $\boldsymbol{\ell}$ – це визначник поверхні, який заданий на елементарному кресленні (**рис. 2.24а**), причому $\boldsymbol{\ell} \cap \boldsymbol{j}$ – закон каркасу полягає в тому, що ***твірна*** $\boldsymbol{\ell}$ повинна обертатись навколо осі $\boldsymbol{j}$.

$\Phi\{l(l,j;l \cap j = S)(l^i = l \circlearrowleft j)\}$ – **Конічна поверхня обертання**

$(l,j;l \cap j = S)$ – визначник поверхні; $(l^i = l \circlearrowleft j)$ – закон каркасу



$\boxed{M^i} \in \Phi$

<u>ПА</u>

I. $\boxed{n^i} \subset \Phi$; n – паралель(коло)

II. $\boxed{M^i} \in n^i$

<u>ГА</u>

I. 1. $\boxed{1_1} \in l_1$

2. $\boxed{1_2} = l_2 \cap (1_1,1_2); (1_1,1_2) \perp x_{1\equiv 2}$

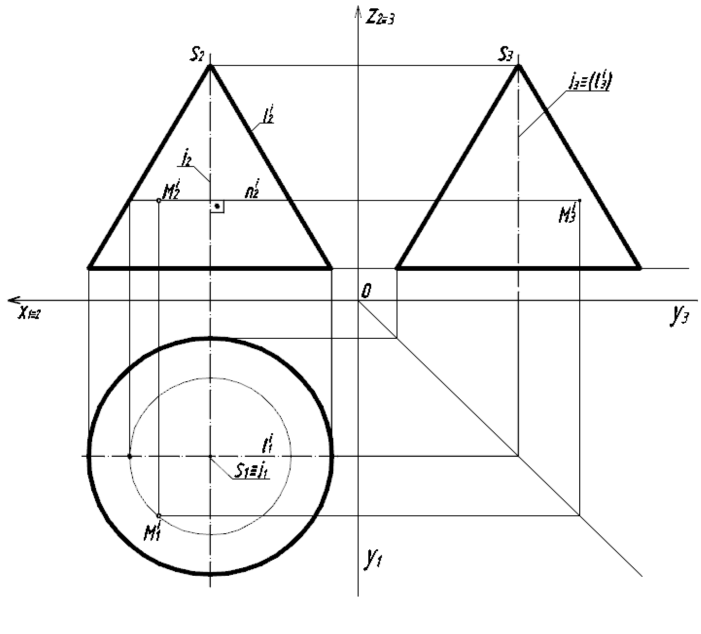
3 $\boxed{n_2^i} \supset 1_2;\ n_2^i \perp j_2; n_2^i \cap j_2 = C_2$

4. $\boxed{n_1^i} \supset 1_1; C_1 \equiv j_1;\ n_1^i$ – коло

II. 1. $\boxed{M_1^i} \in n_1^i$

2. $\boxed{M_2^i} = n_2^i \cap (M_1^i, M_2^i); (M_1^i, M_2^i) \perp x_{1\equiv 2}$

а) Елементарне креслення



б) Основне креслення

Рис. 2.24. Конічна поверхня обертання

На елементарному кресленні показано побудову довільної точки $\mathbf{M}^{i}$, яка належить до поверхні, що супроводжується у символічній формі записом знако-кодової формули, просторового алгоритму **(ПА)** та графічного алгоритму **(ГА)** розв'язання цієї задачі. Для знаходження точки необхідно побудувати лінію, яка лежить на поверхні (у даному випадку доцільно брати лінію ***n*** – паралель – коло, радіус якого дорівнює відстані від осі до твірної).

На **рис. 2.24б** показано основне креслення конічної поверхні обертання на трьох площинах проекцій.

Циліндрична – це **лінійчата** поверхня обертання **(рис. 2.25)**, яка утворюється обертанням ***твірної*** $\boldsymbol{\ell}$ – прямої лінії навколо нерухомої осі ***j***, причому $\boldsymbol{\ell} \parallel \boldsymbol{j}$.

З точки зору каркасно-кінематичного способу утворення поверхні задається вісь обертання – пряма лінія ***j***, яка перпендикулярна, наприклад, до площини проекцій $\boldsymbol{\Pi_2}$, а також ***твірна*** – ***пряма*** $\boldsymbol{\ell}$ – це визначник поверхні, який заданий на елементарному кресленні (**рис. 2.25а**). А закон каркасу полягає в тому, що ***твірна*** $\boldsymbol{\ell}$ повинна обертатись навколо осі ***j***.

На елементарному кресленні показано побудову довільної точки $\mathbf{M}^{i}$, яка належить до поверхні, що супроводжується у символічній формі записом знако-кодової формули, просторового алгоритму **(ПА)** та графічного алгоритму **(ГА)** розв'язання цієї задачі.

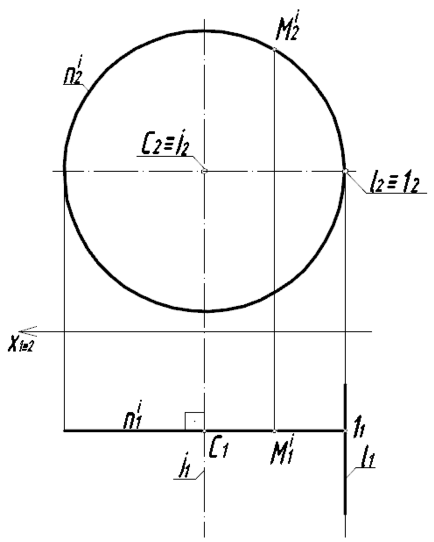
Для знаходження точки необхідно побудувати лінію, яка лежить на поверхні (у даному випадку доцільно брати лінію ***n*** паралель – коло, радіус якого дорівнює відстані від осі до твірної).

На **рис. 2.25б** показано основне креслення циліндричної поверхні обертання на трьох площинах проекцій.

Ф{ l (l , j ; l || j) (l^i = l $\circlearrowleft$ j) } – **Циліндрична поверхня обертання**

(l , j ; l || j) – визначник поверхні ***(j $\perp$ П₂)***

($l^i = l \circlearrowleft j$) – закон каркасу



$\overline{M^i} \in \Phi$

<u>ПА</u>

I. $\overline{l^i} \subset \Phi$

II. $\overline{M^i} \in l^i$

<u>ГА</u>

I. 1. $\overline{1_1} \in a_1$

2. $\overline{l_1^i} \supset a_2 \cap (1_1, 1_2)$

$(1_1, 1_2) \supset 1_1;\ (1_1, 1_2) \perp x_{1\equiv2}$

3. $\overline{l_1^i} \supset 1_1;\ l_1^i \parallel t_1$

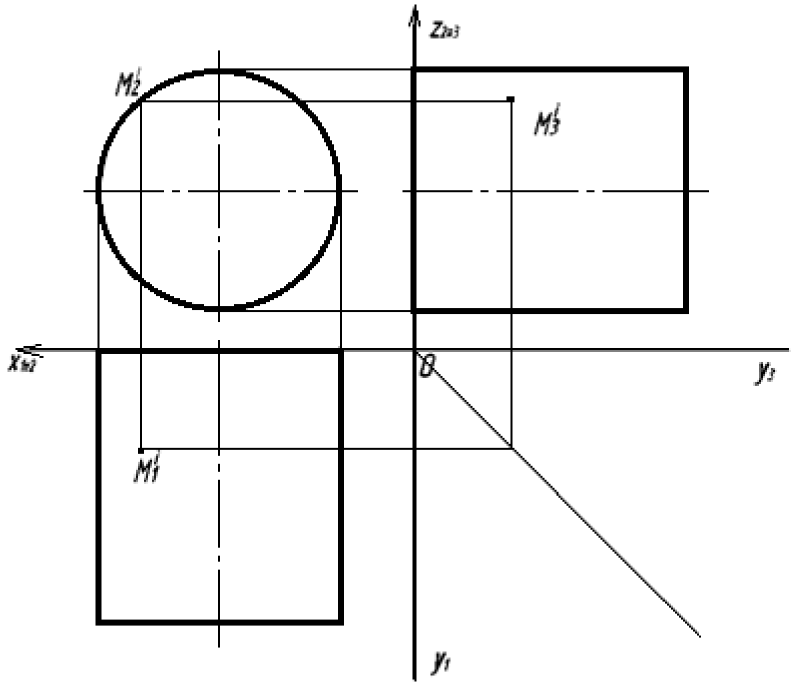
4. $\overline{l_2^i} \supset 1_2,\ l_2^i \parallel t_2$

II. 1. $\overline{M_1^i} \in l_1^i$

2. $\overline{M_2^i} \in l_2^i \cap (M_1^i, M_2^i)$

$(M_1^i, M_2^i) \supset M_1^i; (M_1^i, M_2^i) \perp x_{1\equiv2}$

а) Елементарне креслення



б) Основне креслення

Рис. 2.25. Циліндрична поверхня обертання

б) Циклічні поверхні обертання

Сфера – це **циклічна** поверхня обертання **(рис. 2.26)**. Як відомо, ці поверхні утворюються обертанням ***твірної*** – кола навколо нерухомої осі.

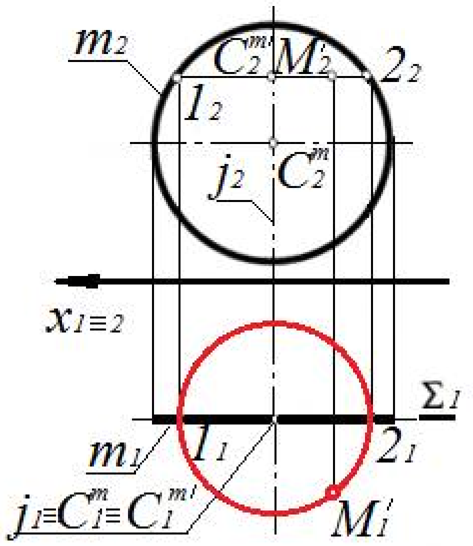
З точки зору каркасно-кінематичного способу утворення поверхні задається ось обертання – пряма лінія $\boldsymbol{j}$, яка перпендикулярна, наприклад, до площини проекцій $\mathbf{\Pi_1}$, а також ***твірна*** коло $\boldsymbol{m}$ – це визначник поверхні**,** який заданий на елементарному кресленні (**рис. 2.26а**). А закон каркасу полягає в тому, що твірна $\boldsymbol{m}$ повинна обертатись навкруг осі $\boldsymbol{j}$ (у символічній формі на рис. 2.26 це записано у вигляді знако-кодової формули).

На елементарному кресленні також показано побудову довільної точки $\mathbf{M}^{i}$, яка належить до поверхні, що супроводжується у символічній формі записом просторового алгоритму **(ПА)** та графічного алгоритму **(ГА)** розв'язання цієї задачі.

Для знаходження точки необхідно побудувати лінію, яка лежить на поверхні (у даному випадку доцільно брати лінію паралель – коло, радіус якого дорівнює відстані від осі до твірної). Графічний алгоритм описує наші дії на кресленні.

На **рис. 2.26б** також показано основне креслення сфери, тобто елементарне креслення, яке доповнене проекціями контурних ліній та ліній обрізу (основне креслення побудовано на трьох площинах проекцій). Крім цього, на основному креслені поверхні показані побудови проекцій довільної лінії $\boldsymbol{k}$, що належить до сфери. Це виконано за допомогою багатьох точок, серед яких необхідно спочатку побудувати характерні точки – $\boldsymbol{1}$, $\boldsymbol{6}$, $\boldsymbol{3}$, $\boldsymbol{3'}$, $\boldsymbol{4}$, $\boldsymbol{4'}$, а потім – допоміжні.

$$\Phi \{ m (m_1 j ; m \wedge j \subset \Sigma ; C^m \subset j) (m^i = m \circlearrowleft j) \}$$ – **Сфера**



<u>*ПА*</u>

$I. \ulcorner m^i \subset \Phi$

$II. \ulcorner M^i \in m^i$

<u>*ГА*</u>

$I.$ $1. \ulcorner 1_2 \subset m_2$

$2. \ulcorner 1_1 = m_1 \cap (1_2, 1_1)$

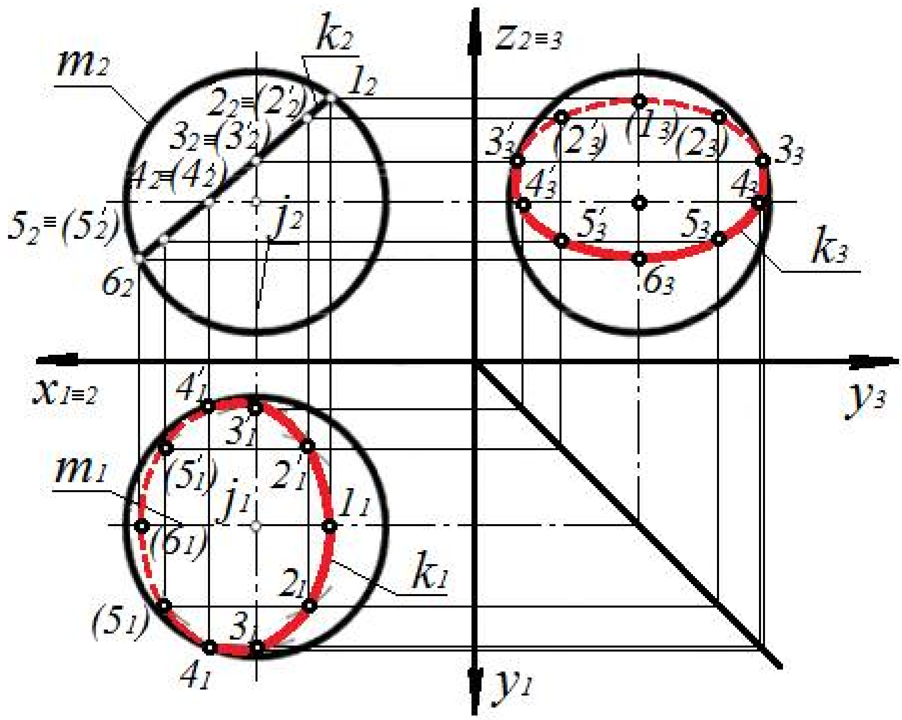
$3. \ulcorner m_1' \supset 1_1; C_1^m \equiv j_1$

$4. \ulcorner m_2' \supset 1_2; m_2' \perp j_2, C_2^{m'} \subset j_2$

$II.$ $1. \ulcorner M_2^i \subset m_2'$

$2. \ulcorner M_1^i = m_1' \cap (M_2^i, M_1^i)$

а) елементарне креслення



б) основне креслення

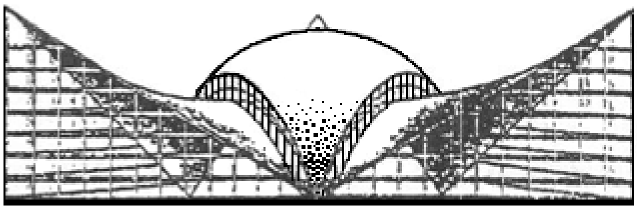
Рис. 2.26. Креслення сфери

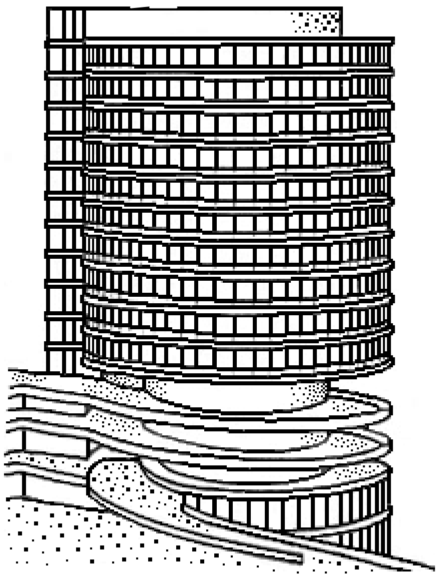
Приклади практичного застосування поверхонь в техніці та будівництві

Всі наведені вище перелічені класи поверхонь широко застосовуються в техніці і будівництві **(рис. 2.27)**.

Поверхні Каталана часто застосовують у будівництві. Наприклад, поверхнями гіперболічного параболоїду є відкоси перехідних ділянок насипів земляного полотна залізної дороги, переходи похилих граней боків набережних в вертикальні. Циліндроїд, наприклад, зустрічається при утворенні поверхні ступенів гвинтових сходів, в буравах, змійовиках. Коноїди, зокрема, кільцеві гвинтові, використовуються в Архімедових гвинтах, муфтах, пружинах. Лінійчату побудову поверхонь з площиною паралелізму широко застосовують при конструюванні оболонок і покрівлі будівель з великими прогонами. Циклічні й конічні поверхні в різноманітних з'єднаннях можна зустрінути в зубчатих колесах, вольницях (підшипниках), у фланцевих и водостічних трубах, в склепіннях для арок. Прикладами циклічних поверхонь є будь-які повітроводи, трубопроводи, тунельні конструкції, оболонки гондол турбореактивних двигунів і газових турбін, що встановлюються на літаках і швидких локомотивах.

Поверхні обертання здобули широке розповсюдження в машинобудуванні й будівельній техніці, що забезпечується простотою їхнього формування. Наприклад, в ободах маховиків і шківів, при виготовленні так званих тороїдальних (глобоїдних) передач використовують поверхню тора. Більш значним прикладом є «Токамак» – тороїдальна магнітна камера – термоядерний реактор, корпус якого уявляє собою полу металеву «баранку» – тор. Форму тора надають міжпланетним орбітальним станціям. Параболоїд обертання є поверхнею параболічних дзеркал, що зустрічаються в прожекторах і фарах автомобілів, де використовується фокальна властивість параболи.





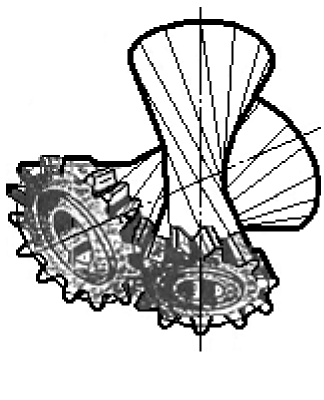


Рис.2.27. Приклади застосування поверхонь

Однопорожнинний гіперболоїд обертання застосовується при утворенні поверхонь будь-яких конструкцій. Ця ідея належить видатному інженеру В.Г.Шухову (1853-1939 рр.). Ним була запропонована конструкція вежі з прямолінійних елементів. Технологічність конструкції разом з ажурною витонченою формою забезпечили широке розповсюдження такої вежі як радіощогл, маяків, водонапірних башт тощо. Форму гвинтової поверхні мають черв'якові фрези, робочі поверхні черв'яків, черв'ячні передачі, пружини. Поверхнею прямого гелікоїду є гвинтові схили (пандуси) багатоповерхівок, гаражів тощо.

2.4. Питання для самоконтролю

1. Сформулювати принципи утворення та критерій наданности ліній на комплексному кресленні.

2. Які прямі лінії ***загального*** *положення відносяться до висхідних і нисхідних (показати на комплексному кресленні)*?

3. Як по комплексному кресленню визначити натуральну величину відрізка прямої та кути його нахилу до площин проекцій (правило прямокутного трикутника)?

4. Які існують прямі лінії ***окремого*** *положення: їхні ознаки та властивості на комплексному кресленні (навести приклади).*

5. Які точки відносяться до конкуруючих і яке значення вони мають на кресленні?

6. Сліди прямої лінії (показати побудови на комплексному кресленні).

7. Взаємне положення двох прямих: ознаки двох паралельних прямих; двох прямих, що перетинаються; двох мимобіжних прямих.

8. Які існують способи задання площини загального положення на комплексному кресленні?

*9. Площини **окремого** положення: назви та ознаки задання на комплексному кресленні (навести приклади).*

10. Умови належності точки та прямої лінії до площини (навести приклади розв'язання на комплексному кресленні).

*11. Які лінії у площині визначаються як **головні**, послідовність їхніх побудов?*

12. Класифікація поверхонь та визначення і приклади поверхонь для кожного класу. Сформулювати критерій наданості поверхні на комплексному кресленні, а також умови належності точки до поверхні.

13. Надати визначення і навести на комплексному кресленні приклади основних понять теорії поверхонь, а саме: твірна, напрямна, знако-кодова формула, визначник та закон каркасу поверхні, елементарне і основне креслення поверхні тощо.

14. Надати визначення і навести приклади на комплексному кресленні лінійчатих розгортних та нерозгортних поверхонь, в тому числі поверхонь Каталана, записати знако-кодову формулу, просторовий та графічний алгоритми побудови точки, що належить до поверхні.

15. Надати визначення і навести на комплексному кресленні приклади поверхонь обертання (лінійчатих, циклічних, другого порядку), записати знако-кодову формулу, просторовий та графічний алгоритми побудови точки, що належить до поверхні. Пояснити назви та побудувати на комплексному кресленні характерні лінії поверхні обертання загального виду: паралель, екватор, головний меридіан тощо.

16. Які поверхні відносяться до гвинтових ? Навести приклади.

17. Навести приклади практичного застосування поверхонь в техніці та будівництві.

РОЗДІЛ 3. ПОЗИЦІЙНІ ЗАДАЧІ. СПОСОБИ ТА АЛГОРИТМИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

3.1. Класифікація позиційних задач

Задачі, в яких будуються проекції точок і ліній, пов'язаних з елементами зображеного об'єкту умовами належності та порядку, називаються ***позиційними*** задачами. До них відносяться:

а) задачі на взаємну належність геометричних образів;

б) задачі на порядок розташування геометричних образів;

в) задачі на взаємний перетин ліній та поверхонь.

Задачі першої групи вже зустрічались при побудові точок і ліній, що належать до площин і поверхонь. Задачі на порядок розташування геометричних образів – досить прості. Наприклад, розглянемо задачу **(рис. 3.1)**: побудувати проекції точки **M**, що належить до сфери; точки **N**, що лежить поза сферою, і точки **P**, що знаходиться у сфері.

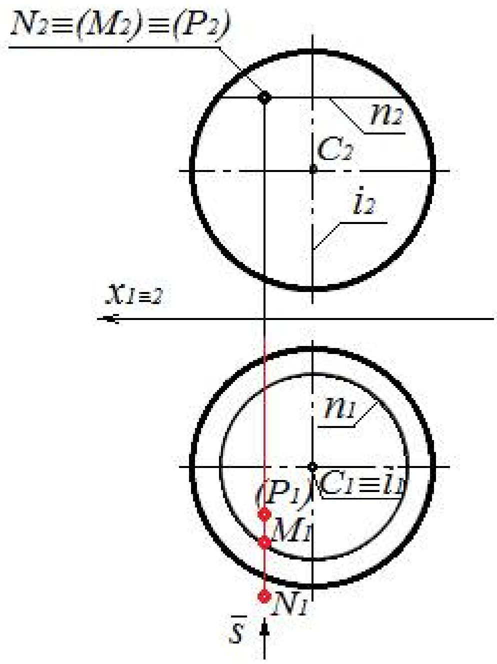


Рис. 3.1. Порядок розташування точок відносно сфери

Розв'язання: через надані фронтальні співпадаючі проекції точок **M**, **N**, **P** провести фронтальну проекцію $\boldsymbol{n_2}$ паралелі $\boldsymbol{n}$ (проекція $\boldsymbol{n_2}$ перпендикулярна до

$\boldsymbol{i_2}$). Далі необхідно побудувати горизонтальну проекцію $\boldsymbol{n_1}$ паралелі $\boldsymbol{n}$ і тоді $\mathbf{M_1}$ належить до $\boldsymbol{n_1}$ ($\mathbf{M_1} = \boldsymbol{n_1} \cap (\mathbf{M_2M_1})$, $\boldsymbol{n_1}$ – коло), т. **М** знаходиться на сфері; $\mathbf{N_1}$ – поза колом $\boldsymbol{n_1}$, тобто поза сферою; $\mathbf{P_1}$ – у сфері (внутрішнє розташування). При цьому порядок розташування точок за напрямом погляду наступний: **N**, **M**, **P** (**N** – перша, видима точка).

Задачі на взаємний перетин геометричних образів потребують більш детальнішого вивчення. Такі задачі будемо називати ***головними позиційними задачами*** **(ГПЗ).**

3.2. Головні позиційні задачі (ГПЗ): алгоритми та методика розв'язання

Класифікація головних позиційних задач (ГПЗ) наведена у **табл. 3.1**:

- ***перша*** **ГПЗ** – це задача на взаємний перетин лінії та **площини (**або **поверхні)**, при рішенні якої необхідно визначити проекції **точки (точок)** перетину;

- ***друга*** **ГПЗ** – це задача на взаємний перетин **двох площин**, **площини з поверхнею**, а також **поверхонь**; при рішенні якої необхідно побудувати проекції **лінії** або **ліній** перетину.

Загальна методика рішення ГПЗ суттєво залежить від того, чи з'являються задані геометричні образи проекціюючими. Звідси визначають три випадки:

- перший випадок – обидва задані геометричні образи займають проекціююче положення ($\perp\!\!\!\perp$, $\perp\!\!\!\perp$);

- ***другий випадок*** – один заданий образ – проекціюючий, а другий – загального положення ($\perp\!\!\!\perp$, $\not\perp\!\!\!\perp$);

- ***третій випадок*** – обидва задані геометричні образи займають загальне положення ($\not\perp\!\!\!\perp$, $\not\perp\!\!\!\perp$).

Таблиця 3.1.

Класифікація головних позиційних задач (ГПЗ)

<table>
<tr><th colspan="3">Перша ГПЗ</th><th colspan="3">Друга ГПЗ</th></tr>
<tr><td colspan="3">задачі на взаємний перетин лінії та площини (або поверхні); необхідно визначити проекції точки (точок) перетину</td><td colspan="3">задачі на взаємний перетин двох площин, площини з поверхнею, а також поверхонь; необхідно побудувати проекції лінії або ліній перетину</td></tr>
<tr><th colspan="2">Перший випадок</th><th colspan="2">Другий випадок</th><th colspan="2">Третій випадок</th></tr>
<tr><td colspan="2">Обидва геометричних образи займають проекціююче положення</td><td colspan="2">Один геометричний образ займає проекціююче положення, а другий – не проекціюючий</td><td colspan="2">Обидва геометричних образи займають непроекціююче положення (загальне)</td></tr>
<tr><td colspan="2">АЛГОРИТМ: якщо задані геометричні образи проекціюючі, то обидві проекції шуканого спільного елемента (точки (точок) чи лінії (ліній) перетину) на кресленні вже існують. Вони належать основним проекціям заданих геометричних образів. Для розв’язання задачі їх треба виділити та позначити.</td><td colspan="2">АЛГОРИТМ: якщо один геометричний образ проекціюючий, а другий – загального положення, то одна проекція шуканого спільного елементу на кресленні вже є: вона частково чи повністю належить до основної проекції проекціюючого образу. Другу проекцію шуканого спільного елементу знаходять за принципом належності до непроекціюючого образу.</td><td colspan="2">АЛГОРИТМ: якщо задані обидва геометричних образи непроекціюючі, то для розв’язання задачі необхідно використовувати допоміжні січні площини або поверхні – посередники ($Л^i$)</td></tr>
</table>

Нагадаємо, що ***проекціюючим*** є такий геометричний образ, при проекціюванні якого на будь-яку площину проекцій утворюється проекція, що має вимірність на одну одиницю менше, ніж наданий геометричний образ (див. **рис. 3.2**). Такі проекції визначаються як **основні** – a_2, $Г_2$, Θ_1, Φ_2.

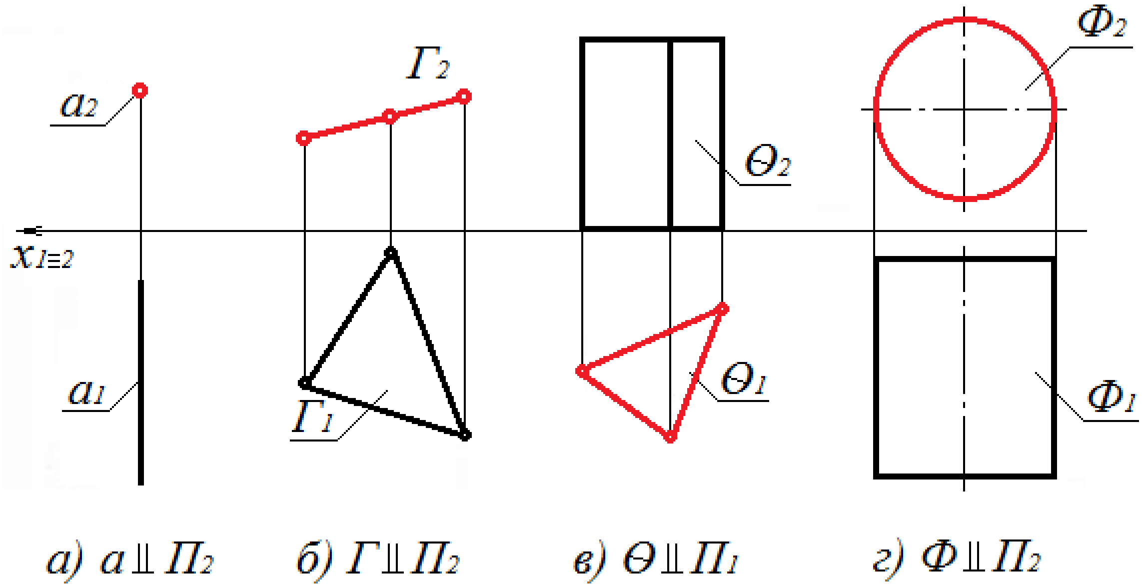


Рис. 3.2. Проекціюючі геометричні образи на комплексному кресленні

3.3. Розв'язання ГПЗ в окремих випадках. Конічні перерізи

Для кожного випадку **ГПЗ** формулюється алгоритм розв'язання (див. **табл. 3.1**).

Розглянемо наступні задачі:

Задача 1 **(рис. 3.3).** Побудувати проекції точки перетину прямої лінії **(AB)** з площиною ***Г(b || d)***.

Розв'язання. Умовою задана пряма **(AB)**, що є горизонтально - проекціюючою прямою, та площина ***Г (b || d)***, яка займає фронтально - проекціююче положення. Це **перша ГПЗ у першому випадку**.

Розмірковуємо: шукана точка **M** – це спільний елемент, що належить як до прямої, так і до площини. Тоді на $\mathbf{П_1}$ горизонтальна проекція $\mathbf{M_1}$ точки **M** належить до $(\mathbf{A_1\,B_1})$, а на $\mathbf{П_2}$ – фронтальна проекція $\mathbf{M_2}$ знаходиться у точці перетину основної проекції $Г_2$ площини $Г$ з фронтальною проекцією $(\mathbf{A_2\,B_2})$

прямої **(AB)**. Таким чином, згідно до алгоритму на кресленні обидві проекції точки перетину **M** вже є, вони належать до основних проекцій наданих геометричних образів. Для розв'язання задачі їх необхідно виділити та позначити.

Задача розв'язана.

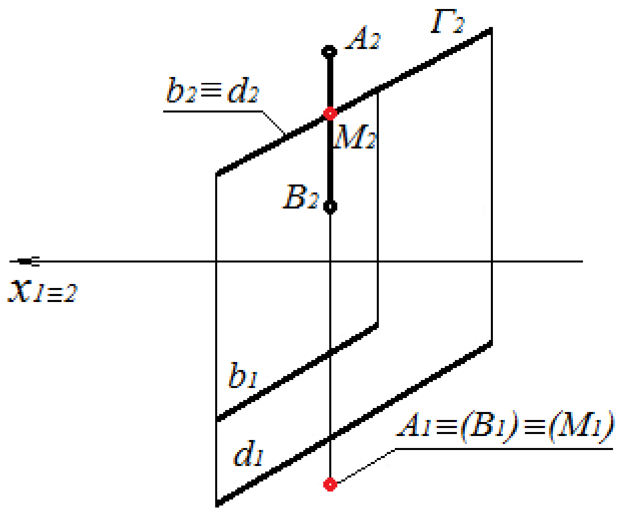


Рис. 3.3. Задача 1

Задача 2 **(рис. 3.4)**. Побудувати проекції лінії перетину двох площин: ***Г*** ***(Г$_1$)*** і ***Δ*** ***(Δ$_1$)***.

Розв'язання. Умовою надані дві площини**,** що є горизонтально-проекціюючими. Результатом перетину двох площин завжди є пряма лінія. Оскільки на **П$_1$** основні проекції наданих площин – прямі, то вони перетинаються у спільній точці. Таким чином, шукана пряма має на **П$_1$** проекцію у вигляді точки – ознака горизонтально-проекціюючої прямої **(це друга ГПЗ у першому випадку)**.

Задача розв'язана.

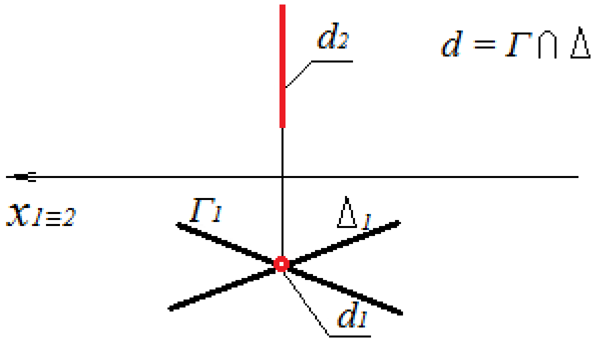


Рис. 3.4. Задача 2

***Задача 3* (рис. 3.5)**. Побудувати проекції лінії перетину двох циліндричних поверхонь **Ф** і **Ф**' та визначити видимість.

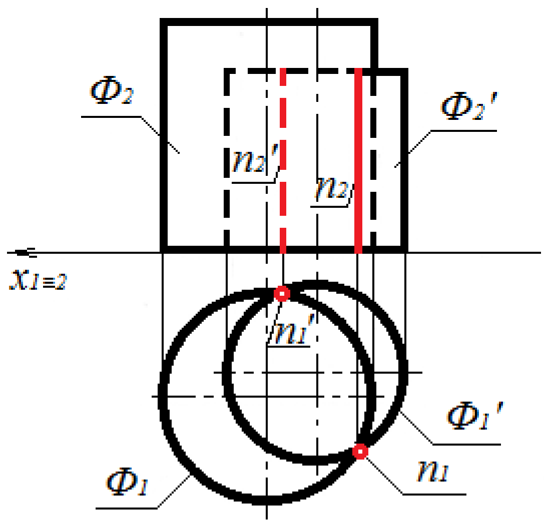


Рис. 3.5. Задача 3

Розв'язання. Умовою надані дві горизонтально-проекціюючі циліндричні поверхні – це також **2-га ГПЗ у першому випадку**. Тому на **П**$_1$ проекції лінії перетину знаходяться у точках перетину *основних* проекцій, тобто у двох точках перетину двох кіл. У такому випадку лінія перетину двох циліндричних поверхонь є дві прямі лінії – твірні. На **П$_2$** знаходимо їх за допомогою ліній проекційного зв'язку. Видимою буде та твірна, яка є видимою для обох поверхонь.

Задача розв'язана.

Розглянемо розв'язання у наступних задачах **1-ої та 2-ої ГПЗ для другого випадку** (алгоритм див. у **табл. 3.1**).

Задача 4 **(рис. 3.6)**. Побудувати проекції точки **М** перетину прямої лінії ***l*** з площиною **Δ(АВС)** та визначити видимість.

$$M = l \cap \Delta\ (ABC)$$

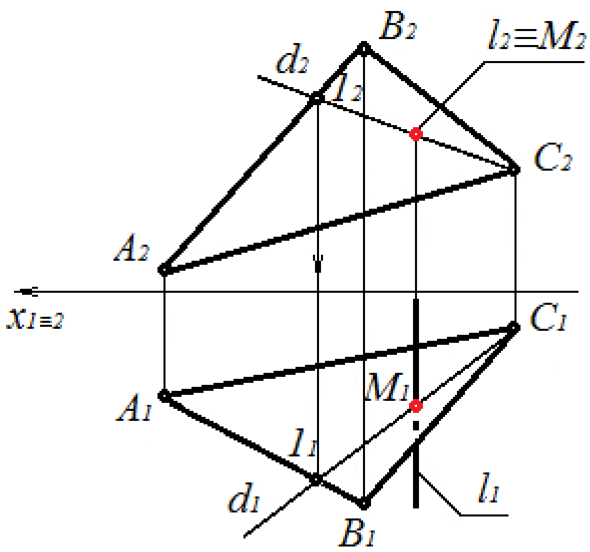


Рис. 3.6. Задача 4

Розв'язання. Умовою задана пряма ***l***, що є фронтально-проекціюючою прямою, та площина **Δ (АВС)**, яка займає загальне положення. Це **1-ша ГПЗ** у **другому випадку**.

Розмірковуємо: шукана точка **М** – це спільний елемент, що належить як до прямої, так і до площини. Тоді на **П$_2$** фронтальна проекція **М$_2$** точки **М**

належить до $\boldsymbol{l_2}$, а на $\mathbf{\Pi_1}$ горизонтальна проекція $\mathbf{M_1}$ знаходиться як точка, що також належить і до площини **Δ(ABC)**. Тобто спочатку на фронтальній площині проекцій через $\mathbf{M_2}$ необхідно побудувати проекцію $\boldsymbol{d_2}$ довільної прямої $\boldsymbol{d}$, що належить до площини **Δ (ABC)**, а далі знайти проекцію $\boldsymbol{d_1}$ цієї прямої на $\mathbf{\Pi_1}$. Нарешті, у точці перетину $\boldsymbol{d_1}$ з вихідною прямою $\boldsymbol{l_1}$ і знаходиться проекція $\mathbf{M_1}$ шуканої точки ***M***.

Отже, згідно до алгоритму, на кресленні одна проекція точки перетину ***M*** вже є. Вона належить до *основної* проекції наданого проекціюючого геометричного образу. А друга проекція точки знаходиться за її належністю до непроекціюючого образу.

Видимість визначається за допомогою ***конкуруючих*** точок.

Задача розв'язана.

Далі розглянемо деякі теоретичні ***положення***. Побудова лінії перетину поверхні площиною є досить важливою прикладною задачею, що широко застосовується у всіх галузях техніки та будівництва (у побудові розрізів та перерізів різноманітних технічних деталей, конструктивних вузлів, розрізів та планів будівель, архітектурних фрагментів тощо). При перерізі поверхонь площиною утворюються ***плоскі лінії***: для ***багатогранних*** поверхонь – це ***ламані***, вершини яких є точки перетину ребер з наданою площиною, а для ***кривих*** поверхонь – це плоскі ***криві лінії***, кожна точка якої є точкою перетину лінії каркасу поверхні з січною площиною.

Розглянемо питання ***«Конічні перерізи»*** як приклад розв'язання позиційної задачі на перетин ***проекціюючої*** площини з конічною поверхнею обертання (**2-га ГПЗ другий випадок**) – це спрощений варіант постановлення задачі, на якому можна побачити усі особливості побудови перерізів.

Можливі п'ять наступних випадків конічних перерізів **(рис. 3.7)**:

– якщо січна площина перпендикулярна до осі поверхні, то у перерізі утворюється ***коло***;

– якщо січна площина проходить через вершину поверхні, то у перерізі утворюються дві ***прямі*** лінії – ***твірні***;

– якщо січна площина перетинає усі твірні та не перпендикулярна до осі поверхні, то у перерізі утворюється ***еліпс***, який може бути замкненою або розімкненою фігурою;

– якщо січна площина проходить паралельно до однієї твірної поверхні, то у перерізі утворюється ***парабола***;

– якщо січна площина проходить паралельно до двох твірних поверхні, то у перерізі утворюється ***гіпербола***.

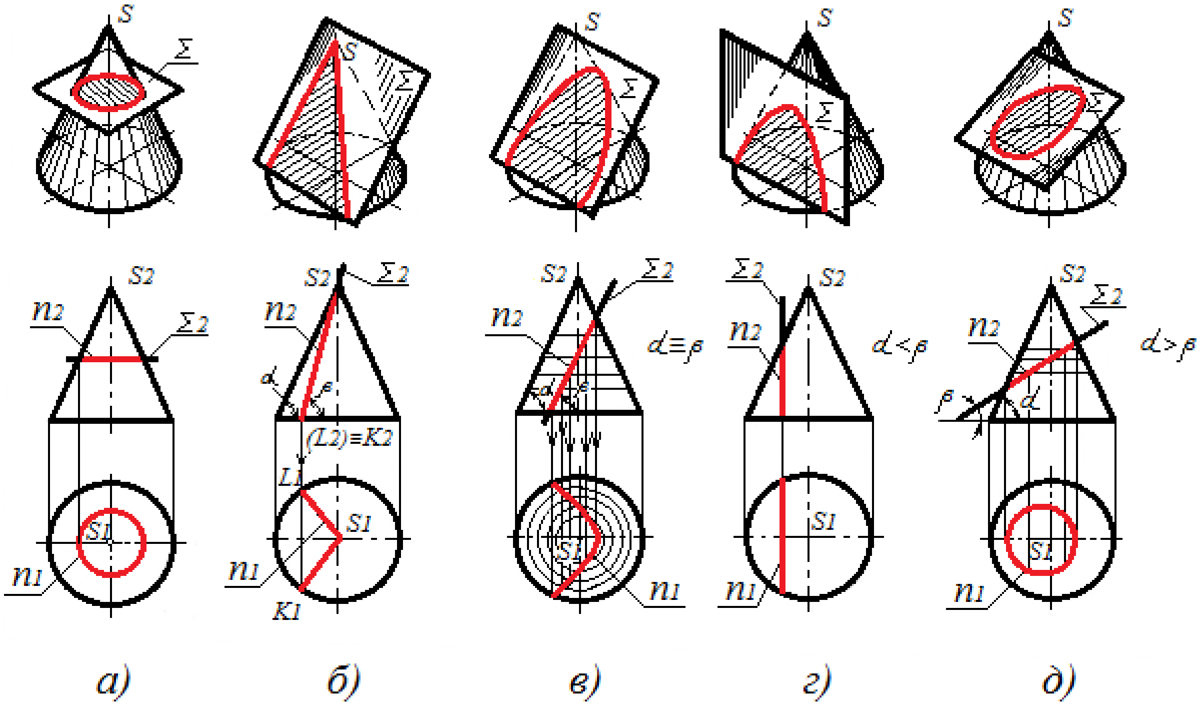


Рис. 3.7. Конічні перерізи:

а) – коло; *б)* – твірні – прямі лінії; *в)* – парабола; *г)* – гіпербола; *д)* – еліпс

Задача 5 **(рис. 3.8)**. Побудувати проекції лінії перетину ***n*** січної площини ***Θ*** з конічною поверхнею ***Φ*** та визначити видимість.

Розв'язання: розглянемо побудову проекцій лінії перетину січної фронтально проекціюючої площини з конічною поверхнею (див. рис. 3.8). За алгоритмом розв'язання на фронтальній площині проекцій $\mathbf{П_2}$ одна проекція лінії перетину вже є – це відрізок прямої, а горизонтальна проекція лінії перетину будується за окремими точками, що належать до поверхні: ***1***, ***2***, ***3*** – ***характерні*** точки, а ***4 – 9*** – ***проміжні*** точки, які знаходяться за допомогою паралелей конічної поверхні.

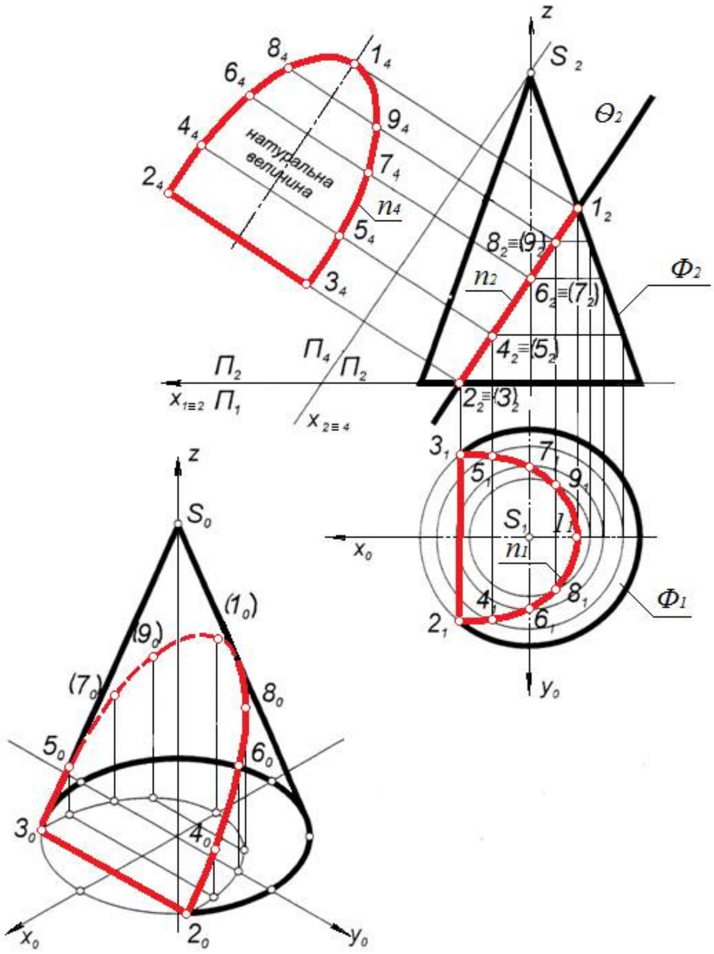


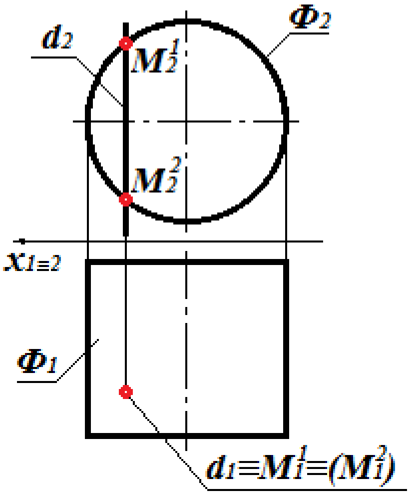
Рис. 3.8. Задача 5

Усі знайдені точки послідовно з'єднуються між собою, в результаті чого утворюється ***еліпс***, який на $\boldsymbol{П_1}$ є видимою фігурою (з доказом можна ознайомитись, наприклад, у книзі Бахвалов С.В. «Аналитическая геометрия», М.:1970, с.134-136). На рис. 3.8 також показано наочне зображення лінії перетину площини з конічною поверхнею.

На **рис. 3.9 (3.9.1 і 3.9.2)** наведені приклади розв'язання **ГПЗ** в *окремих* випадках.

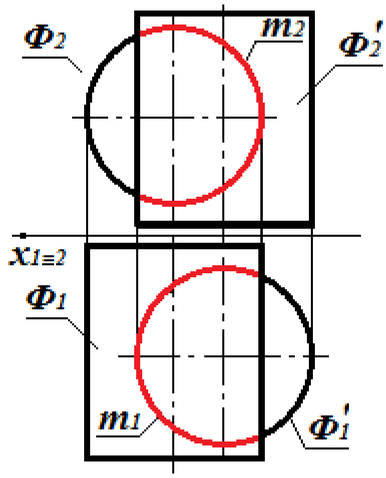
ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ГПЗ В ОКРЕМИХ ВИПАДКАХ

$M^i = d \cap \Phi$



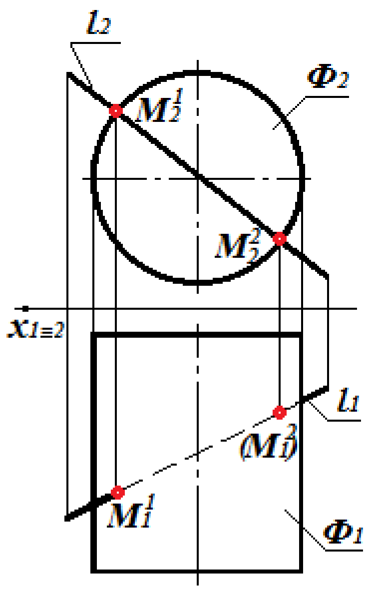
а) І ГПЗ 1-й випадок

$m = \Phi \cap \Phi'$



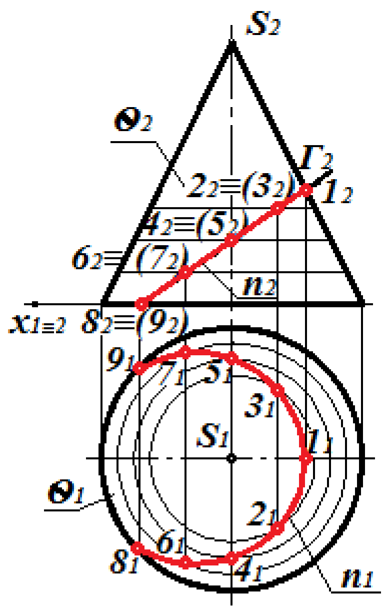
б) ІІ ГПЗ 1-й випадок

$M^i = l \cap \Phi$



в) І ГПЗ 2-й випадок

$n = \Gamma \cap \Theta$



г) ІІ ГПЗ 2-й випадок

Рис. 3.9.1. Приклади розв'язання **ГПЗ** в *окремих* випадках

На **рис. 3.9.2*а*** наведений приклад побудови проекції лінії перетину фронтально-проекціюючої площини **Г** з пірамідальною поверхнею **Θ**, на

рис. 3.9.2*б* – приклад побудови проекції лінії перетину горизонтально-проекціюючої площини **Г** з циліндричною поверхнею загального положення **Ф**, а на **рис. 3.9.2*в*** – приклад побудови проекції лінії перетину горизонтально-проекціюючої циліндричної поверхні **Θ** з площиною загального положення **Т**.

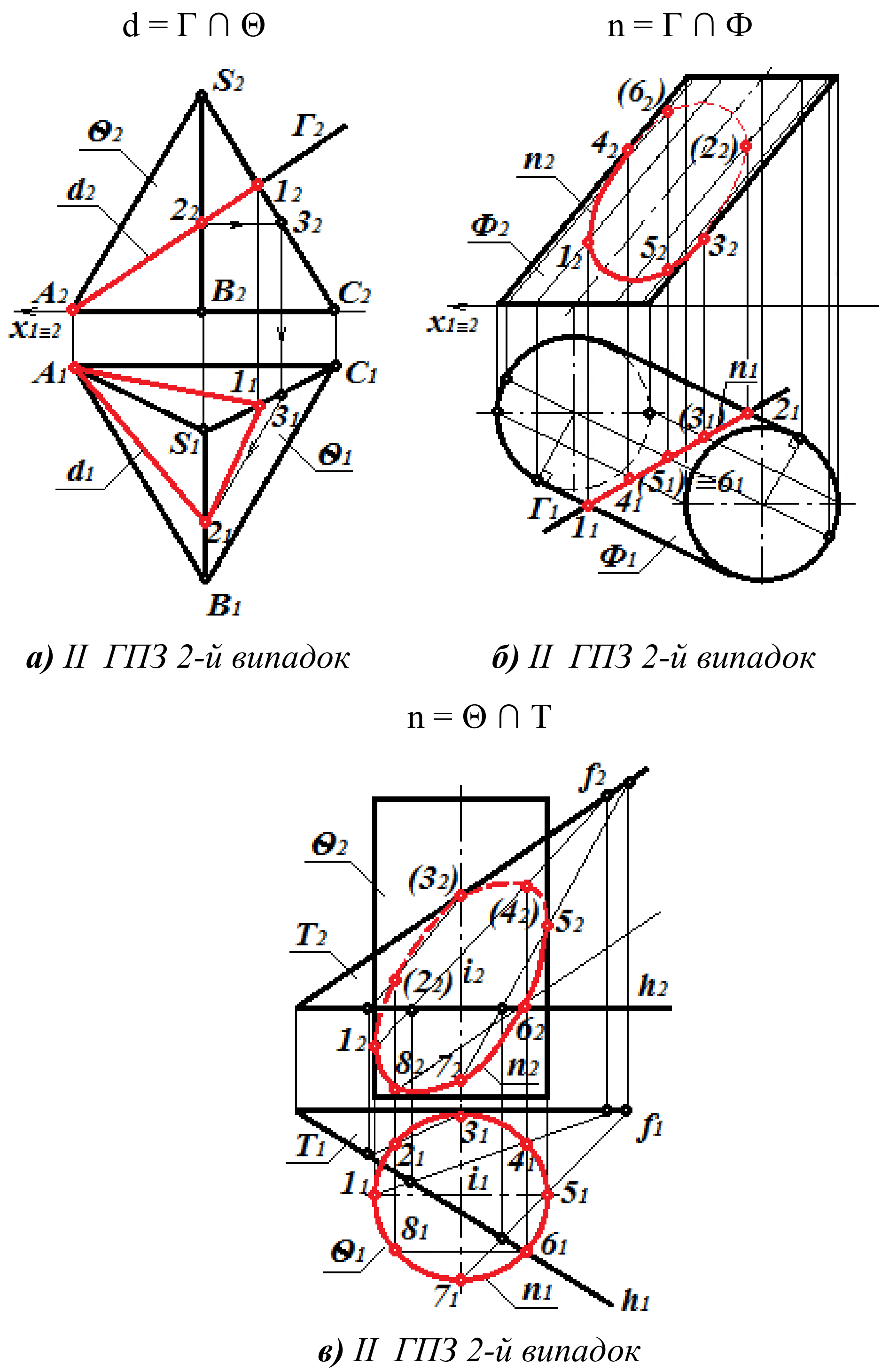


Рис. 3.9.2. Приклади розв'язання позиційних задач

3.4. Перетин двох багатогранних та двох плавних (кривих) поверхонь

Лінія перетину двох багатогранних поверхонь є просторова ламана лінія (або лінії), яка у деяких випадках може розділятися на окремі частини, у тому числі плоскі багатокутники. Якщо один багатогранник частково перетинається другим, то такий вид перетину визначається як ***неповний*** перетин – тоді шукана ламана є замкненою лінією. В іншому випадку перетин визначається як ***повний***, і лінія перетину складається з двох замкнених ламаних. Для побудови шуканої лінії можна виділити два способи:

а) ***спосіб ребер***: за його допомогою знаходяться вершини ламаної як точки перетину ребер одного багатогранника з гранями іншого (1-ша ГПЗ);

б) ***спосіб граней***: таким способом знаходяться окремі ланки шуканої ламаної як лінії перетину граней обох багатогранників між собою (2-га ГПЗ). Можна застосовувати й комбінований спосіб.

Найбільш поширений є спосіб ребер, причому з'єднуються тільки ті дві точки, які належать до однієї і тієї ж грані кожного багатогранника. У процесі з'єднання точок необхідно визначати видимість. **Видимою** буде та ланка, що є видимою як для одного багатогранника, так і для іншого.

Розглянемо наступну задачу **(рис. 3.10*а*)**: побудувати проекції лінії перетину **пірамідальної** поверхні $\boldsymbol{\Phi}$ з **призматичною** $\boldsymbol{\Theta}$ та визначити видимість **(це 2-га ГПЗ другий випадок)**.

Умовою задачі надано неповний перетин поверхонь, і шукана ламана є замкненою лінією.

Призматична поверхня є фронтально-проекціюючою, тому на $\mathbf{\Pi_2}$ одна проекція шуканої ламаної вже є, вона частково збігається з основною проекцією $\boldsymbol{\Theta_2}$. Горизонтальну проекцію лінії перетину будемо знаходити за допомогою способу ребер. Тобто необхідно відмітити на $\mathbf{\Pi}_2$ точки перетину ребер обох багатогранників з гранями: тт. **1**, **2** – це точки перетину ребер **(SC)** і **(SD)** з гранню **(LL'M'M)**; **3**, **4** – точки перетину ребра **(LL')** з гранями **(SBC)** і **(SDE)**; **5**, **6** – точки перетину ребер **(SB)**, **(SE)** з гранню **(KK'L'L)**; **7**, **8** – точки перетину ребра **(KK')** з гранями **(SAB)** і **(SAE)**; **9**, **10** – точки перетину ребер **(SB)**, **(SE)** з гранню **(KK'M'M)**; **11**, **12** – точки перетину ребер **(SC)**, **(SD)** з гранню **(KK'M'M)**.

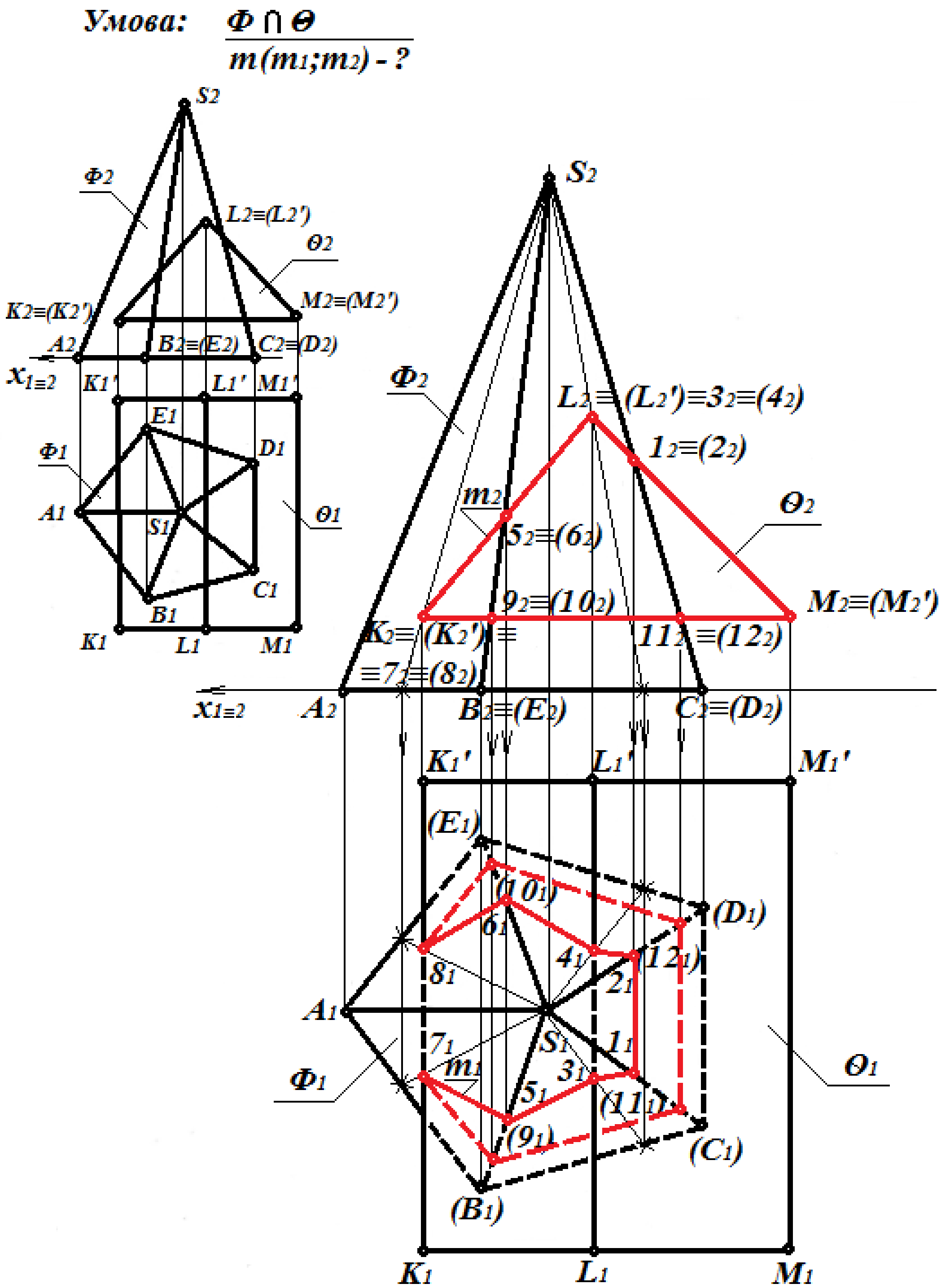


Рис. 3.10*а*. Задача: побудувати проекції лінії перетину пірамідальної поверхні Ф з призматичною Θ

За належністю точок до відповідних ребер знаходимо їхні горизонтальні проекції, тобто **1_1, 11_1** – на **(S_1C_1)**; **2_1, 12_1** – на **S_1 D_1**; **5_1, 9_1** – на **S_1B_1**; **6_1, 10_1** – на **S_1E_1**. Проекції **3_1, 4_1, 7_1, 8_1**, що належать відповідно до ребер **(LL')** і **(KK')**, знаходяться за допомогою додаткових твірних пірамідальної поверхні (послідовність побудов зрозуміла з рис. 3.10 ***а***). Точки з'єднуються між собою послідовно: **1-2-4-6-8** та **1-3-5-7** – це видимі ланки шуканої ламаної, а **8-10-12-11-9-7** – невидима частина.

Задача розв'язана.

Задачу, наведену на **рис. 3.10*б*** розглянути самостійно: побудувати проекції лінії перетину трьохгранної піраміди з трьохгранною призмою.

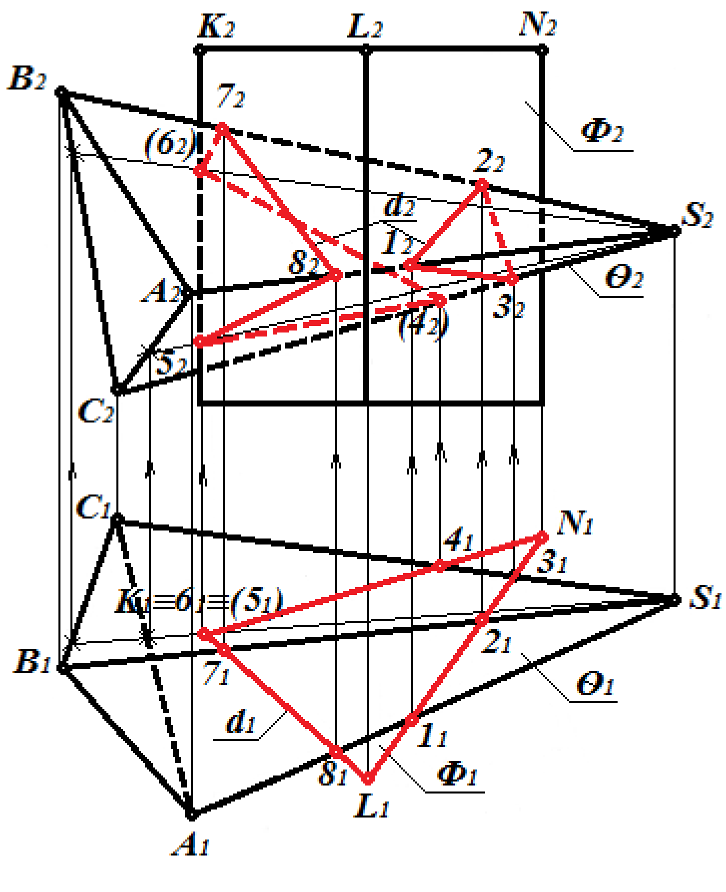


Рис. 3.10*б*. Задача: побудувати проекції лінії перетину пірамідальної поверхні **Θ** з призматичною **Ф**

Задача* 6 (рис. 3.11)**. Побудувати проекції лінії перетину двох **призматичних** поверхонь ***Θ і ***Φ*** та визначити видимість (розглянути самостійно).

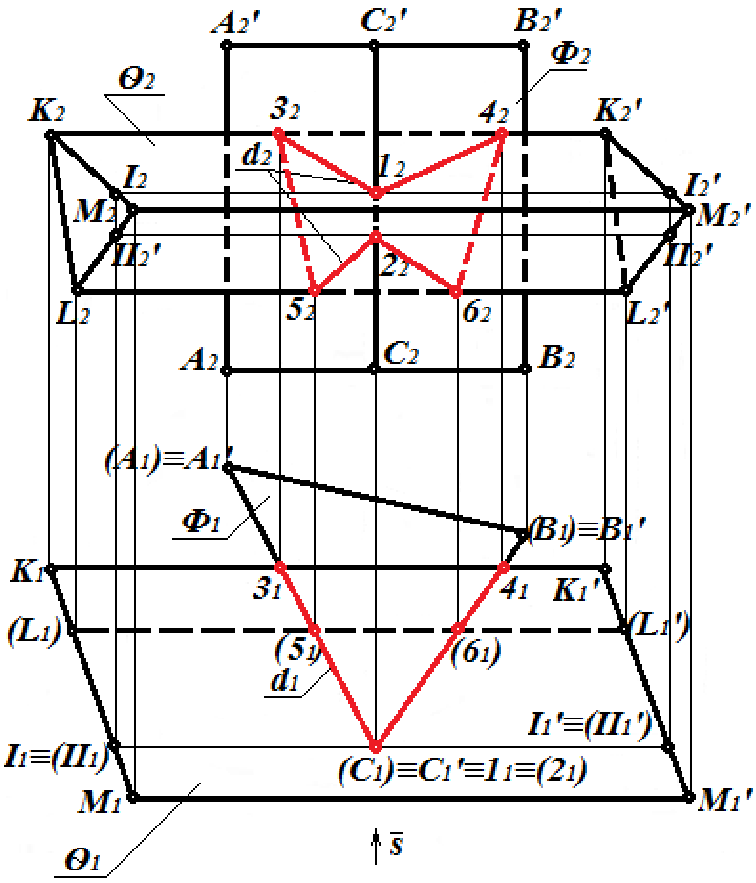


Рис. 3.11. Задача 6

Лінія перетину двох поверхонь другого порядку у загальному випадку є просторова **крива лінія** четвертого порядку (біквадратна крива), яка в деяких випадках може розпадатися на окремі частини: дві *плоскі криві* другого порядку, на *пряму лінію* та *криву третього порядку* тощо. Шукана крива будується як множина точок перетину ліній каркасів обох поверхонь, що перетинаються. Причому необхідно чітко дотримуватися послідовності з’єднання та видимість точок. Нагадаємо, що видимою є точка, яка буде видима як для однієї поверхні, так і для іншої.

Розглянемо наступну **задачу 7 (рис. 3.12)**: побудувати проекції лінії перетину **циліндричної** поверхні ***Φ*** з **конічною *Ω*** та визначити видимість **(це**

2-га ГПЗ другий випадок).

Умовою задачі надано неповний перетин поверхонь, і шукана лінія є замкненою кривою лінією ***n***. Циліндрична поверхня є фронтально-проекціюючою, тому на Π_2 ***одна*** проекція n_2 шуканої лінії ***n*** вже є, вона частково збігається з основною проекцією Φ_2.

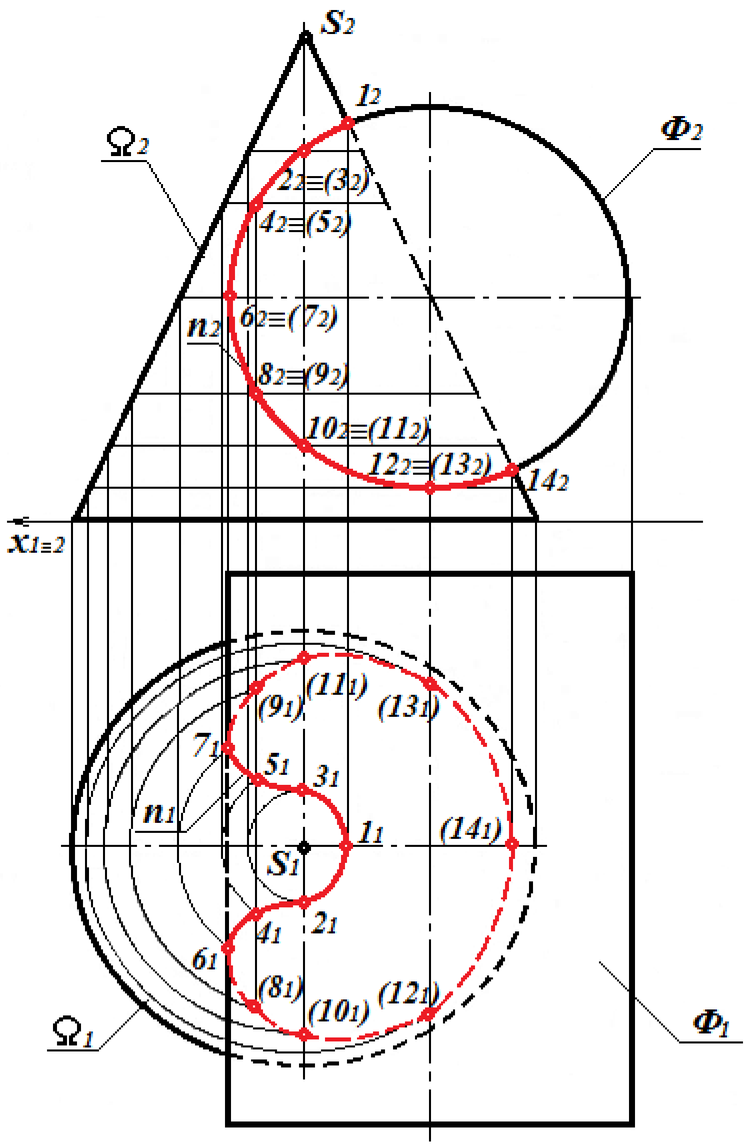


Рис. 3.12. Задача 7

Горизонтальну проекцію n_1 лінії перетину ***n*** будемо знаходити за допомогою окремих точок. Тобто спочатку необхідно відмітити на Π_2 характерні точки **1**, **14**, а також **6**, **7** – точки межі видимості шуканої лінії на Π_1, що знаходяться за допомогою паралелі конічної поверхні. Всі останні точки: **2 - 5**, **8 - 13** – проміжні, які також знаходяться за допомогою додаткових паралелей конічної поверхні (послідовність побудов зрозуміла з рис. 3.12). Точки з’єднуються між собою послідовно: **1 - 2 - 4 - 6** і **1 - 3 - 5 - 7** – це видима частина шуканої кривої лінії ***n***, а останні точки – це невидима частина лінії.

Задача розв’язана.

На **рис. 3.13** наведений приклад розв’язання задачі взаємного перетину циліндричної поверхні **Ф** і частини поверхні відкритого тору ***Ω***, з яким рекомендується розібратися самостійно.

$$\Gamma n = \Phi \cap \Omega,\ \Phi \perp\!\!\!\perp \Pi_1,\ \Omega \perp\!\!\!\perp$$

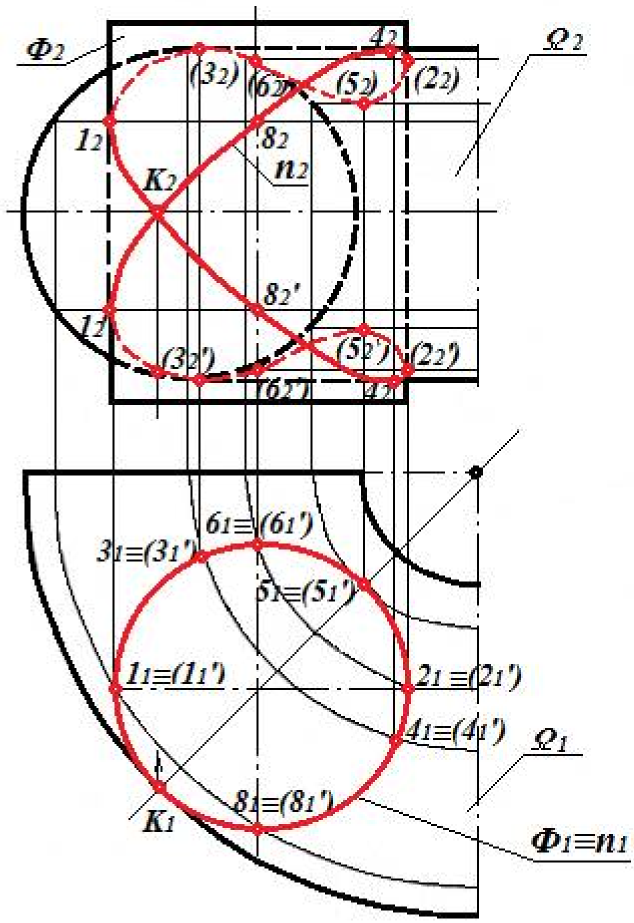


Рис. 3.13. Задача: побудувати проекції лінії перетину циліндричної поверхні з поверхнею відкритого тору

3.5. Способи та алгоритми розв'язання ГПЗ в загальному випадку

Для розв'язання задач у найбільш складному загальному випадку існують наступні способи:

а) спосіб **допоміжних проекціюючих січних площин-посередників** – це універсальний спосіб;

б) спосіб **допоміжних січних площин-посередників загального положення**, що застосовується тільки у випадках перетину прямої лінії з пірамідальною (конічною) або призматичною (циліндричною) поверхнями, а також при перетині вказаних поверхонь між собою;

в) спосіб **допоміжних січних *концентричних* сфер-посередників**, що застосовується тільки у випадках перетину поверхонь обертання, осі яких перетинаються (є ще спосіб **допоміжних січних *ексцентричних* сфер**, рекомендується розглянути самостійно).

АЛГОРИТМ розв'язання 1-ої ГПЗ для третього випадку **(рис. 3.14)**: якщо надані лінія $\boldsymbol{\ell}$ і поверхня **Ф**, що займають не проекціююче положення, то для розв'язання задачі необхідно:

- взяти допоміжну поверхню (площину) Λ, що проходить через лінію $\boldsymbol{\ell}$: $\Lambda \supset \boldsymbol{\ell}$;
- побудувати лінію перетину заданої поверхні **Ф** та допоміжної площини (поверхні) Λ: $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{\Phi} \cap \Lambda$;
- визначити точку **M** (або точки $\mathbf{M}^i$) перетину заданої лінії $\boldsymbol{\ell}$ та побудованої лінії $\boldsymbol{q}$ як шукану точку (точки): $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{\ell} \cap \boldsymbol{q}$.

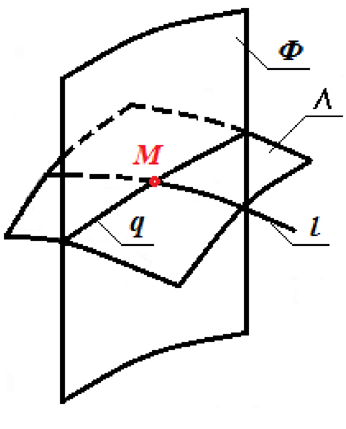


Рис. 3.14. Схема розв'язання першої ГПЗ в загальному випадку

Розглянемо наступну ***задачу 8*** **(рис. 3.15)**: побудувати проекції точки **M** перетину прямої лінії $\boldsymbol{\ell}$ з площиною **Δ(BCE)**, що займають непроекціююче положення, та визначити видимість **(1-ша ГПЗ третій випадок)**. Це загальний випадок перетину прямої з площиною, коли відсутні проекціюючі елементи. Тому для розв'язання задачі необхідно застосувати універсальний **спосіб допоміжних січних проекціюючих площин**. Отже, шукана точка **M** є спільний елемент як для прямої $\boldsymbol{\ell}$, так і для площини **Δ(BCE)**, тому через надану пряму $\boldsymbol{\ell}$ вводимо допоміжну площину Λ, що перетинає площину **Δ(BCE)** і є, наприклад, фронтально-проекціюючою площиною. Далі будуємо лінію ***n*** перетину заданої площини **Δ(BCE)** та допоміжної площини Λ: $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{\Delta(BCE)} \cap \Lambda$ (це вже **2-га ГПЗ**, **другий випадок**).

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{n} \cap \boldsymbol{\ell}$$

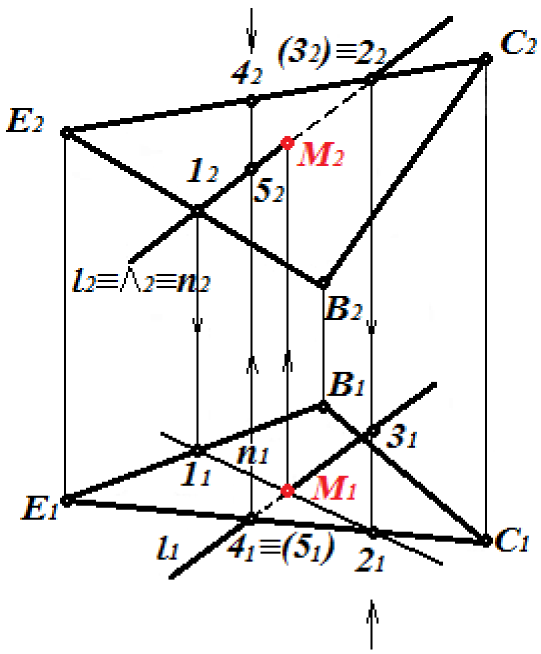


Рис.3.15. Задача 8

Тобто за алгоритмом розв'язання одна проекція $\boldsymbol{n_2}$ лінії ***n*** вже є, а іншу $\boldsymbol{n_1}$ знаходимо за належністю до непроекціюючого образу до площини **Δ(BCE)**, для чого позначимо проекції $\mathbf{1_2}$, $\mathbf{2_2}$ точок **1**, **2** як точок перетину **(B_2E_2)** та **(C_2E_2)** з $\boldsymbol{n_2}$. Знаходимо горизонтальні проекції $\mathbf{1_1}$, $\mathbf{2_1}$, через які будуємо $\boldsymbol{n_1}$. Нарешті визначаємо точку **M** перетину заданої лінії $\boldsymbol{\ell}$ та побудованої лінії $\boldsymbol{n}$ як шукану точку, тобто $M_1 = n_1 \cap l_1$; $M_2 = l_2 \cap (M_1, M_2)$.

Видимість розглядається за допомогою конкуруючих точок окремо для кожної площини проекцій Π_1 та Π_2. Наприклад, на Π_1 точки **2** і **3** за напрямом погляду зверху на конкуруючі точки надана пряма $\boldsymbol{\ell}$ ($\boldsymbol{\ell}_1$) є невидимою до проекції M_1, у точці перетину M_1 видимість завжди змінюється, і тому подальшу частину прямої ми бачимо на Π_1. На Π_2 видимість розглядається аналогічно також за допомогою конкуруючих точок (точки **4** і **5**).

Задача розв'язана.

Задача 9 **(рис. 3.16)**. Побудувати проекції точок $\mathbf{M}^i$ перетину прямої лінії **(AB)** зі сферою $\boldsymbol{\Phi}$ та визначити видимість.

Розв'язання. Міркування аналогічні, тому що це також **1-ша ГПЗ третій випадок**. Для розв'язання задачі рекомендується застосувати універсальний **спосіб допоміжних січних проекціюючих площин**. Отже, обидві шукані точки $\mathbf{M}^i$ є спільними як для прямої **(AB)**, так і для поверхні $\boldsymbol{\Phi}$. Тому через надану пряму **(AB)** вводимо допоміжну площину Λ, що перетинає сферу $\boldsymbol{\Phi}$ і є, наприклад, фронтально-проекціюючою площиною. Далі будуємо лінію перетину поверхні $\boldsymbol{\Phi}$ та допоміжної площини Λ: $m = \Phi \cap \Lambda$ (це вже **2-га ГПЗ, другий випадок**). Тобто за алгоритмом розв'язання одна проекція m_2 лінії $\boldsymbol{m}$ вже є – це крива, яка на Π_2 зображується у виді відрізка прямої. А іншу проекцію m_1 знаходимо за належністю до непроекціюючого образу – до поверхні $\boldsymbol{\Phi}$. Для цього позначимо спочатку проекції 1_2, 2_2, 3_2, 4_2 характерних точок *1*, *2*, *3*, *4* як точок, що належать до поверхні $\boldsymbol{\Phi}$, а потім ще декілька проміжних точок, які знаходимо за допомогою паралелей сфери. Через знайдені проекції точок знаходимо горизонтальну проекцію лінії m_1.

$$M^i = (AB) \cap \Phi$$

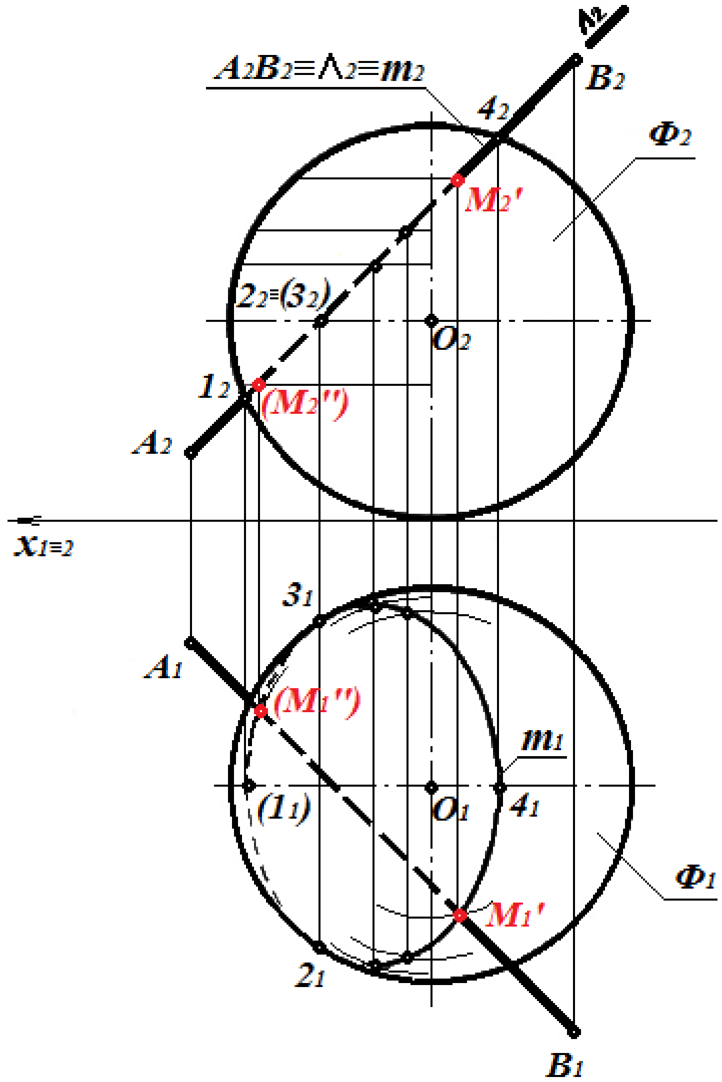


Рис. 3.16. Задача 9

Нарешті визначаємо точки **М'** та **М''** перетину заданої лінії **(АВ)** та побудованої лінії ***m*** як шукані точки:

$$\boldsymbol{M_1' = (A_1B_1) \cap m_1;\ M_2' = (A_2B_2) \cap (M_1', M_2')}$$

Для знаходження проекції M_2'' побудови виконуються аналогічно.

Видимість розглядається за допомогою конкуруючих точок окремо для кожної площини проекцій $\mathbf{П_1}$ та $\mathbf{П_2}$. Наприклад, на $\mathbf{П_1}$ за напрямом погляду зверху ми бачимо **М'** на верхній половині сфери, а **М''** – на нижній половині, отже від проекції точки $\mathbf{B_1}$ до $\mathbf{M'_1}$ ми відрізок прямої бачимо, далі $(\mathbf{M'_1}\ \mathbf{M''_1})$ – невидима частина – між двома точками пряма завжди невидима, нарешті від $\mathbf{M''_1}$ до контуру сфери на $\mathbf{\Pi_1}$ також невидима. На $\mathbf{\Pi_2}$ за напрямом погляду спереду ми бачимо частину прямої від $\mathbf{B_2}$ до $\mathbf{M'_2}$, далі $(\mathbf{M'_2}\ \mathbf{M''_2})$ – невидима частина, нарешті від $\mathbf{M''_2}$ до контуру сфери на $\mathbf{\Pi_2}$ також невидима.

Задача розв'язана.

АЛГОРИТМ розв'язання 2-ої ГПЗ для третього випадку **(рис. 3.17)**: якщо задані обидві поверхні $\boldsymbol{\Theta}$ та $\boldsymbol{\Phi}$, що займають не проекціююче положення, то для розв'язання задачі необхідно:

- взяти допоміжну поверхню (площину) Λ, яка перетинає обидві поверхні $\boldsymbol{\Theta}$ та $\boldsymbol{\Phi}$: $\Lambda \cap \boldsymbol{\Theta}$, $\Lambda \cap \boldsymbol{\Phi}$;
- побудувати лінії $\boldsymbol{g}$ та $\boldsymbol{q}$ перетину Λ із заданими $\boldsymbol{\Theta}$ і $\boldsymbol{\Phi}$: $\boldsymbol{g} = \Lambda \cap \boldsymbol{\Theta}$, $\boldsymbol{q} = \Lambda \cap \boldsymbol{\Phi}$;
- визначити шукані точки $\mathbf{M}^{i}$ як точки перетину побудованих ліній $\boldsymbol{g}$ та $\boldsymbol{q}$: $\mathbf{M}^{i} = \boldsymbol{g} \cap \boldsymbol{q}$.

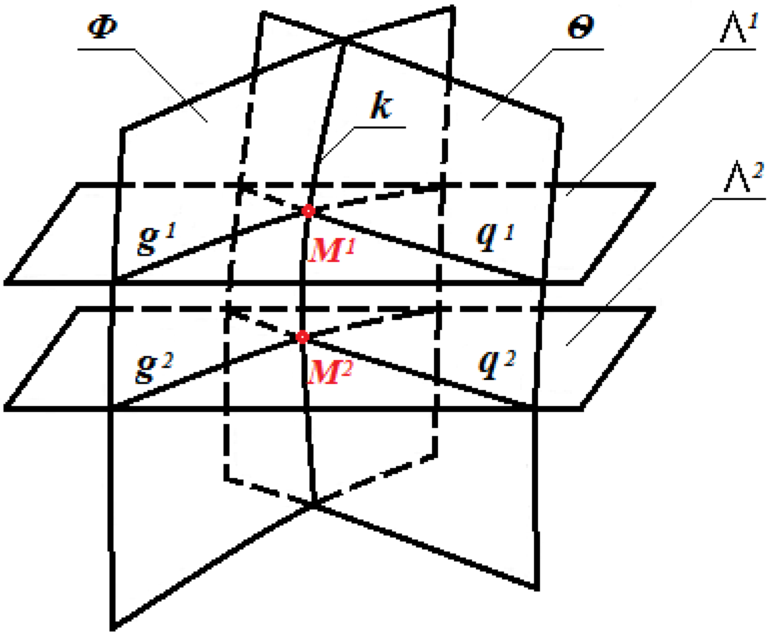


Рис. 3.17. Схема розв'язання другої ГПЗ в загальному випадку

Подібні побудови треба виконати **багаторазово**, внаслідок чого знайдені точки M^1, M^2, ... M^n з'єднуються між собою і утворюють шукану лінію перетину k: $k \supset M^1, M^2, ... M^n$.

Розглянемо наступні задачі.

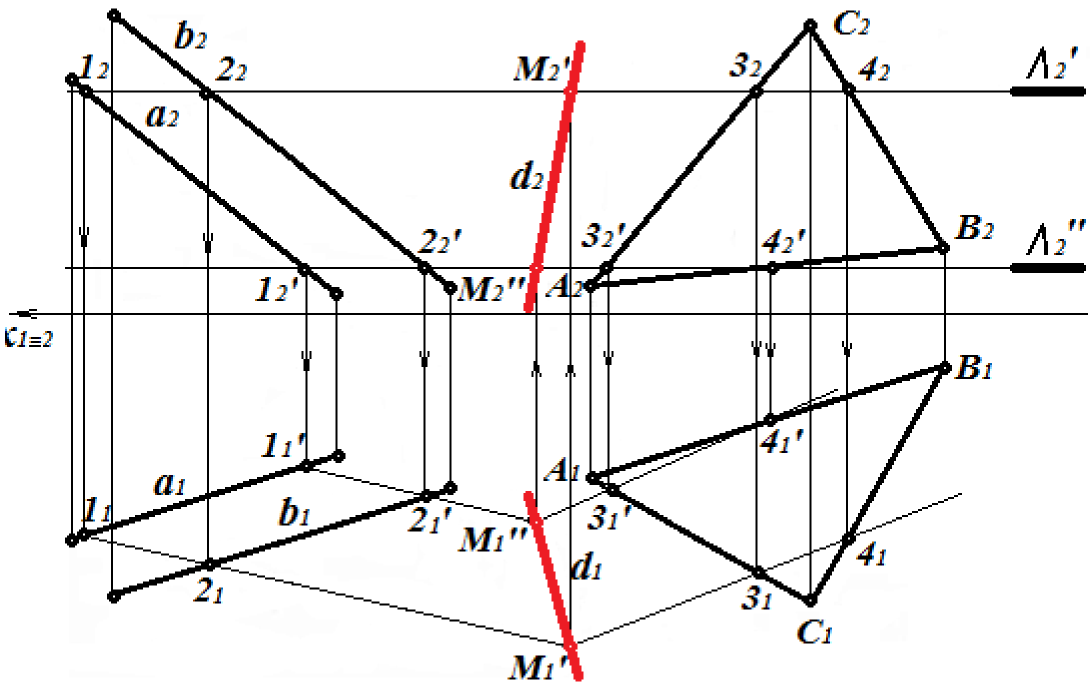
Задачі 10а та 10б. Побудувати проекції лінії перетину двох площин **Δ(ABC)** і **Г**$(a \parallel b)$ **(рис. 3.18*а*)** та побудувати проекції лінії перетину двох площин **Δ(ABC)** і **Г(DEF) (рис. 3.18*б*)**. Визначити видимість **(це 2-га ГПЗ третій випадок)**.

Розв'язання.

а) Це також загальний випадок перетину площин, коли відсутні проекціюючі елементи, тому для розв'язання задачі необхідно застосувати універсальний спосіб допоміжних січних **проекціюючих площин** Λ^i. Отже, шукана пряма лінія d **(M'M'')** є спільний елемент як для площини **Δ(ABC)**, так і для $\Gamma(a \parallel b)$. Тому згідно до алгоритму необхідно виконати наступне: взяти два рази допоміжні площини-посередники $\Lambda^i(\Lambda^i{}_2)$, знайти проекції їхніх ліній перетину з наданими площинами **Δ(ABC)** і $\Gamma(a \parallel b)$: **(1,2) ∩ (3,4) = M'**, **(1',2') ∩ (3',4') = M''**, а потім з'єднати відповідні проекції точок **(M', M'')** і здобути шукану лінію d.

б) для розв'язання такої задачі (іноді кажуть, у зв'язку з перетином двох непрозорих пластинок) необхідно взяти, наприклад, на Π_1 допоміжну січну горизонтально-проекціюючу площину $\Lambda_1(\Lambda'_1)$, яка проходить через сторону **DF** $(D_1 F_1)$ і перетинає площину **Δ(ABC)** по прямій лінії a, що проходить через точки **1** і **3**. Далі необхідно знайти фронтальну проекцію a_2 та визначити точку K_2 як точку перетину сторони $(D_2 F_2)$ з побудованою проекцією лінії a_2. Нарешті знайти горизонтальну проекцію точки K_1 за належністю до $(D_1 F_1)$.

Задача 10а. $\ulcorner d = \Delta(ABC) \cap \Gamma\ (a \parallel b)$



Задача 10б. $\ulcorner d = \Delta(ABC) \cap \Gamma\ (DEF)$

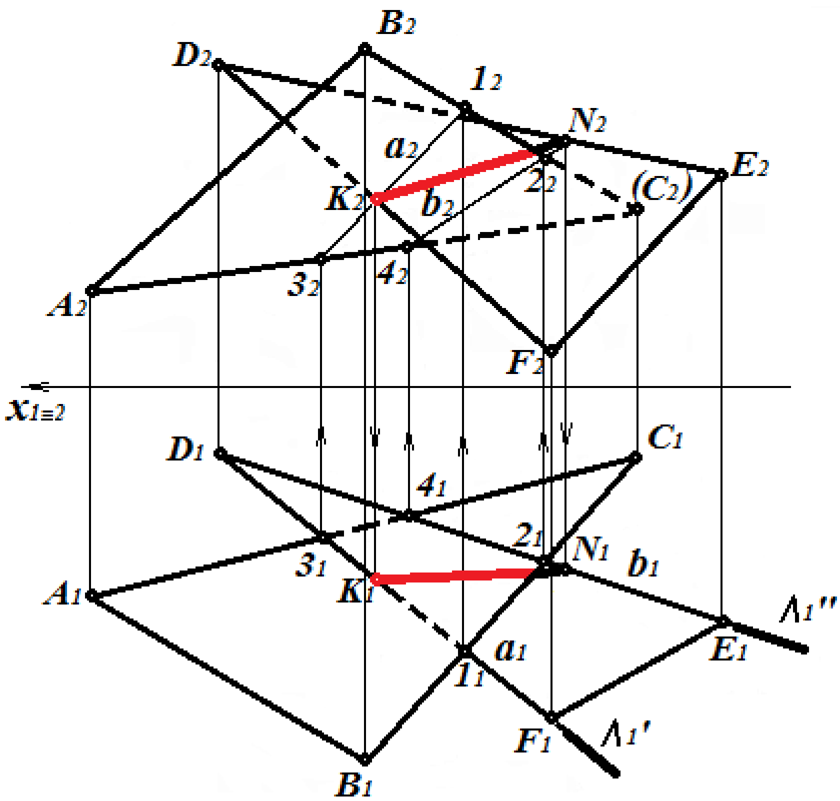


Рис.3.18. Задачі 10а та 10б

Аналогічні побудови треба виконати ще раз: взяти, наприклад, на Π_1 допоміжну січну горизонтально-проекціюючу площину Λ'' *(Λ''_1)*, яка проходить через сторону **DE (D_1E_1)** і перетинає площину **Δ(ABC)** – це пряма лінія ***b***, що проходить через точки **2** і **4**. Далі необхідно виконати за алгоритмом останні два пункти та здобути точку **N (N_1, N_2)**.

Знайдені точки **К** та **N** з'єднати між собою і отримати шукану лінію перетину ***d*** (шукана лінія на рис. 3.18б позначена червоним кольором у межах двох пластин).

Задача розв'язана.

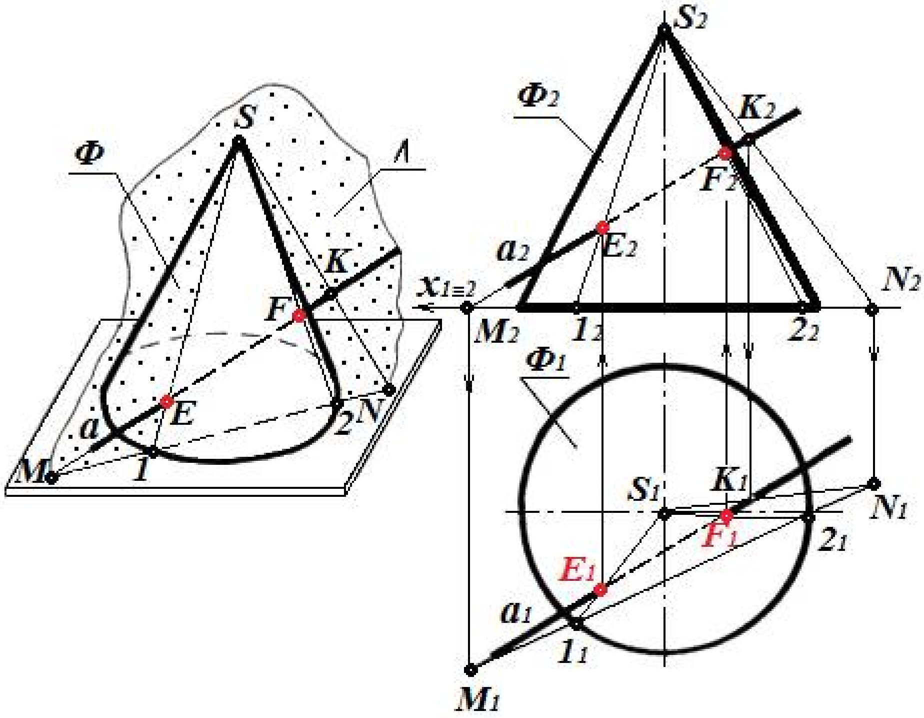
Розглянемо наступну ***задачу 11*** **(рис. 3.19)**. Побудувати проекції точок перетину прямої ***a*** з конічною поверхнею ***Ф*** та визначити видимість **(це 1-ша ГПЗ третій випадок)**.

Для розв'язання задачі доцільно використати спосіб ***допоміжних січних площин-посередників*** Λ ***загального*** положення тому що, наприклад, площина, яка проходить через вершину пірамідальної або конічної поверхні перетинає її за двома прямими лініями – твірними **(рис. 3.19*а*)**.

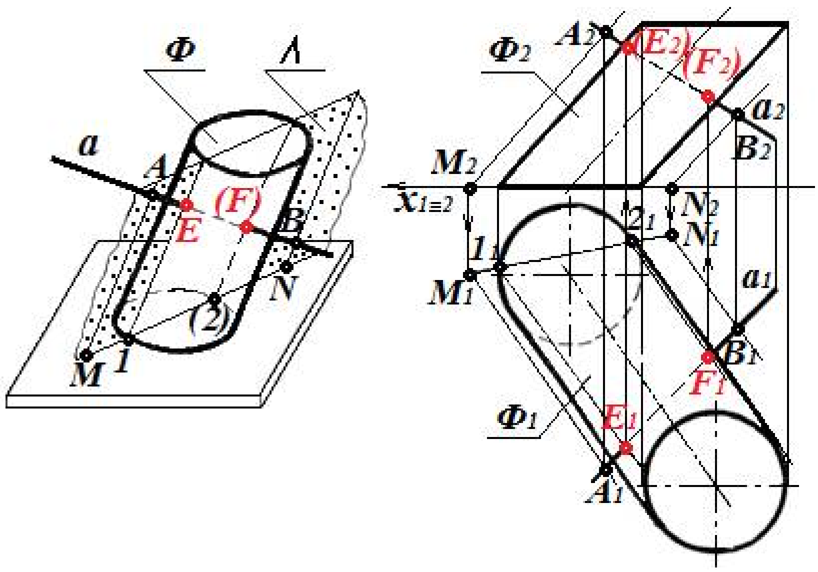
Таким чином, згідно до алгоритму через надану пряму ***a*** та вершину ***S*** конічної поверхні (див. рис. 3.19*а*) вводимо допоміжну площину – посередник Λ, яка повинна перетинати поверхню ***Ф***. Далі будуємо лінію перетину заданої поверхні та допоміжної площини Λ (це дві твірні), нарешті знаходимо дві шукані точки ***E*** та ***F***.

На комплексному кресленні виконуємо наступні побудови: на Π_2 візьмемо довільну точку **К (K_2)** на фронтальній проекції a_2 прямої ***a***. З'єднаємо її з вершиною **S (S_2)**. Проекцію **(S_2 K_2)** продовжуємо до перетину з площиною основи поверхні у точці **N (N_2)**.

Точку **M (M_2)** знаходимо на перетині продовження прямої $a(a_2)$ з віссю $x_{1\equiv2}$. Горизонтальні проекції M_1 та N_1 визначаємо за відповідною належністю до **(S_1 K_1)** і a_1.



а)



б)

Рис. 3.19. Задача 11

Далі позначаємо на **$П_1$** результат перетину проекції прямої **(M_1N_1)** з основою конуса – точки **1_1**, **2_1**, які поєднуємо з проекцією ***S_1***. Твірні **(S,1)** і **(S,2)** – це результат перетину допоміжної площини Λ з поверхнею ***Ф***. Тоді шукані точки ***E*** та ***F*** утворюються відповідно у перетині твірних **(S,1)** і **(S,2)** із заданою прямою ***a***. Видимість прямої на ***$П_1$*** визначається з урахуванням того, що між проекціями ***E_1*** та ***F_1*** частина прямої є невидимою, а остання – видима. На ***$П_2$*** також між проекціями ***E_2*** та ***F_2*** частина прямої є невидимою, а до і після ***E_2*** та ***F_2*** вона є видимою.

Задача розв'язана.

Площина, що перетинає призматичну або циліндричну поверхню і проходить паралельно до твірних, перетинає поверхню за двома прямими твірними **(рис. 3.19*б*)**.

Наведену на **рис. 3.19*б*** задачу рекомендується розглянути самостійно.

На **рис. 3.20** показані приклади та алгоритми розв'язання **ГПЗ** у загальному випадку.

3.6. Співвісні поверхні та лінії їхнього перетину

Спосіб допоміжних січних концентричних сфер-посередників

Як відомо, безперервні каркаси поверхонь обертання додержують різні кола. При певному взаємному розташуванні таких поверхонь можна підібрати такі сфери, що будуть перетинати кожну з наданих поверхонь по колах – тоді точки перетину цих кіл за алгоритмом будуть належати шуканій лінії перетину таких поверхонь. При цьому центр сфери повинен належати до осі поверхні обертання і тоді кажуть, що сфера співвісна з нею і результатом їхнього перетину є кола.

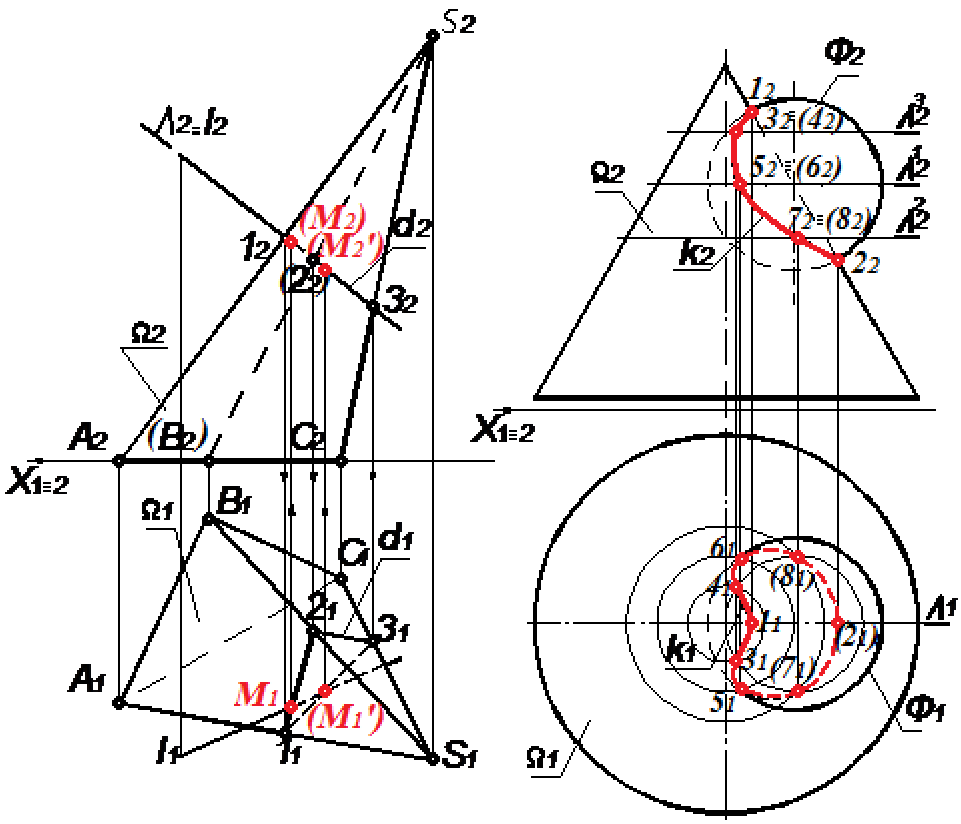
ПРИКЛАДИ РОЗВ’ЯЗАННЯ ГПЗ У ЗАГАЛЬНОМУ ВИПАДКУ

а) $M^i = l \cap \Omega$

I ГПЗ 3-й випадок

б) $k = \Phi \cap \Omega$

II ГПЗ 3-й випадок



ПА

1. $\mathbf{\Lambda \cap \mathit{l}, \ \Lambda \perp\!\!\!\perp \Pi_2}$

2. $\mathbf{d = \Lambda \cap \Omega}$

3. $\mathbf{d \supset (1, 2, 3)}$

4. $\mathbf{M^i = \mathit{l} \cap d}$

ПА

1. $\mathbf{\Lambda^i \cap \Phi ; \ \Lambda^i \cap \Omega , \Lambda^i \perp\!\!\!\perp \Pi_2}$

2. $\mathbf{\mathit{q}^i = \Lambda^i \cap \Omega; \mathit{g}^i = \Lambda^i \cap \Phi}$

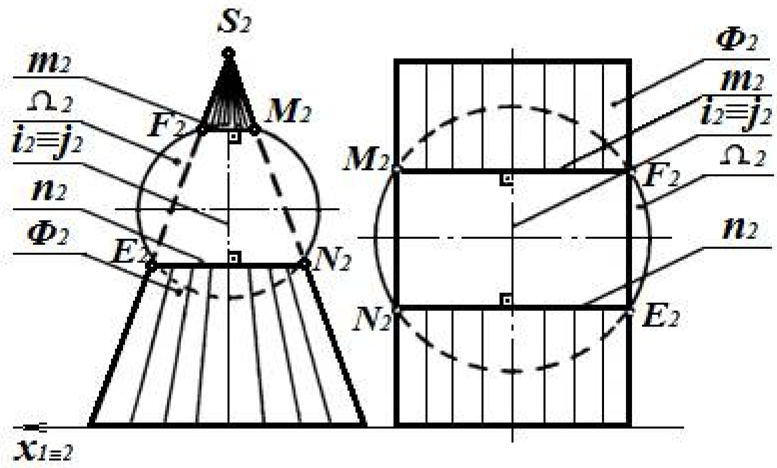
3. $\mathbf{M^i = \mathit{q}^i \cap \mathit{g}^i}$

4. $\mathbf{k \supset (M^1, M^2, \dots M^i)}$

Рис. 3.20. Приклади та алгоритми розв’язання **ГПЗ** у загальному випадку

Таким чином, **співвісні** – це такі поверхні обертання, що мають спільну площину симетрії або спільну вісь обертання **(рис. 3.21)**. Вони перетинаються по колах – **паралелях**, кількість яких дорівнює кількості точок перетину головних пів-меридіанів наданих поверхонь.

На рис. 3.21*а* поверхня прямого конусу і сфера є співвісними – вони перетинаються по двох паралелях ***m*** і ***n***. На рис. 3.21*б* поверхні циліндра і сфери також співвісні й перетинаються по двох колах ***m*** і ***n***.



а) *б)*

Рис. 3.21. Співвісні поверхні (побудови розглянуті на фронтальній площині Π_2)

Розглянемо наступну ***задачу 12*** **(рис. 3.22)**. Побудувати проекції лінії перетину двох конічних поверхонь ***Ф*** і ***Ф'*** та визначити видимість **(це 2-га ГПЗ третій випадок)**. Нагадаємо, що лінією перетину двох поверхонь другого порядку є просторова ***крива*** лінія четвертого порядку.

Для розв'язання задачі доцільно використати спосіб допоміжних січних ***концентричних*** сфер Λ (коли всі сфери мають спільний центр) тому, що, умовою задачі надані дві поверхні обертання, осі яких перетинаються і паралельні до однієї площини проекцій $\mathbf{\Pi_2}$ **(рис. 3.21)**.

Цей спосіб ґрунтується на тому, що поверхня обертання, вісь якої проходить через центр сфери, перетинається із сферою по колах. Якщо вісь поверхні паралельна до будь-якої площини проекцій, то проекції цих кіл зображуються прямими лініями. У цьому випадку сфера та поверхня обертання є ***співвісні*** поверхні.

Розглянемо порядок побудови шуканої лінії на комплексному кресленні. На $\mathbf{\Pi_1}$ і $\mathbf{\Pi_2}$ позначимо проекції т. **O (O_1,O_2)** ***– центру*** концентричних сфер та визначимо діапазон робочих сфер – від $\boldsymbol{R^{max}}$ – радіусу максимальної робочої сфери Λ до $\boldsymbol{R^{min}}$ – радіусу мінімальної сфери Λ. Для цього спочатку безпосередньо позначимо проекції $\mathbf{5_2}$, $\mathbf{7_2}$, $\mathbf{6_2}$, $\mathbf{8_2}$ точок **5, 7, 6, 8** як точок перетину контурних твірних. $\boldsymbol{R^{max}}$ знаходимо як найбільшу відстань від $\mathbf{O_2}$ до однієї з точок перетину контурних твірних – це відрізок $\mathbf{O_2 7_2}$. $\boldsymbol{R^{min}}$ визначається радіусом тієї сфери, що є дотичною до однієї поверхні та перетинає другу. Отже з $\mathbf{O_2}$ проведемо будь-яку допоміжну січну сферу Λ, знайдемо фронтальні проекції кіл $\boldsymbol{k_2}$, $\boldsymbol{\ell_2}$, $\boldsymbol{m_2}$, $\boldsymbol{n_2}$, за якими сфера Λ перетинає надані поверхні **Ф** і **Ф'**. Нарешті знаходимо точки $\mathbf{1_2}$, $\mathbf{2_2}$, $\mathbf{3_2}$, $\mathbf{4_2}$ як точки перетину відповідних кіл – це і є проміжні точки шуканої лінії. Для розв'язання задачі алгоритм багаторазово повторюється: усі допоміжні робочі сфери необхідно брати з діапазону від $\boldsymbol{R^{max}}$ до $\boldsymbol{R^{min}}$. Через усі знайдені точки будуємо фронтальну проекцію шуканої лінії.

Горизонтальну проекцію лінії будують за точками, що визначаються за допомогою паралелей, за якими сфера перетинає поверхню ***Ф*** (необхідно підкреслити, що за цим способом можна побудувати фронтальну проекцію шуканої лінії без використовування горизонтальної проекції поверхонь, що є досить важливою перевагою цього способу перед іншими).

Задача розв'язана.

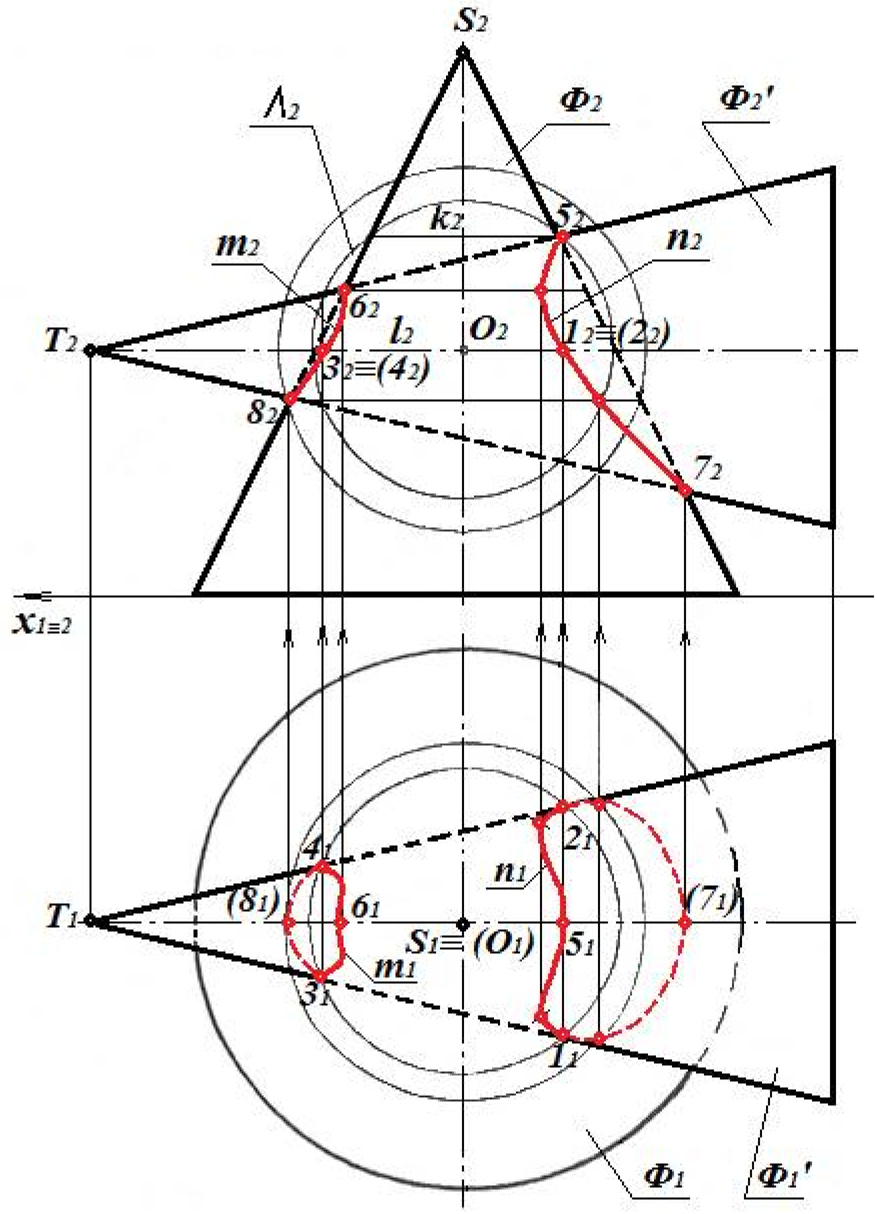


Рис. 3.22. Задача 12

Задачу, наведену на **рис. 3.23** рекомендується розглянути самостійно: побудувати проекції лінії перетину конічної поверхні з поверхнею відкритого тору за допомогою способу допоміжних ексцентричних сфер-посередників.

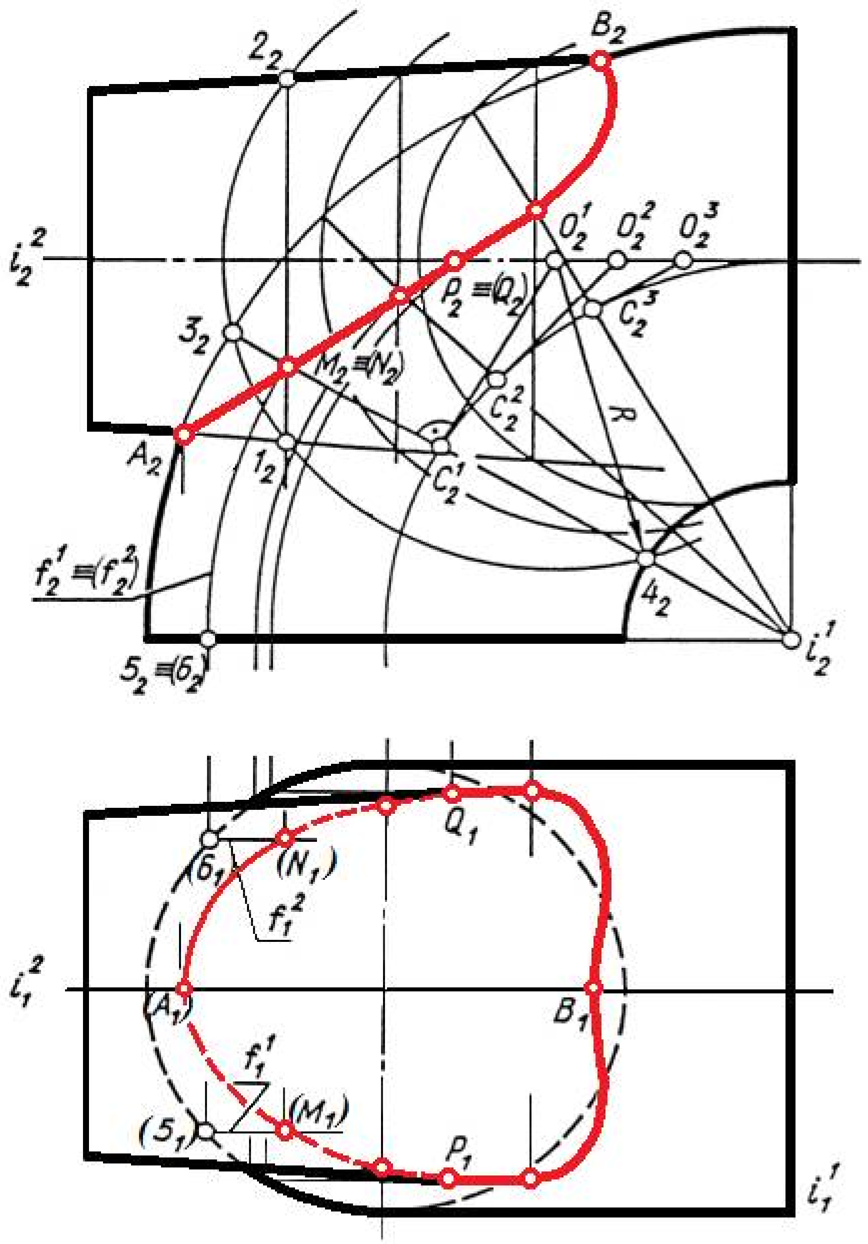


Рис. 3.23. Побудувати проекції лінії перетину конічної поверхні з поверхнею відкритого тору

3.7. Особливі випадки перетину поверхонь другого порядку

Серед множини кривих поверхонь, що перетинаються, великого практичного значення набувають поверхні другого порядку. Як відомо, лінія перетину поверхонь у загальному випадку буде алгебраїчна крива четвертого порядку, яка отримала назву біквадратної. При певному розташуванні і відносинах між поверхнями другого порядку може статися, що біквадратна крива буде розпадатися або на чотири лінії першого порядку, або на дві криві другого порядку, або на пряму і криву третього порядку.

У деяких випадках криві лінії, на які розпадається лінія перетину поверхонь другого порядку, можуть збігатися або взагалі бути уявними. Аналіз прикладів свідчить про велику різноманітність форм біквадратної кривої. Але ознаки її розпаду та властивості можуть бути описані наступними теоремами:

***Теорема 1*: Якщо дві поверхні другого порядку перетинаються по одній плоскій кривій лінії, то існує ще одна плоска крива, по якій вони перетинаються.**

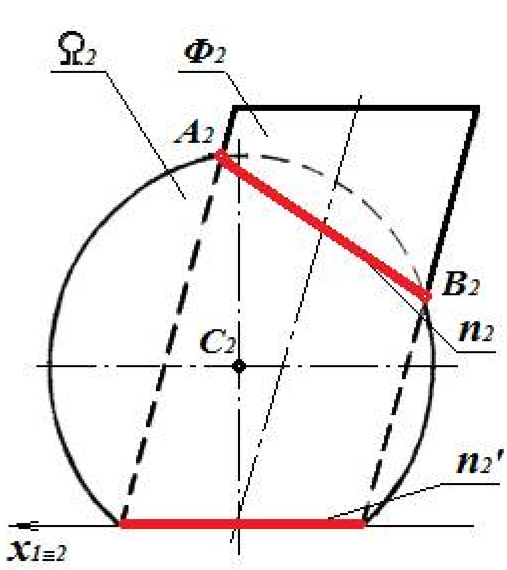
На **рис. 3.24 *а*** на фронтальній площині Π_2 надані циліндрична поверхня Φ та сфера Ω, що перетинаються. Обидві поверхні мають спільне коло n' (n_2'). Тоді існує ще одна плоска крива перетину, фронтальна проекція n (n_2) яка проходить через точки A (A_2) і B (B_2) перетину головних меридіанів поверхонь.

***Теорема 2:* (про подвійний дотик). Дві поверхні другого порядку, які мають дотик в двох своїх спільних точках, перетинаються між собою по двох плоских кривих лініях другого порядку, площини яких проходять через відрізок прямої, що з'єднує ці точки.**

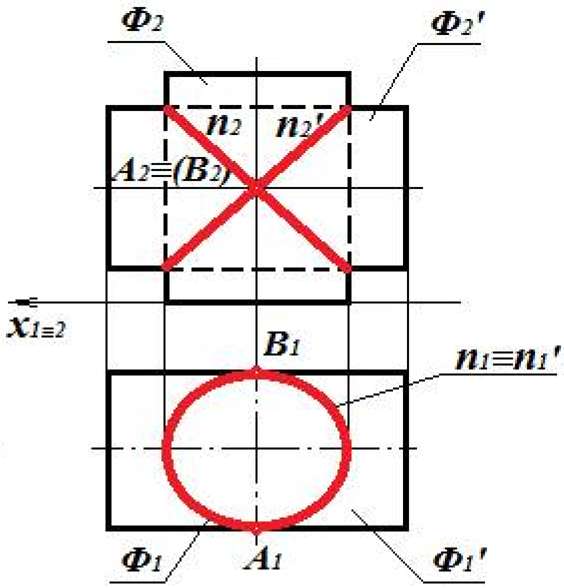
На **рис. 3.24*б*** надані дві циліндричної поверхні Φ та Φ', у яких спільними точками дотику є точки A і B. Лінія перетину розпалась на два еліпси n (n_1, n_2) та n' (n_1', n_2'), що проходять через відрізок AB.

***Теорема 3*: (теорема Монжа). Якщо дві поверхні другого порядку описані навколо третьої поверхні другого порядку (чи вписані в неї), то вони перетинаються по лінії, що розпадається на дві криві другого порядку, причому площини цих кривих ліній проходять через точки перетину ліній дотику.**

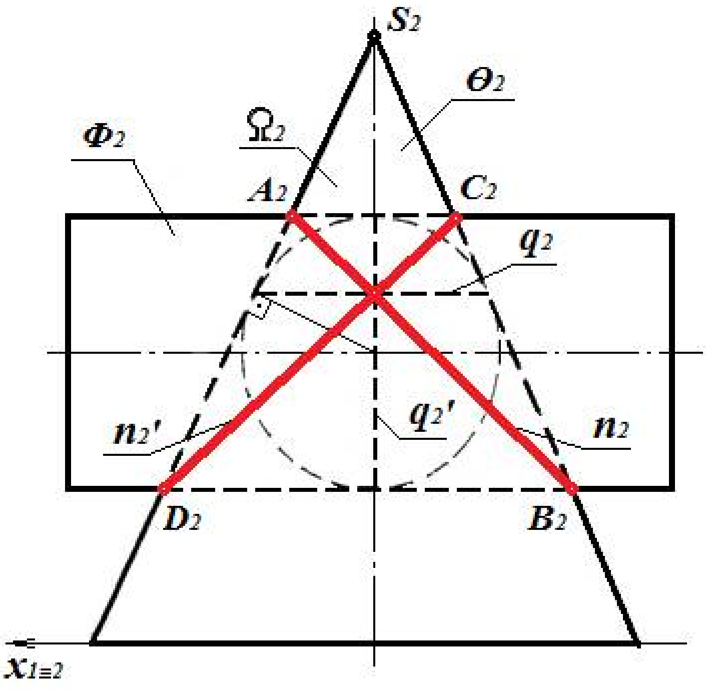
На **рис. 3.24 *в*** на фронтальній площині Π_2 надані конічна поверхня Θ та циліндрична поверхня Φ, що перетинаються. Обидві поверхні описані навколо сфери **Ω**, а лінія перетину розпалась на два еліпси ***n*** (n_2) та ***n*** (n_2').



а)



б)



в)

Рис. 3.24. Особливі випадки побудови лінії перетину двох поверхонь другого порядку

На **рис. 3.25** наведені приклади застосування теореми Гаспара Монжа (третьої теореми) у практичній діяльності.

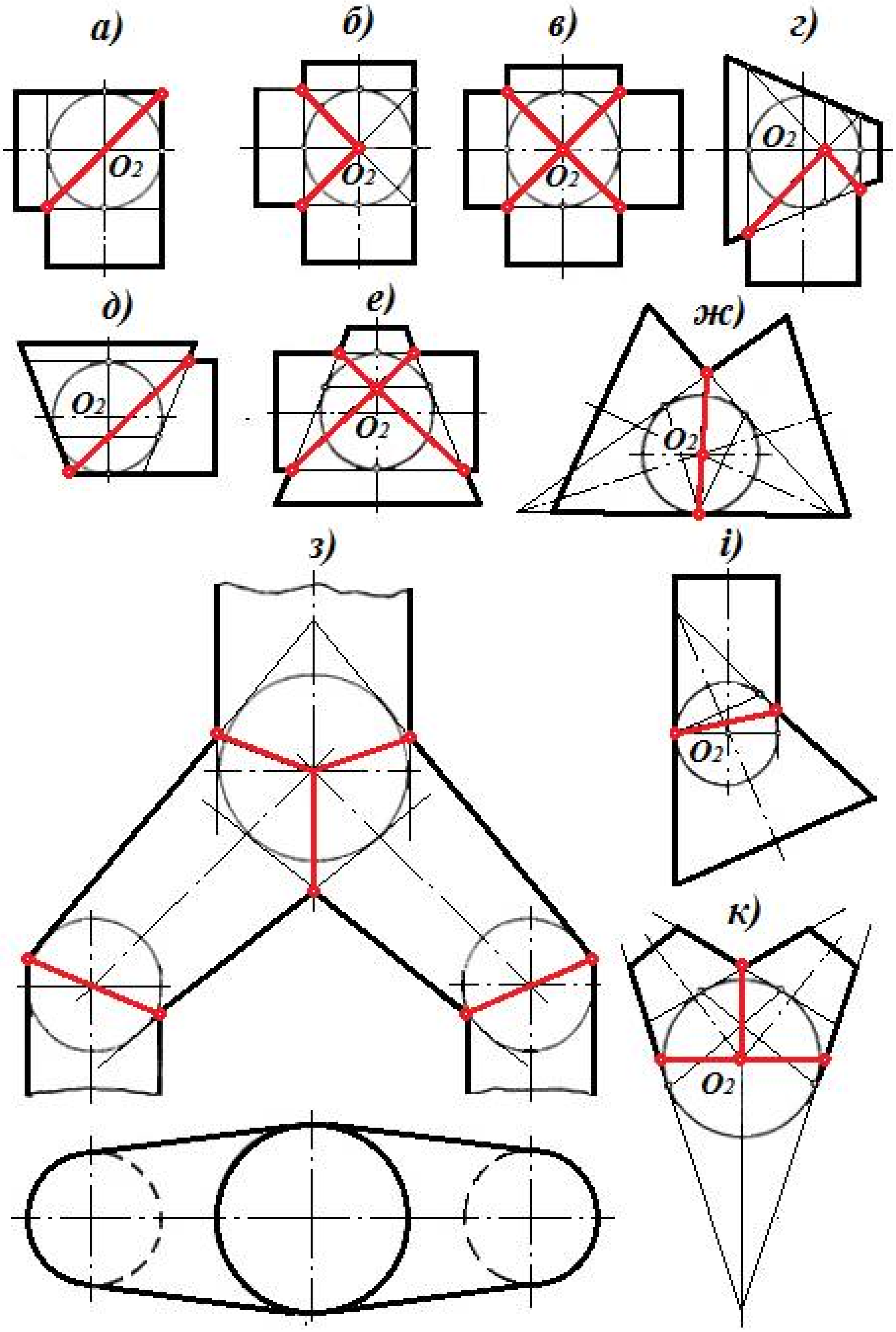


Рис. 3.25. Приклади застосування теореми Гаспара Монжа

3.8. Питання для самоконтролю

1. Надати визначення та розглянути класифікацію позиційних задач.

2. Які задачі відносяться до головних позиційних задач, їх класифікація.

3. Сформулювати умову та алгоритм розв'язання I ГПЗ в 1-му випадку.

4. Сформулювати умову та алгоритм розв'язання II ГПЗ в 1-му випадку.

5. Сформулювати умову та алгоритм розв'язання I ГПЗ в 2-му випадку.

6. Сформулювати умову та алгоритм розв'язання II ГПЗ в 2-му випадку.

7. Які точки шуканої лінії перетину відносяться до головних (опорних)?

8. Конічні перерізи (коло, прямі лінії, еліпс, парабола, гіпербола): визначити умови та назву ліній перерізу площиною конічної поверхні обертання з прикладами побудови на комплексному кресленні.

9. Перетин двох багатогранних поверхонь: назвати способи розв'язання задачі, пояснити особливості та послідовність графічних побудов для знаходження проекцій лінії перетину наданих поверхонь. Визначення видимості шуканої лінії перетину.

10. Перетин двох плавних поверхонь (поверхонь обертання): пояснити особливості розв'язання задачі та послідовність графічних побудов для знаходження проекцій лінії перетину наданих поверхонь. Визначення порядку з'єднання та видимості шуканої лінії перетину.

11. Надати характеристику основних способів розв'язання ГПЗ в загальному (третьому) випадку та особливості їхнього застосування.

12. Сформулювати умову I ГПЗ в 3-му випадку та алгоритм її розв'язання.

13. Вказати основні принципи застосування способів допоміжних площин-посередників (проекціюючих і загального положення).

14. Сформулювати та записати алгоритм розв'язання II ГПЗ в 3-му випадку.

15. Які поверхні визначаються як співвісні та як вони перетинаються?

16. В яких випадках застосовуються як посередники допоміжні січні концентричні сфери?

17. Сформулювати три основні теореми, що застосовуються в особливих випадках при побудові лінії перетину поверхонь другого порядку.

РОЗДІЛ 4. МЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ ТА ЇХ АЛГОРИТМІЗАЦІЯ. ПЕРЕТВОРЕННЯ КОМПЛЕКСНОГО КРЕСЛЕННЯ

4.1. Метричні задачі та їх класифікація

Задачі, в умові яких або в результаті розв’язання присутня чисельна характеристика, називаються метричними.

Метричні задачі можна класифікувати наступним чином:

а) ***прямі*** – це задачі, у яких по заданих проекціях об'єкта визначаються натуральні величини відстаней та кутів між його геометричними елементами;

б) ***зворотні*** – це задачі, в яких по заданим відстаням і кутам між геометричними елементами будуються проекції (креслення) об'єкта.

в) ***лонгометричні*** – це задачі на визначення натуральної величини відрізка прямої лінії;

г) ***гоніометричні*** – це задачі на визначення натуральної величини кутів.

д) ***дві основні метричні задачі (ОМЗ):***

- перша ОМЗ – задача на перпендикулярність прямої лінії та площини;

- друга ОМЗ – задача на визначення натуральної величини відрізка прямої

В інженерній практиці дуже рідко метричні задачі зустрічаються в «чистому» виді: як правило, вони є частиною будь-якої комплексної позиційно-метричної задачі.

4.2. Дві основні метричні задачі (ОМЗ) та методика розв’язання

Ці задачі називаються ***основними***, тому що за їхньою допомогою можна вирішити будь-яку метричну задачу.

Щоб навчитися вирішувати ***1-у ОМЗ***, необхідно розглянути ***теорему про проекціювання прямого кута: якщо дві прямі a і b у просторі перпендикулярні між собою і при цьому одна з них паралельна до будь-якої площини проекцій П', а інша пряма до неї не перпендикулярна, то проекції цих прямих a' і b' також перпендикулярні між собою*** **(рис. 4.1).**

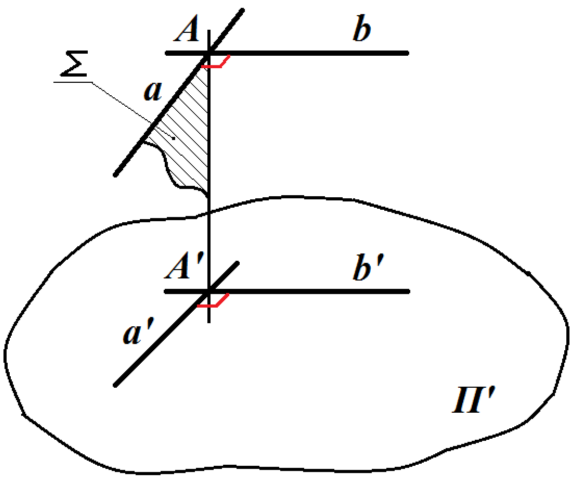


Рис. 4.1. Теорема про проекціювання прямого кута

У символічному виді цю теорему можна записати так:

$$a \perp b \ \wedge \ a \ (\vee \ b) \ || \ П' \ \Rightarrow \ a' \perp b'$$

Теорема досить проста і доказ її тривіальний.

Доказ: припустимо ***b** || **П′**.*

1. Якщо $b \,||\, П' \ \wedge \ (AA') \perp П' \ \Rightarrow \ b \perp (AA');$
2. $b \perp a \ \wedge \ b \perp (AA') \ \Rightarrow \ b \perp Σ;$
3. $b \,||\, П' \ \Rightarrow \ b \,||\, b';$
4. $b \,||\, b' \ \wedge \ b \perp Σ \ \Rightarrow \ b' \perp Σ;$
5. $b' \perp Σ \ \wedge \ a' \subset \ Σ \ \Rightarrow \ b' \perp a'.$

З цієї теореми необхідно визначити два важливих ***наслідки***:

1. Якщо $a' \perp b' \ \wedge \ a \ (\vee \ b) \ || \ П' \ \Rightarrow \ a \perp b;$
2. Якщо $a' \perp b' \ \wedge \ a \perp b \ \Rightarrow \ a \ (\vee \ b) \ || \ П'.$

Сутність ***2-ої ОМЗ*** полягає у знаходженні натуральної величини відрізка прямої, яка визначається за допомогою ***правила прямокутного трикутника*** **(рис. 4.2)*****: натуральна величина відрізка прямої дорівнює гіпотенузі прямокутного трикутника, один катет якого дорівнює довжині проекції, а інший катет дорівнює різниці відсутніх координат кінців відрізку прямої.***

При цьому кут, що лежить напроти катета різниці координат, дорівнює ***натуральній величині кута*** нахилу прямої до відповідної площини проекцій.

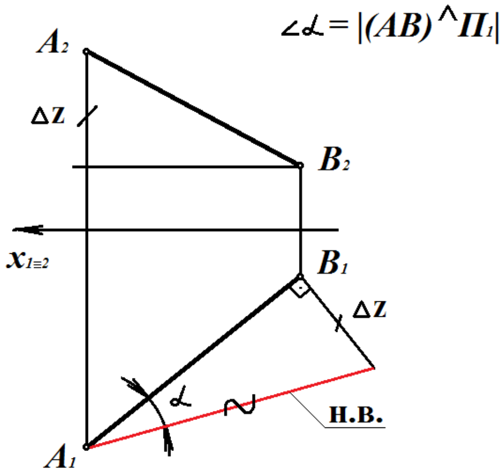


Рис. 4.2. Правило прямокутного трикутника

Для ознайомлення з методикою розв'язання цих задач, розглянемо наступну задачу.

Задача 1 **(рис. 4.3).** Через точку **M** побудувати нормаль ***t*** до площини **Δ (ABC)**.

Розв'язання: з курсу шкільної елементарної геометрії відомо, що, якщо пряма перпендикулярна до двох прямих, що перетинаються і належать до заданої площини, то вона перпендикулярна до будь-якої третьої прямої, що проходить через точку їхнього перетину, отже, перпендикулярна до цієї площини.

Які ж прямі доцільно брати в площині для того, щоб на комплексному кресленні побудувати пряму, яка перпендикулярна до площини? З теореми про проекціювання прямого кута відомо, що одна з його сторін повинна бути паралельною до $\mathbf{П_1}$ або до $\mathbf{П_2}$. Таким чином, для розв'язання задачі про перпендикулярність прямої та площини необхідно в площині побудувати ***лінії рівня*** – горизонталь і фронталь.

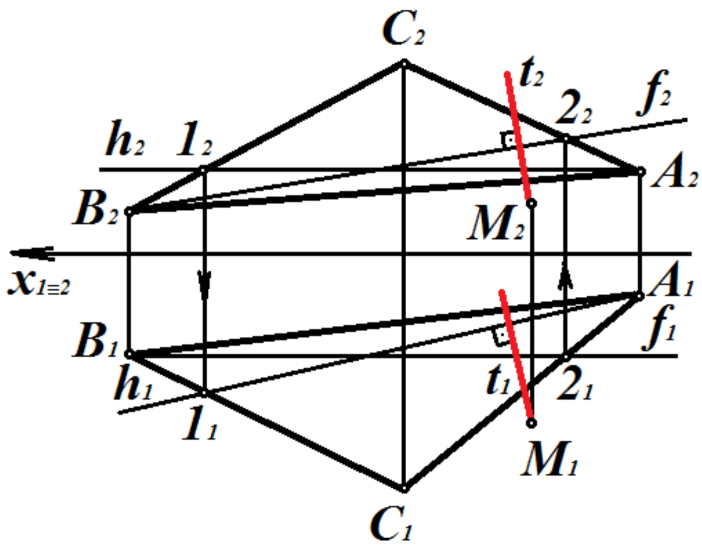


Рис. 4.3. Задача 1

Через $\mathbf{A_2}$ проводимо $\boldsymbol{h_2} \parallel \boldsymbol{x_{1\equiv2}}$, у перетині з $\mathbf{(B_2C_2)}$ знаходимо т.$\mathbf{1_2}$, далі знаходимо т. $\mathbf{1_1}$ за її належністю до $\mathbf{(B_1C_1)}$ та з'єднуємо з т. $\mathbf{A_1}$ – це буде $\boldsymbol{h_1}$. Через $\mathbf{B_1}$ проводимо $\boldsymbol{f_1} \parallel \boldsymbol{x_{1\equiv2}}$, у перетині з $\mathbf{(A_1C_1)}$ знаходимо т. $\mathbf{2_1}$. Далі знаходимо т. $\mathbf{2_2}$ за її належністю до $\mathbf{(A_2C_2)}$ та з'єднуємо з т.$\mathbf{B_2}$ – це буде $\boldsymbol{f_2}$. Далі необхідно побудувати проекції шуканої нормалі $\boldsymbol{t} \supset \boldsymbol{M}$: $\boldsymbol{t_1} \perp \boldsymbol{h_1}$; $\boldsymbol{t_2} \perp \boldsymbol{f_2}$.

Задача розв'язана.

Розглянемо наступну задачу **(рис. 4.4)**.

Задача 2 **(рис. 4.4).** Знайти натуральну величину відстані від точки **M** до площини **Δ (ABC)**.

Розв'язання. Спробуємо проаналізувати задачу у просторі: найкоротша відстань визначається як перпендикуляр з т. **M** до наданої площини (це **1-ша ОМЗ**, вона була розв'язана у попередній задачі, тобто за теоремою про проекціювання прямого кута – у цій площині необхідно побудувати ***горизонталь*** та ***фронталь*** тощо). Далі необхідно знайти точку ***К*** перетину цього перпендикуляра наданою площиною (це **1-ша ГПЗ)**. Нарешті потрібно знайти натуральну величину відрізка **(МК)** (це **2-га ОМЗ)** за правилом прямокутного трикутника. Таким чином, за цим алгоритмом на комплексному кресленні, по-перше, будуємо лінії рівня ***h*** і ***f***. Через $\mathbf{C_2}$ проводимо $\boldsymbol{h_2}$ паралельно до $\boldsymbol{x_{1\equiv 2}}$, у перетині з $\mathbf{(A_2\,B_2)}$ здобуваємо т.$\mathbf{1_2}$. Далі знаходимо т.$\mathbf{1_1}$ за її належністю до $\mathbf{(A_1\,B_1)}$ та з'єднуємо з т.$\mathbf{C_1}$ – це буде $\boldsymbol{h_1}$. Через $\boldsymbol{A_1}$ проводимо $\boldsymbol{f_1}$ паралельно до $\boldsymbol{x_{1\equiv 2}}$, у перетині з $\mathbf{(B_1C_1)}$ здобуваємо т. $\mathbf{2_1}$. Далі знаходимо т. $\mathbf{2_2}$ за її належністю до $\mathbf{(B_2C_2)}$ та з'єднуємо з т. $\mathbf{A_2}$ – це буде $\boldsymbol{f_2}$. Далі будуємо проекції нормалі $\boldsymbol{t}$: $\boldsymbol{t_1} \perp \boldsymbol{h_1}$; $\boldsymbol{t_2} \perp \boldsymbol{f_2}$.

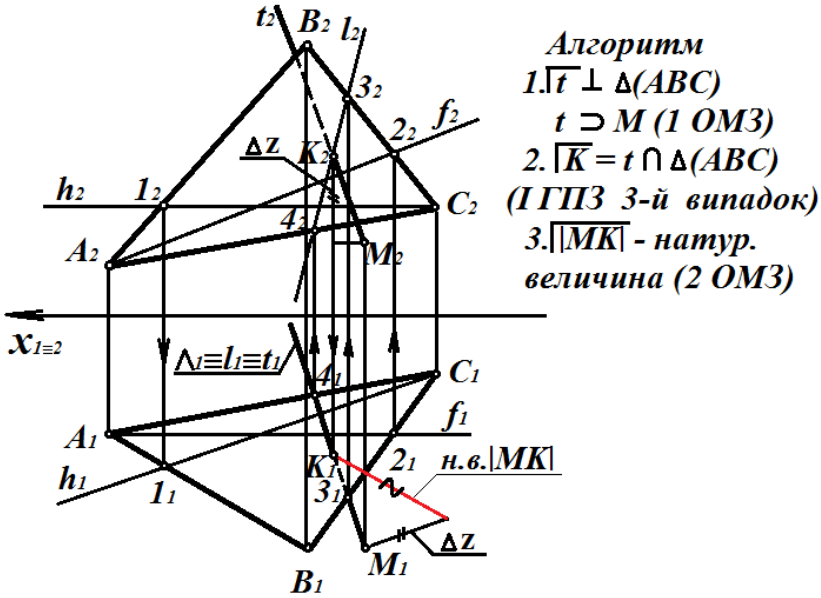


Рис. 4.4. Задача 2

Для знаходження т. **К** перетину прямої ***t*** з наданою площиною $\mathbf{\Delta(ABC)}$ – це ***перша ГПЗ 3-й випадок*** – необхідно застосувати спосіб допоміжних січних *проекціюючих площин-посередників*. Наприклад, візьмемо Λ – горизонтально-проекціюючу площину, що проходить через ***t*** $(\Lambda_1 \equiv t_1)$. Далі знайдемо лінію перетину площини Λ з площиною $\mathbf{\Delta(ABC)}$ – це пряма ***d***: вона проходить через тт. **3** і **4** (на $\mathbf{\Pi_1}$ $\boldsymbol{d_1}$ збігається з $\boldsymbol{t_1}$, а на $\mathbf{\Pi_2}$ $\boldsymbol{d_2}$ знайдемо за допомогою т. $\mathbf{3_2}$, що належить до $\mathbf{(B_2C_2)}$, і т. $\mathbf{4_2}$, що належить до $\mathbf{(A_2C_2)}$. Нарешті знаходимо т. **К** – спочатку на $\mathbf{\Pi_2}$ як точку перетину $\boldsymbol{d_2}$ та $\boldsymbol{t_2}$, а далі – на $\mathbf{\Pi_1}$ за належністю $\mathbf{K_1}$ до $\boldsymbol{t_1}$.

Шуканою відстанню від т. **М** до площини **Δ (АВС)** є відрізок **(МК)**. Його натуральна величина визначається за правилом *прямокутного трикутника* (див. рис. 4.2).

У символічній формі можна записати алгоритм розв’язання:

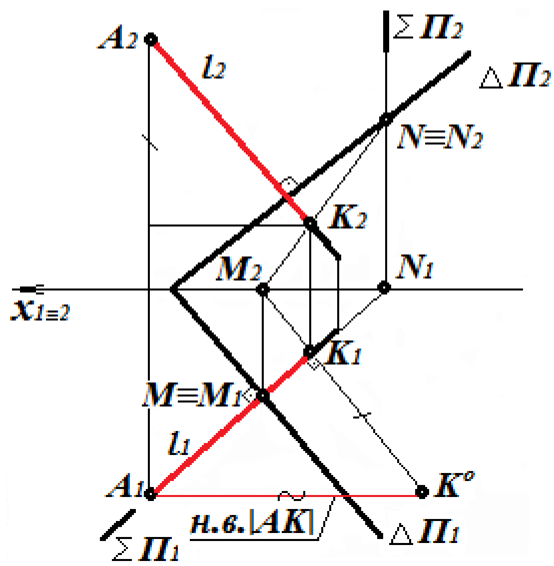
1. $\boldsymbol{t \perp \Delta}$ **(ABC),**

2. $\boldsymbol{K = t \cap \Delta}$ ***(ABC),***

3. ***МК*** – натуральна величина (н.в.)

Задача розв’язана.

Наведену на рис. 4.5 задачу про знаходження відстані від т. **А** до площини розглянути самостійно.



1. $l \perp \Delta,\ l \supset A$
2. $\Sigma \supset l,\ \Sigma \perp\!\!\perp \Pi_1$
3. $MN = \Delta \cap \Sigma$
4. $K = l \cap MN$
5. $|A_1K|$

Рис. 4.5. Задача про знаходження відстані від точки *А* до площини *Δ*

Задача 3* (рис. 4.6)**. Знайти натуральну величину відстані від точки **M** до прямої лінії ***t.

Розв'язання: Зрозуміло, що найкоротша відстань визначається як перпендикуляр з т. **M** до наданої прямої ***t***, але на комплексному кресленні цей перпендикуляр неможливо побудувати відразу, тому спочатку необхідно через надану точку **M** побудувати площину ***Σ***, що перпендикулярна до наданої прямої ***t*** (це **1 - ша ОМЗ**). Далі необхідно знайти точку **N** перетину цієї площини ***Σ*** з наданою прямою ***t*** (це **1 - ша ГПЗ**), а потім знайти натуральну величину відрізку (**MN**) (це **2 - га ОМЗ**).

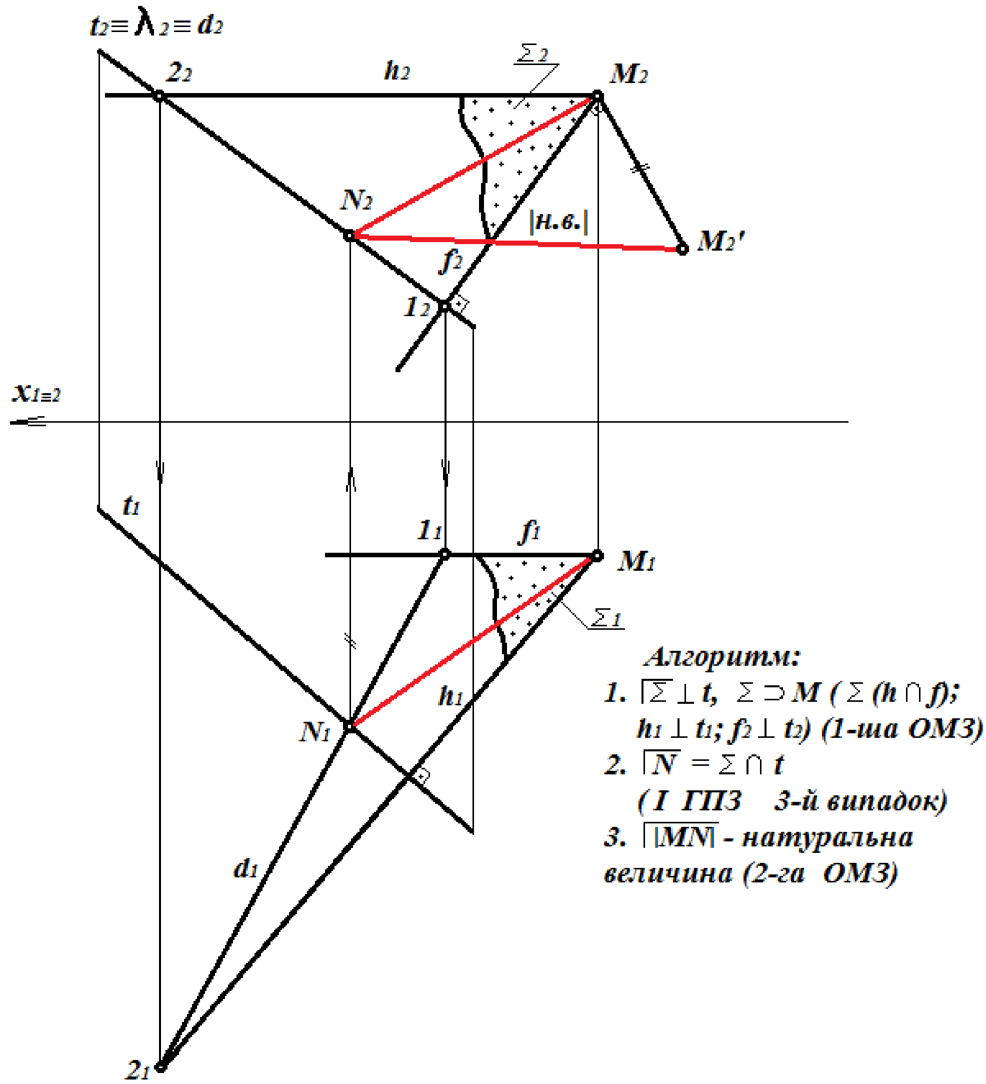


Рис. 4.6. Задача 3

За ознакою перпендикулярності прямої та площини, а також на основі другого наслідку з теореми про проекціювання прямого кута для задання площини $\boldsymbol{\Sigma}$ ***(h*** $\cap$ ***f)*** $\perp$ ***t*** необхідно через надану т. **М** побудувати $h_1 \perp t_1$;

$f_2 \perp t_2$ $(h_2 \parallel x_{1\equiv 2}; f_1 \parallel x_{1\equiv 2})$.

Для знаходження т. **N** перетину прямої ***t*** з площиною $\boldsymbol{\Sigma}$ ***(h*** $\cap$ ***f)*** необхідно застосувати спосіб допоміжних січних проекціюючих площин – посередників. Тому, наприклад, візьмемо $\boldsymbol{\Lambda}$ – фронтально-проекціюючу площину, що проходить через ***t***, та знайдемо лінію перетину цієї площини $\boldsymbol{\Lambda}$ з площиною $\boldsymbol{\Sigma}$ ***(h*** $\cap$ ***f)*** – це пряма ***d***: вона проходить через тт. ***1*** і ***2*** (на Π_2 d_2 збігається з t_2, а на Π_1 d_1 знайдемо за допомогою т. 1_1, що належить до f_1, і т. 2_1, що належить до h_1). Нарешті знаходимо т. **N**: спочатку на Π_1, як точку перетину d_1 та t_1, а далі на Π_2 – за належністю N_2 до t_2. Шуканою відстанню від т. **М** до прямої ***t*** є відрізок **(MN)**. Його натуральна величина визначається за правилом прямокутного трикутника (див. рис. 4.2).

Задача розв'язана.

Задача 4 **(рис. 4.7)**. Через надану точку **M** побудувати площину ***T***, що перпендикулярна до двох площин $\Gamma(c \parallel d)$ та $\Delta(a \cap b)$.

Розв'язання: як відомо, дві площини перпендикулярні між собою, якщо кожна з них проходить через перпендикуляр до другої площини. Таким чином, шукана площина **Т** буде побудована за допомогою двох прямих, що перетинаються у т. **М,** а також одна пряма, наприклад, **(MN)** повинна бути перпендикулярною до $\Gamma(c \parallel d)$, а друга пряма – **(МК)** – перпендикулярна до $\Delta(a \cap b)$.

Міркування аналогічні до попередніх, тобто необхідно розв'язати **1-шу ОМЗ:** у кожній з наданих площин необхідно побудувати лінії рівня – горизонталі $h \subset \Gamma$ та $h' \subset \Delta$ і фронталі $f \subset \Gamma$ та $f' \subset \Delta$, а далі за теоремою про проекціювання прямого кута слід побудувати:

$$(M_1 K_1) \perp h_1;\ (M_2 K_2) \perp f_2;\ (M_1 N_1) \perp h_1';\ (M_2 N_2) \perp f_2'.$$

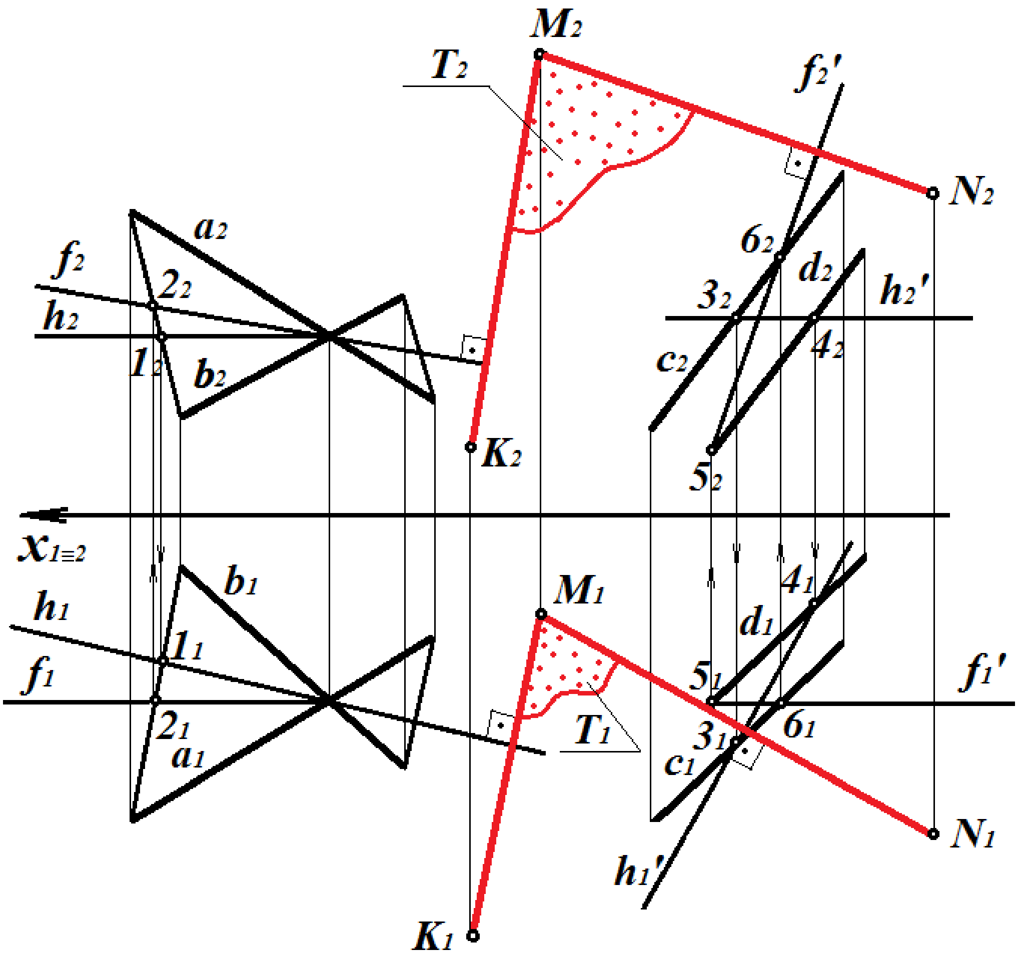


Рис. 4.7. Задача 4

Задача розв'язана.

4.3. Перетворення комплексного креслення: способи та сутність. Чотири основні задачі перетворення

Раніше, при розгляді головних позиційних задач було показано, що їх розв'язання значно спрощується, якщо надані геометричні образи займають особливе положення стосовно площин проекцій. Зрозуміло, не завжди вдається витримати цю умову у вихідних даних задачі. Крім того, в інженерній практиці дуже часто метрична конструкція буває настільки складною, що на видах не все можна «побачити». Тому потрібно вміти, маючи двокартинне креслення, просторово зв'язувати окремі види фігури.

Будь-які побудови на комплексному кресленні, що відображають переміщення в просторі і призводять до утворення нового поля проекцій, визначають як перетворення комплексного креслення.

Кінцевою метою будь-якого перетворення є одержання нового зображення, на якому об'єкт займає особливе положення.

При побудові алгоритмів розв'язання позиційних і метричних задач використовується набір типових геометричних побудов. Це дозволяє швидше зрозуміти, запам'ятати і вирішити конкретну задачу, привести розв'язання задач даного класу в єдину систему.

При розв'язанні задач за допомогою перетворення комплексного креслення виділяють чотири типових геометричних побудови, що називають ***основними задачами перетворення комплексного креслення:***

1 - перетворити комплексне креслення так, щоб **пряма загального положення** зайняла положення лінії **рівня**;

2 - перетворити комплексне креслення так, щоб **пряма рівня** зайняла положення **проекціюючої** лінії;

3 - перетворити комплексне креслення так, щоб **площина загального положення** зайняла положення **проекціюючої** площини;

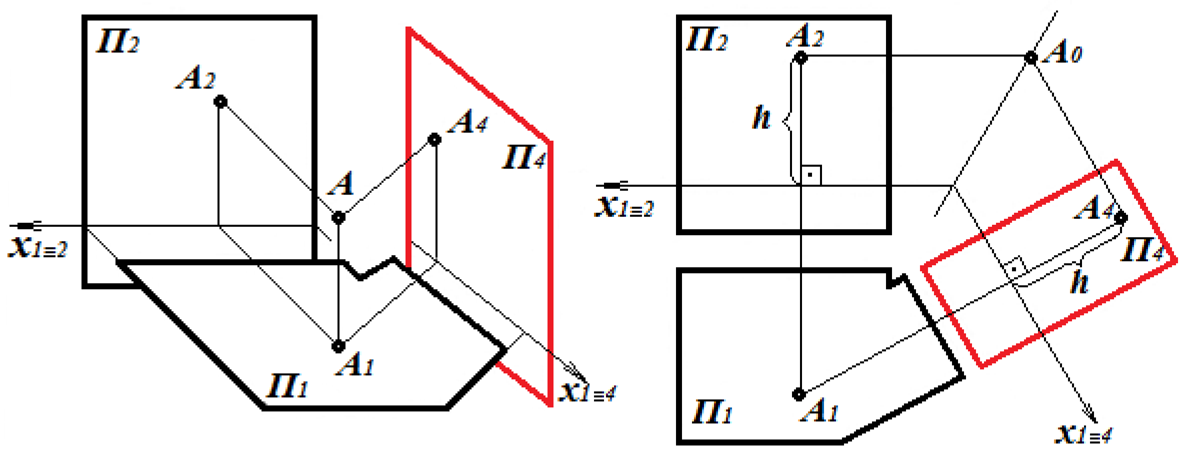
4 - перетворити комплексне креслення так, щоб **проекціююча** площина зайняла положення площини **рівня**.

Розглянемо основні **способи** перетворення комплексного креслення.

Спосіб введення нових площин проекцій

Цей спосіб називають ще способом ***заміни площин*** проекцій. Його сутність полягає в тому, що об'єкт у просторі залишається *нерухомим*, а з введенням нової площини проекцій утворюється нова система двох взаємозалежних ортогональних площин, у якій оригінал займає особливе положення.

На **рис. 4.8*а*** задано точку **А** в системі **($П_1$ - $П_2$)**, за допомогою нової площини проекцій **$П_4$** можемо перейти в систему **($П_1$ – $П_4$)** або **($П_2$ – $П_4$)**. В нашому випадку нова площина **$П_4$** перпендикулярна до **$П_1$**. Замість площини **$П_2$** введена **$П_4$**, на яку і проекціюється задана точка **А** у виді проекції **$А_4$**.



а) *б)*

Рис. 4.8. Спосіб введення нових площин проекцій

Зробимо на комплексному кресленні **(див. рис. 4.8*б*)** перехід від системи **($П_1$ - $П_2$)** до системи **($П_1$ – $П_4$)** .

У цьому випадку залишаються незмінними:

1 - горизонтальна проекція **$А_1$** точки *А*;

2 - висота ***h*** точки **А** щодо горизонтальної площини **$П_1$**.

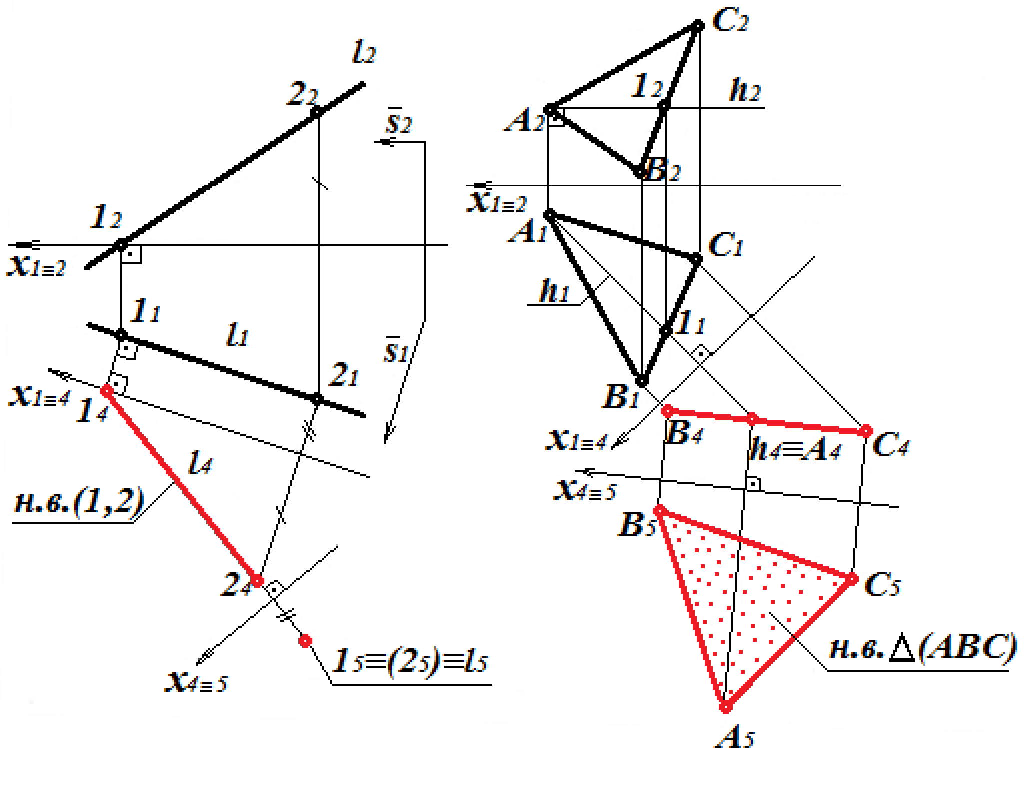
Тоді нова проекція **$А_4$** точки **А** лежить на одній лінії зв'язку з **$А_1$** і на відстані ***h*,** тобто заміряємо відстань від «старої» (попередньої) проекції **$А_2$** точки **А** до «старої» осі $x_{1\equiv 2}$ та відкладаємо від «нової» осі $x_{1\equiv 4}$ до «нової» проекції **$А_4$** точки **А** (рис. 4.8б).

При системному підходу до розв’язання метричних задач можна відмітити, що, маючи на увазі одинадцять елементарних метричних задач, виникають **чотири основних задачі перетворення** комплексного креслення.

На **рис. 4.9** наведені приклади послідовного розв’язання чотирьох основних задач перетворення способом введення нових площин проекцій.

Розглянемо ***першу*** та ***другу задачі***: перетворити комплексне креслення так, щоб задана пряма загального положення ***ℓ*** зайняла проекціююче положення (**рис. 4.9а**).

Для ***розв’язання*** цих задач необхідно виконати два етапи. Відомо, що графічною ознакою лінії рівня є перпендикулярність однієї з її проекцій до ліній зв'язку.



а) *б)*

Рис. 4.9. Розв'язання чотирьох основних задач перетворення комплексного креслення:

а) першої та другої задач; б) третьої та четвертої задач

Обираємо нову площину проекції **Π_4** **(*$x_{1\equiv4}$* || *ℓ_1*)**. Тоді напрямок проекціювання буде перпендикулярний до **Π_1**. Тобто від системи **(Π_1 – Π_2)** ми переходимо до системи **(Π_1 – Π_4)** – це *перша основна задача перетворення*. Для розв'язання *другої основної задачі перетворення* потрібно задати напрямок проекціювання перпендикулярно до проекції ***ℓ_4*** даної прямої ***ℓ***. Тобто від системи **(Π_1 – Π_4)** необхідно перейти до системи **(Π_4 – Π_5)**. Після завдання ***$x_{4\equiv5}$*** $\perp$ ***ℓ_4*** будуємо нову проекцію прямої ***ℓ_5***, використовуючи відомий вже алгоритм побудови додаткової проекції.

Для розв'язання ***третьої*** та ***четвертої задач*** (**рис. 4.9б**) також необхідні два перетворення: щоб площина загального положення **Δ (АВС)** зайняла проекціююче положення по відношенню до деякої площини **Π_4**, необхідно одну з прямих, що належать до **Δ**, зробити проекціюючою. Зрозуміло (з розв'язання основної задачі **2**), що лінію рівня можна відразу зробити проекціюючою. Звідси проводимо в площині **Δ (АВС)** горизонталь ***h*** (***h_2*** || ***$x_{1\equiv2}$***) і нову ось ***$x_{1\equiv4}$*** – перпендикулярно до ***h_1***. Далі будуємо нові проекції точок **A_4**, **B_4**, **C_4**, використовуючи відомий вже алгоритм побудови додаткових проекцій. Нарешті від системи **(Π_1 – Π_4)** необхідно перейти до системи **(Π_4 – Π_5)**, для чого паралельно до **Δ_4 (A_4, B_4, C_4)** вводимо нову вісь ***$x_{4\equiv5}$*** та будуємо нову проекцію **Δ_5 (A_5, B_5, C_5)**, яка і є натуральною величиною площини **Δ (A,B,C)**, тому що займає положення площини рівня (див. **рис. 4.9б**).

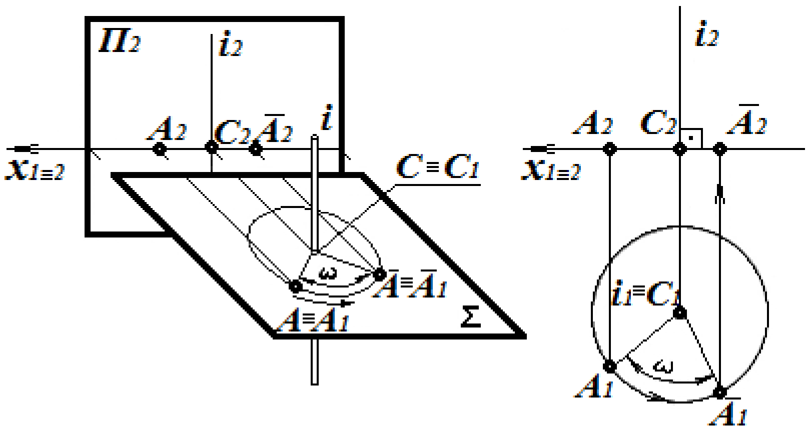
Задачі розв'язані.

Спосіб плоско-паралельного переміщення (обертання навколо проекціюючих прямих)

Плоский рух геометричної фігури, при якому всі її точки рухаються паралельно до деякої площини, називають ***плоско-паралельним переміщенням***. Окремим випадком плоско-паралельного переміщення є спосіб ***обертання навколо проекціюючих прямих***. Сутність цього способу полягає в тому, що площини проекцій **Π_1** і **Π_2** залишаються нерухомими, а оригінал (на

рис. 4.10 – точка *A*) обертається навколо нерухомої осі ***i*** . При цьому необхідно виділити наступні ***елементи апарата обертання:***

1. т. ***A*** – оригінал (об'єкт);
2. ***i*** – вісь обертання;
3. ***Σ*** – площина, у якій обертається оригінал, ***Σ*** перпендикулярна до ***i***;
4. т. ***C*** – центр обертання;
5. ***R* = *(AC)*** – радіус обертання.



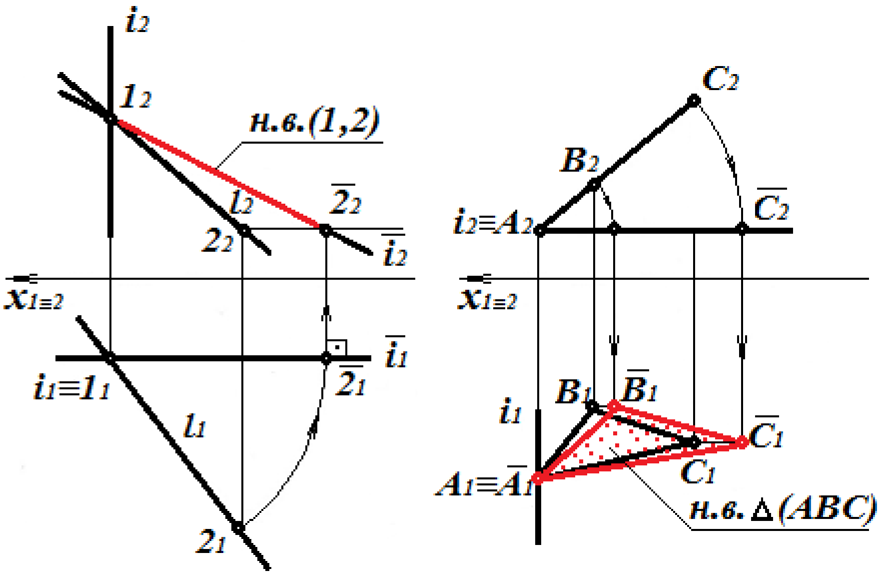
а) *б)*

Рис. 4.10. Спосіб обертання навколо проекціюючих прямих

На **рис. 4.11** показані приклади розв'язання першої та четвертої основних задач перетворення за допомогою обертання об'єктів відносно горизонтально-проекціюючої та фронтально-проекціюючої осей (для другої та третьої задач цей спосіб недоцільно використовувати з урахуванням ускладнених графічних побудов).

Спосіб обертання навколо ліній рівня

Задача 5. На **рис. 4.12** наведений приклад розв'язання задачі про знаходження натуральної величини площини трикутника **Δ (ABC)** способом обертання навколо його горизонталі (рекомендується розібратись самостійно).



а) *б)*

Рис. 4.11. Приклади ров'язання задач способом обертання

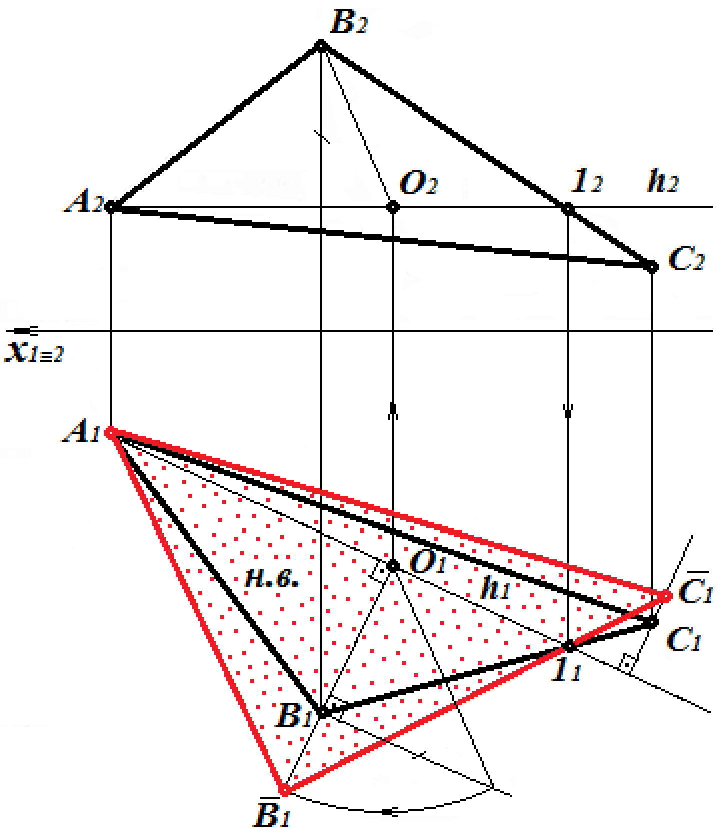


Рис. 4.12. Задача 5

4.4. Алгоритми та приклади розв’язання одинадцяти метричних задач з перетворенням комплексного креслення

Спосіб розв’язання метричних задач за допомогою перетворення комплексного креслення знайшов широке практичне застосування. Якщо за основні елементи простору взяти точку, пряму та площину, то можна визначити *одинадцять елементарних* метричних задач. В **табл. 4.1** містяться зміст та алгоритм розв’язання кожної з таких задач, що допоможе добре орієнтуватись в цьому розділі.

Таблиця 4.1

Алгоритми розв’язання елементарних метричних задач

(з перетворенням комплексного креслення)

№ п/п	Умова задачі	Алгоритм розв’язання	№ осн. задачі перетворення компл. кресл.
1	2	3	4
1	Визначити найкоротшу відстань між двома точками **A** і **B**	Перетворити комплексне креслення (к. кр.) так, щоб пряма лінія (**AB**) зайняла положення лінії **рівня**	1
2	Визначити найкоротшу відстань від точки **A** до площини **Δ**	Перетворити к. кр. так, щоб надана площина **Δ** зайняла **проекціююче** положення	3
3	Визначити найкоротшу відстань між прямою ***l*** та паралельною до неї площини **Δ**	Перетворити к. кр. так, щоб надана площина **Δ** стала **проекціюючою**	3
4	Визначити найкоротшу відстань між двома паралельними площинами **Δ** і **Δ’**	Перетворити к. кр. так, щоб надані площини **Δ** і **Δ’** зайняли **проекціююче** положення	3
5	Визначити найкоротшу відстань від точки до прямої ***l***	Перетворити к. кр. так, щоб надана пряма ***l*** стала **проекціюючою**	2

Продовження табл. 4.1

6	Визначити найкоротшу відстань між двома паралельними прямими	Перетворити к. кр. так, щоб надані прямі стали **проекціюючими**	2
7	Визначити найкоротшу відстань між мимобіжними прямими	Перетворити к.кр. так, щоб одна з наданих прямих зайняла **проекціююче** положення	2
8	Знайти натуральну величину кута між двома прямими, що перетинаються	Перетворити к. кр. так, щоб площина, що утворена наданими прямими, стала площиною **рівня**	4
9	Знайти натуральну величину кута між двома мимобіжними прямими	Кут між двома мимобіжними прямими вимірюється кутом між двома прямими, що перетинаються, при цьому одна з них паралельна наданій. Перетворити к. кр. так, щоб площина, що утворена такими прямими стала площиною **рівня**	4
10	Визначити натуральну величину кута між двома площинами, що перетинаються	Перетворити к. кр. так, щоб лінія перетину наданих площин зайняла **проекціююче** положення	2
11	Знайти натуральну величину кута між прямою ***l*** та площиною **Δ**	1.Перетворити к. кр. так, щоб надана площина **Δ** стала **проекціюючою** 2.Перетворити к. кр. так, щоб надана площина **Δ** стала площиною **рівня** 3.Перетворити к. кр. так, щоб площина **Г**, що утворена наданою прямою ***l*** та її проекцією на площину, стала **проекціюючою** 4.Перетворити к. кр. так, щоб площина **Г** стала площиною **рівня**	3 4 3 4

Розглянемо розв’язання деяких таких задач способом введення нових площин проекцій.

***Задача 6* (рис. 4.13)**. Знайти натуральну величину відстані від точки **A** до площини **Δ (BCD)**.

Розв’язання: як відомо, найкоротшою шуканою відстанню є перпендикуляр, і за алгоритмом розв’язання цієї другої задачі з табл. 4.1, необхідно перетворити комплексне креслення так, щоб надана площина **Δ** зайняла **проекціююче** положення. Така задача розглядалась на **рис.4.9*б***. Тому проводимо в площині **Δ (BCD)** горизонталь ***h*** і нову вісь $\boldsymbol{x_{1\equiv4}}$ перпендикулярно до $\boldsymbol{h_1}$ – переходимо з системи **($П_1$ - $П_2$) до ($П_1$ - $П_4$)**. Далі будуємо нові проекції точок **B_4, C_4, D_4** а також **A_4**, використовуючи відомий вже алгоритм побудови додаткових проекцій.

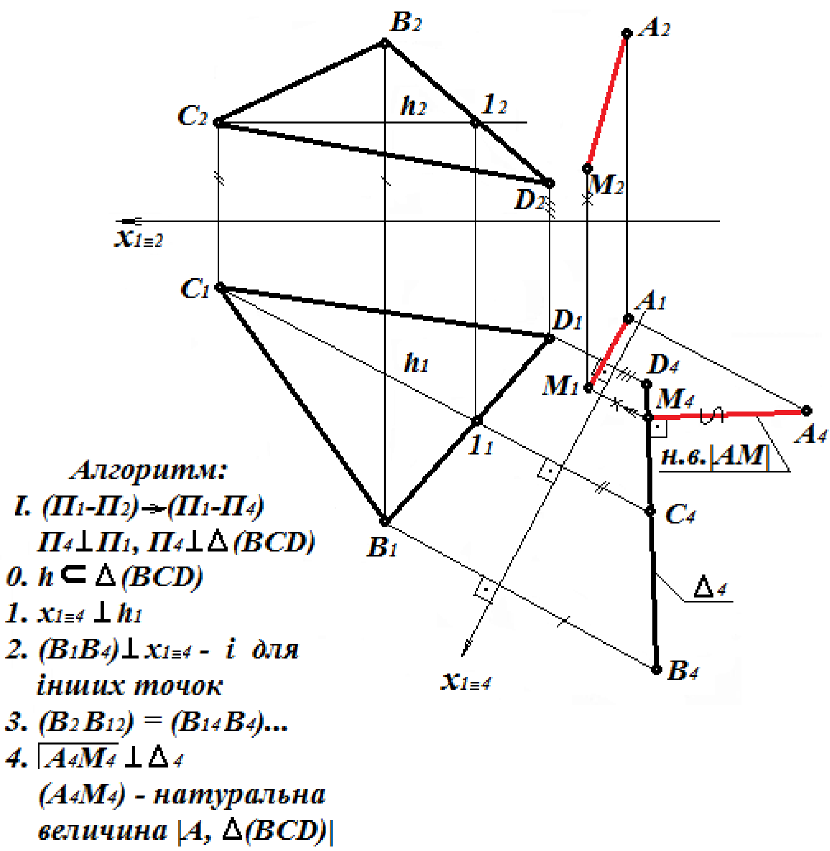


Рис. 4.13. Задача 6

Перпендикуляр **(A_4M_4)** є шуканою величиною – в зворотному порядку повертаємось в систему **($П_1$ - $П_2$)** і знаходимо проекції **(A_1M_1)** і **(A_2M_2)**.

Задача розв'язана.

***Задача** 7* **(рис. 4.14).** Знайти натуральну величину відстані між двома мимобіжними ребрами **(AB)** і **(CS)** пірамідальної поверхні способом введення нових площин проекцій.

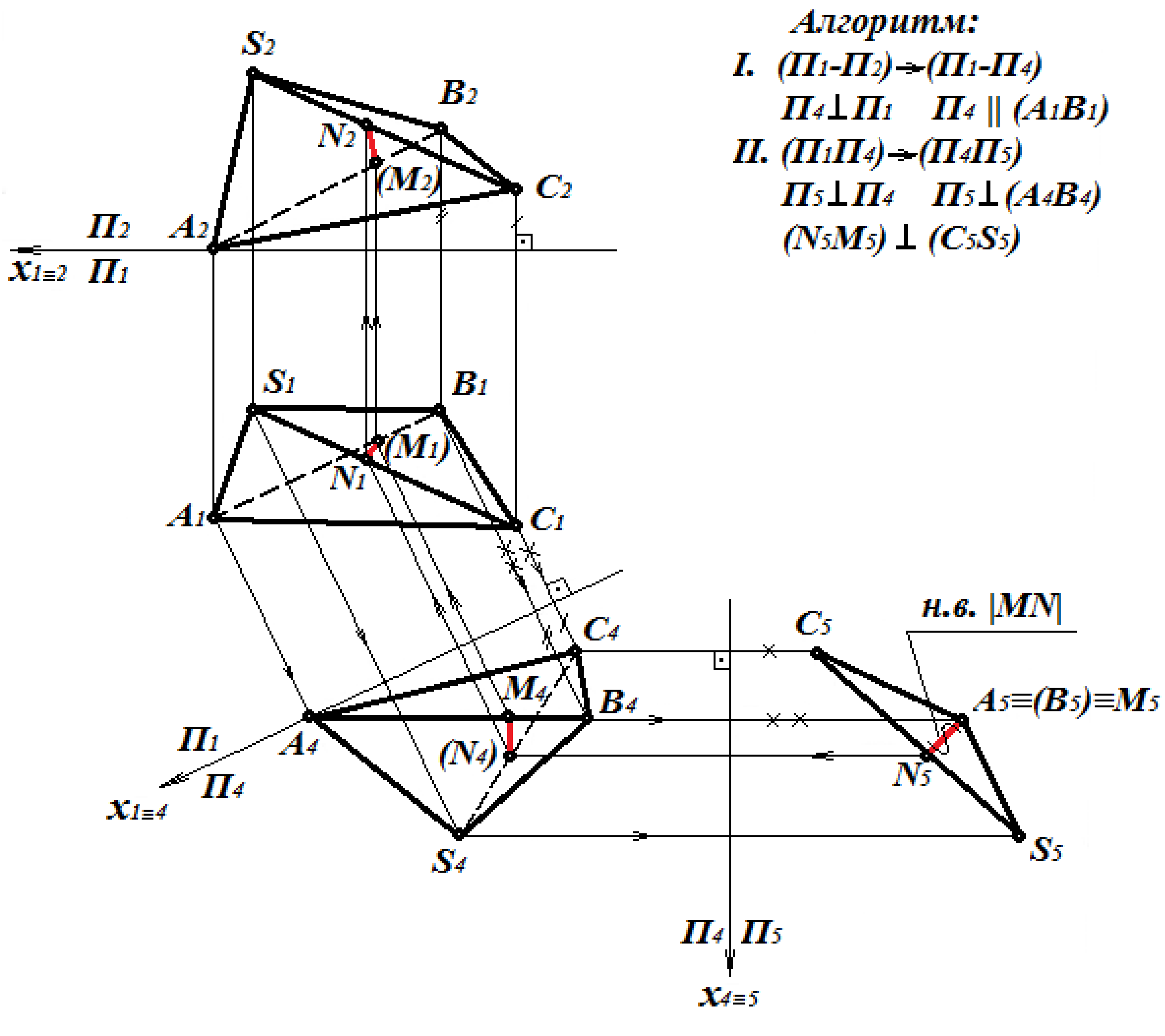


Рис. 4.14. Задача 7

Розв'язання: за алгоритмом розв'язання цієї сьомої задачі з табл. 4.1 необхідно перетворити комплексне креслення так, щоб одна з наданих прямих зайняла **проекціююче** положення – така задача розглядалась на **рис. 4.9*а***, і, як відомо, необхідно виконати два перетворення. Обираємо пряму **(АВ)** і подальші побудови є зрозумілими з наведеного креслення.

В зворотному напрямку повертаємось в систему **($П_1$ - $П_2$)**.

Задача розв'язана.

Задача 8 **(рис. 4.15).** Знайти натуральну величину двогранного кута між двома гранями **(АВС)** і **(АСS)** пірамідальної поверхні способом введення нових площин проекцій

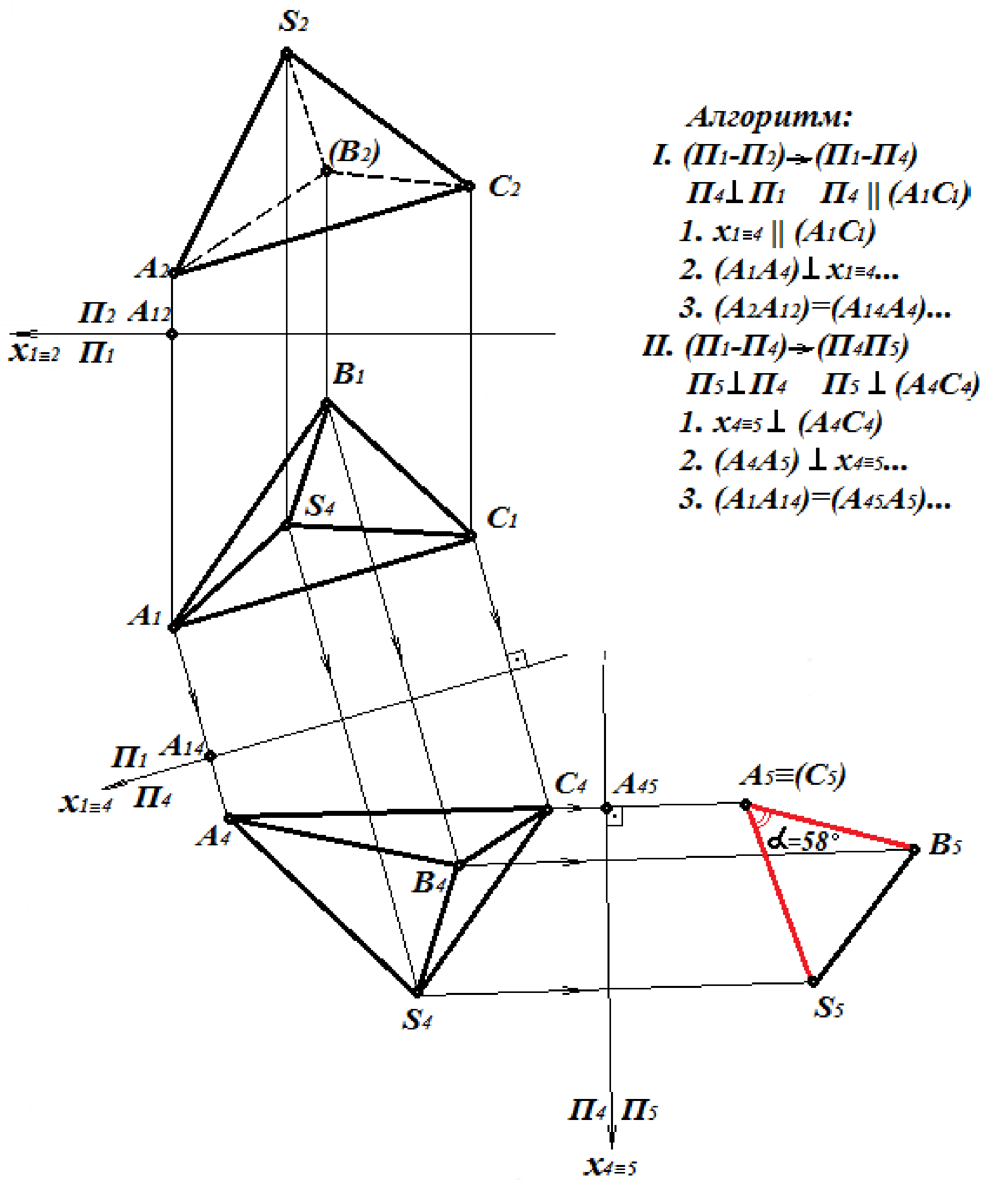


Рис. 4.15. Задача 8

Розв'язання: за алгоритмом розв'язання цієї десятої задачі з табл. 4.1 необхідно перетворити комплексне креслення так, щоб лінія перетину наданих площин (граней) зайняла **проекціююче** положення. Тобто ця задача була тільки що розглянута. Всі побудови є зрозумілими з наведеного креслення.

Задача розв'язана.

Досить часто при розв'язанні комплексних задач використовують спосіб перетину ***геометричних місць*** (множин).

Геометричним місцем точок (або інших елементів) є сукупність точок (або відповідних елементів), які мають деяку спільну властивість. Наприклад, ***геометричним місцем точок***, які віддалені від двох наданих точок **A** і **B** на площині, є пряма лінія, що проведена через середину відрізку **(AB)** перпендикулярно до нього, а у просторі – це площина ***Г***, що проходить через середину відрізку **(AB)** та перпендикулярна до нього.

Геометричним місцем точок, що віддалені від однієї точки **A** на відстань **R**, є на площині коло радіусом **R**, а у просторі – це сфера радіусом **R**.

Геометричним місцем точок, що віддалені від прямої ***d*** на відстань ***h***, є на площині дві прямі ***a*** та ***b***, а у просторі – це циліндрична поверхня з радіусом основи ***h***, тощо.

4.5. Алгоритми та приклади розв'язання головних позиційних задач з перетворенням комплексного креслення

Позиційні задачі іноді теж доцільно розв'язувати з перетворенням комплексного креслення. На **рис. 4.16 - 4.19** наведені приклади розв'язання таких задач (з побудовами рекомендується ознайомитись самостійно).

Задача 9 **(рис. 4.16).** Побудувати проекції точки **M** перетину прямої **(KL)** з площиною **Δ (ABC)** за допомогою способу введення нових площин проекцій.

Задача 10 **(рис. 4.17).** Побудувати проекції точок **M** і **N** перетину прямої ***l*** і сфери способом введення нових площин проекцій.

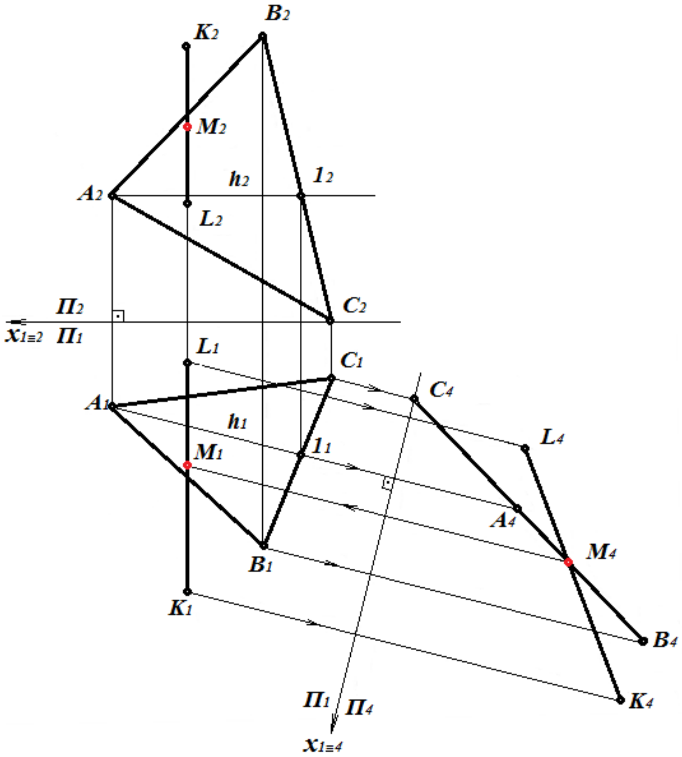


Рис. 4.16. Задача 9

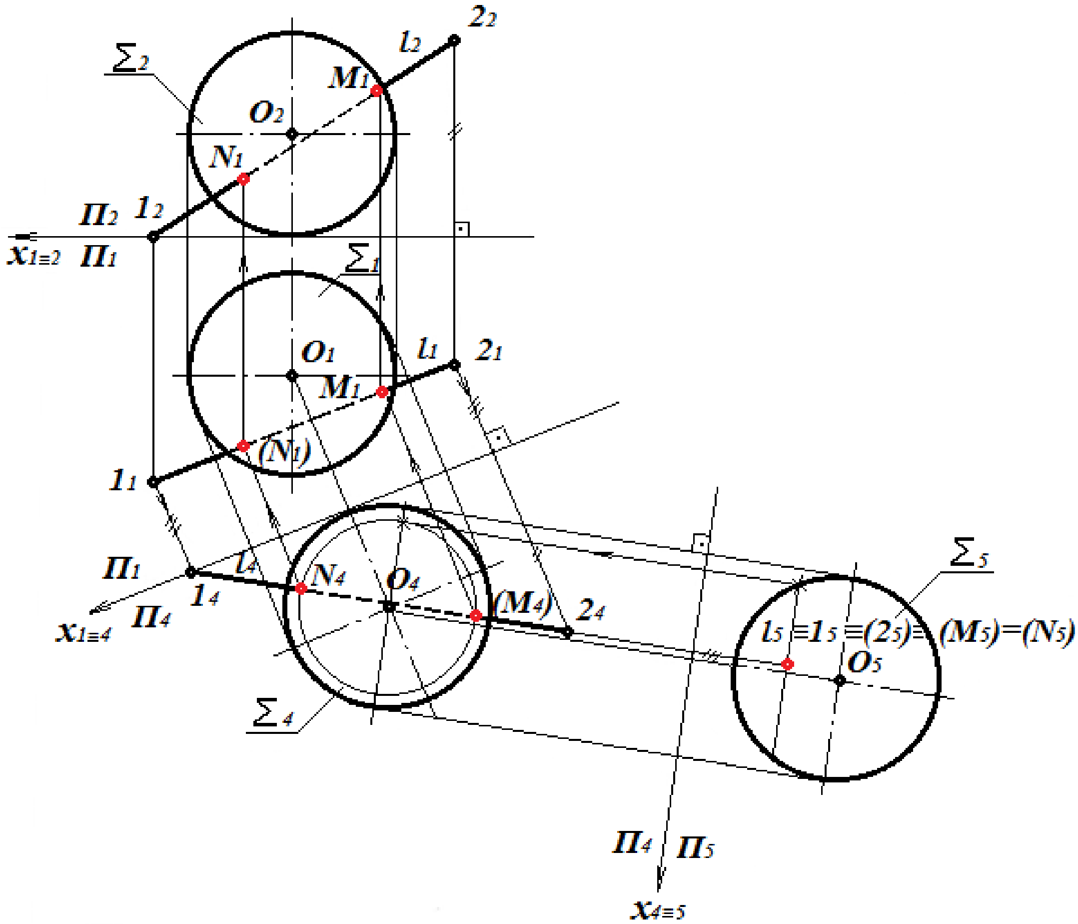


Рис. 4.17. Задача 10

Задача 11 **(рис. 4.18).** Побудувати проекції лінії ***k*** перетину площини з конічною поверхнею **Ф** способом введення нових площин проекцій (***k*** проходить через точки **A, B, C, …**).

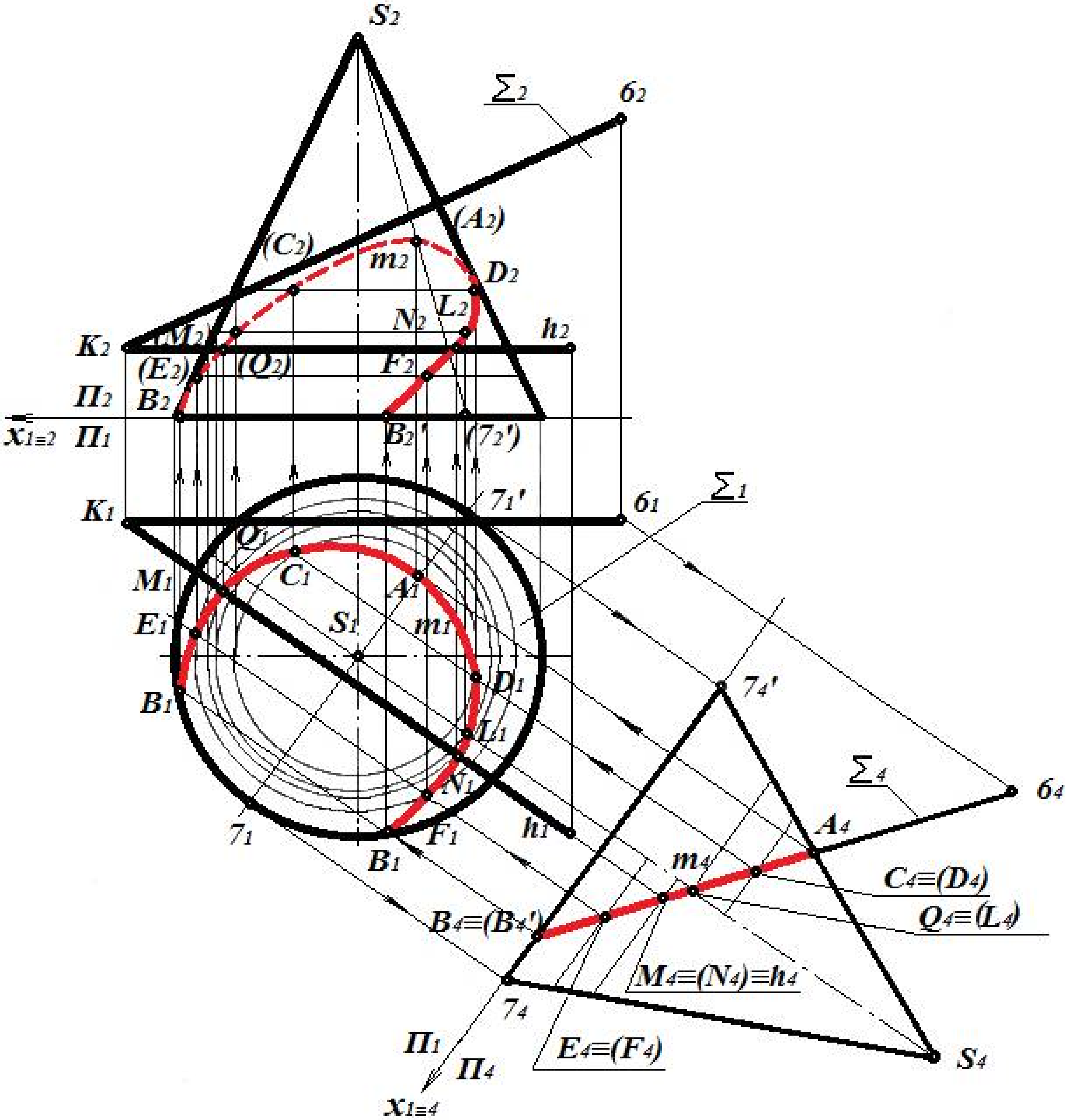


Рис. 4.18. Задача 11

Задача 12 **(рис. 4.19).** Побудувати проекції лінії ***n*** перетину циліндричної поверхні **Ф** з площиною (яка задана двома прямими ***f*** та ***h***, що перетинаються) способом введення нових площин проекцій.

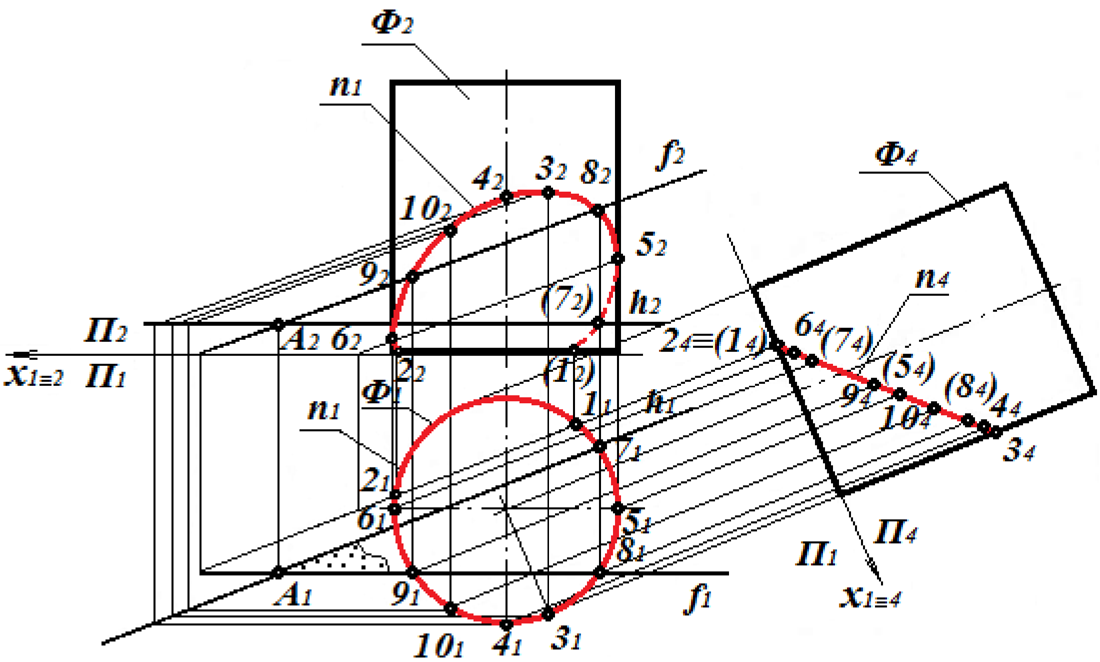


Рис. 4.19. Задача 12

Алгоритм в цих задачах був наступний: перетворити комплексне креслення так, щоб надана площина загального положення зайняла *проекціююче* положення.

Всі побудови є зрозумілими з наведених креслень (в задачі **10** на рис. 4.17 перетворення комплексного креслення було виконано для наданої прямої лінії).

Можна відмітити, що розв'язання таких задач з перетворенням комплексного креслення є більш раціональним способом в порівнянні з розглянутим раніше.

4.6. Питання для самоконтролю

1. Надати визначення та розглянути класифікацію метричних задач.

2. В чому полягає сутність І-ої та ІІ-ої ОМЗ?

3. Сформулювати та доказати теорему про проекціювання прямого кута.

4. Сформулювати і розглянути на комплексному кресленні правило прямокутного трикутника.

5. Навести алгоритми та приклади розв'язання деяких метричних задач.

6. Сформулювати ознаки взаємної паралельності та перпендикулярності прямої лінії та площини, двох площин.

7. В чому полягає сутність перетворення комплексного креслення та характеристика його способів введення нових площин проекцій, обертання навкруги проекціюючих прямих та ліній рівня.

8. Сутність чотирьох основних задач перетворення.

9.Навести алгоритми та приклади розв'язання одинадцяти елементарних метричних задач з перетворенням комплексного креслення.

10. В яких випадках рекомендується використовувати перетворення комплексного креслення при розв'язанні ГПЗ?

5. СПЕЦІАЛЬНІ РОЗДІЛИ

5.1. Проекції з числовими позначками

Нарисна геометрія є не тільки теорією зображень, але й дисципліною, що надає професійну освіту інженеру в галузі ***прикладної геометрії***, яка має особливе значення для архітектурних та будівельних спеціальностей.

При проектуванні інженерних споруд, що мають значно більші розміри в горизонтальному напрямку, ніж у вертикальному, застосовується ***метод проекцій з числовими позначками***. Зародження ідеї цього метода відноситься до середньовіччя, коли деякі народи вже користувались картами з вказаними морськими глибинами та вміли зображувати точку за допомогою її проекції та позначки. Теоретичне обґрунтування метод здобув лише у 1823 р. завдяки французькому військовому інженеру – капітану Нуазе. У теперішній час метод проекцій з числовими позначками широко розповсюджений при проектуванні генеральних планів забудови, у будівництві для зображення та проектування будь-яких інженерних споруд (котлованів, набережних, каналів, автомобільних шляхів, аеродромів, пішохідних підземних переходів тощо), в геодезії, геології та гірничій справі тощо.

Переваги методу:

• **зворотність** – він дає можливість точного відтворення форми та розмірів об’єкта за кресленням;

• **графічна рівноцінність** до оригіналу – забезпечує можливість виконання на кресленні геометричних операцій;

• **простота** графічного виконання креслення;

• **точність** графічних побудов та рішень.

Недоліки методу: не досить наочні зображення, необхідність додавання вертикальних розрізів (профілів) для розв’язання прикладних задач.

В основу методу числових позначок положено прямокутне проекціювання на одну площину проекцій, тобто монопроекціювання. Суть методу полягає в тому, що будь-яка точка **А** ортогонально проекціюється на

базову площину $\mathbf{П_0}$ **(рис.5.1)**. Її проекція **А** забезпечується праворуч деяким відносним числом, що показує відстань точки **А** від площини $\mathbf{П_0}$ – це є **числова позначка**, а всі розміри в напрямку, паралельному $\mathbf{П_0}$ приймаються безпосередньо з креслення, тому його обов'язково супроводжують ***масштабом***.

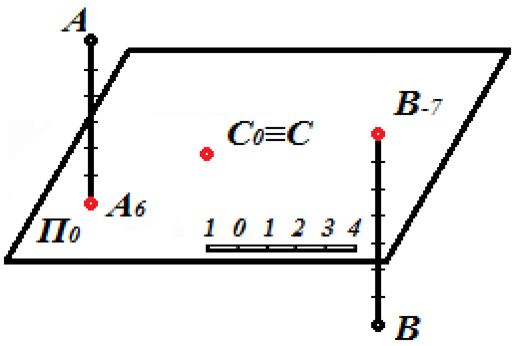


Рис. 5.1. Задання точок в проекціях з числовими позначками

Таким чином, будь-яка довільна точка простору в проекціях з числовими позначками задається своєю ортогональною проекцією на одну площину проекцій $\mathbf{П_0}$. Позначки можуть бути позитивними та негативними.

Відрізок (MN) прямої лінії можна задати наступним чином **(рис. 5.2)**:

1 – проекціями двох точок $(\mathbf{M_4, N_1})$;

2 – горизонтальною проекцією **(L),** яку називають ***закладенням***;

3 – проекцією однієї точки, наприклад, $\mathbf{M_4}$ та **ухилом** $\boldsymbol{i}$

$$\boldsymbol{i} = (\boldsymbol{h}_\mathrm{M} - \boldsymbol{h}_\mathrm{N}) / \mathrm{L} = \mathrm{tg}\ \alpha$$

де $(\boldsymbol{h}_\mathrm{M} - \boldsymbol{h}_\mathrm{N})$ – різниця позначок кінцевих точок відрізка – **підйом** (або перевищення) відрізка;

$\boldsymbol{\alpha}$ – кут нахилу прямої **(MN)** до площини $\mathbf{П_0}$.

Якщо пряма – горизонталь, то її числова відмітка вказується в розриві прямої, а горизонтально-проекціююча пряма проекціюється в точку. Точки, що належать до неї, співпадають, але мають різні числові відмітки.

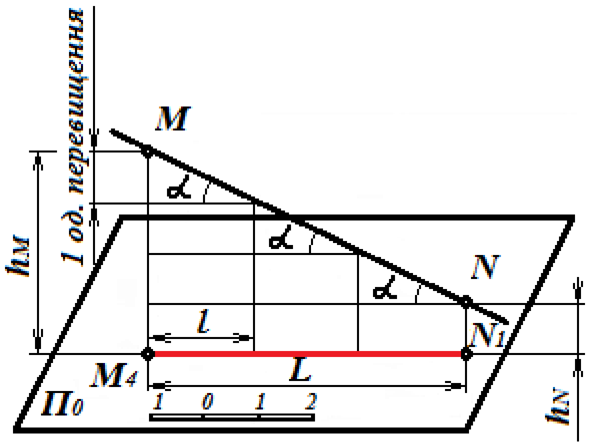
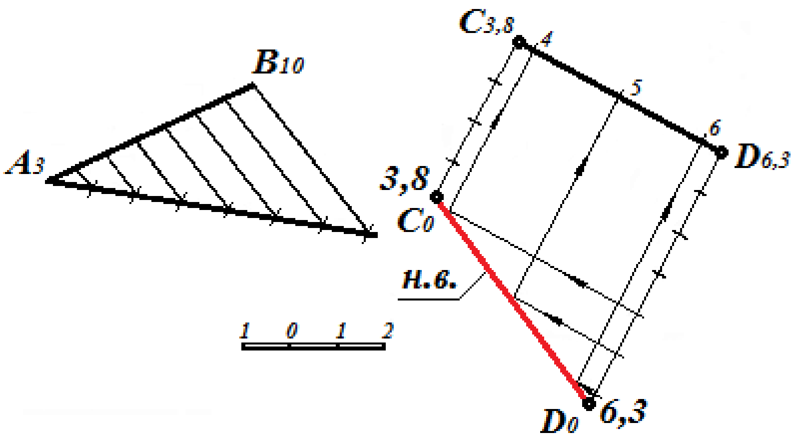


Рис. 5.2. Задання прямої в проекціях з числовими позначками

Інтервал прямої ***l*** – це величина закладення на одну одиницю підйому; інтервал та ухил – взаємно обернені величини.

На практиці велике значення має задача ***градуювання*** прямої лінії, тобто знаходження на прямій точок, позначки яких є цілими числами **(рис. 5.3).**

На **рис. 5.3*а*** показано пропорційне ділення відрізка на рівні частини (теорема Фалеса).

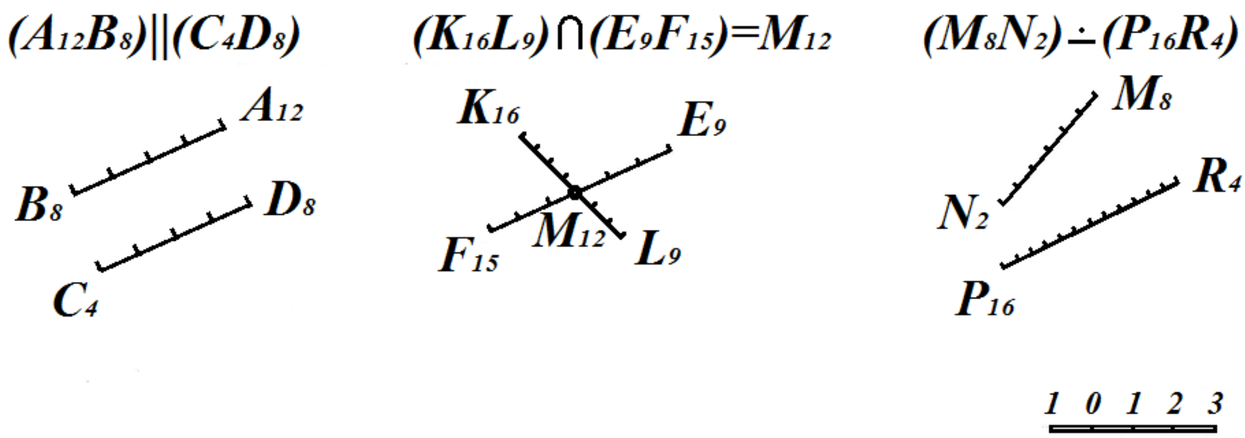


а) *б)*

Рис. 5.3. Пропорційне ділення відрізка на рівні частини

На **рис. 5.3*б***, коли кінцеві точки відрізка мають дрібні позначки, потрібно зробити наступне: провести перпендикуляри до закладення через кінцеві точки, на них відкласти відповідне число довільних однакових відрізків, кількість яких дорівнює величинам позначок (доцільно відрізок брати довжиною 10 мм, тоді дрібні частини легко відкласти). З'єднуємо знайдені точки $\mathbf{C_0}$ та $\mathbf{D_0}$ (це суміщені з $\mathbf{П_0}$ проекції точок **C** та **D**). Далі через відмітки на великому перпендикулярі проводимо прямі лінії паралельно до закладення до перетину зі суміщеною проекцією ($\mathbf{C_o\ D_o}$) прямої **(CD)**, через які будуємо перпендикуляри до закладення, що й покажуть цілі відмітки **(**див. рис. 5.3*б***)**.

Дві прямі можуть бути ***паралельними*** між собою, ***перетинатися*** та бути ***мимобіжними*** **(рис. 5.4)**. ***Ознаки*** паралельних прямих: їх проекції паралельні між собою, інтервали та напрям скату – однакові **(рис. 5.4*а*)**. Проекції прямих, що перетинаються, теж між собою перетинаються, точка перетину таких прямих повинна мати однакові позначки **(рис. 5.4*б*)**. Для мимобіжних прямих порушуються ознаки паралельності та перетину **(рис.5.4*в*)**.

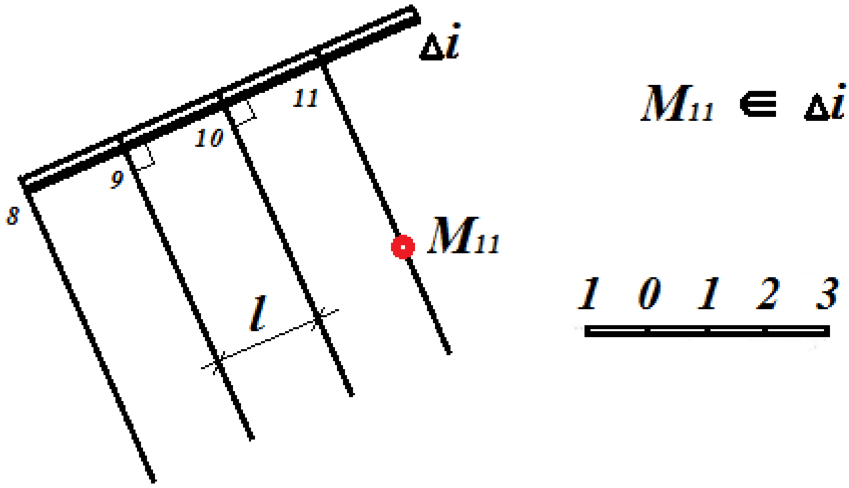


а) *б)* *в)*

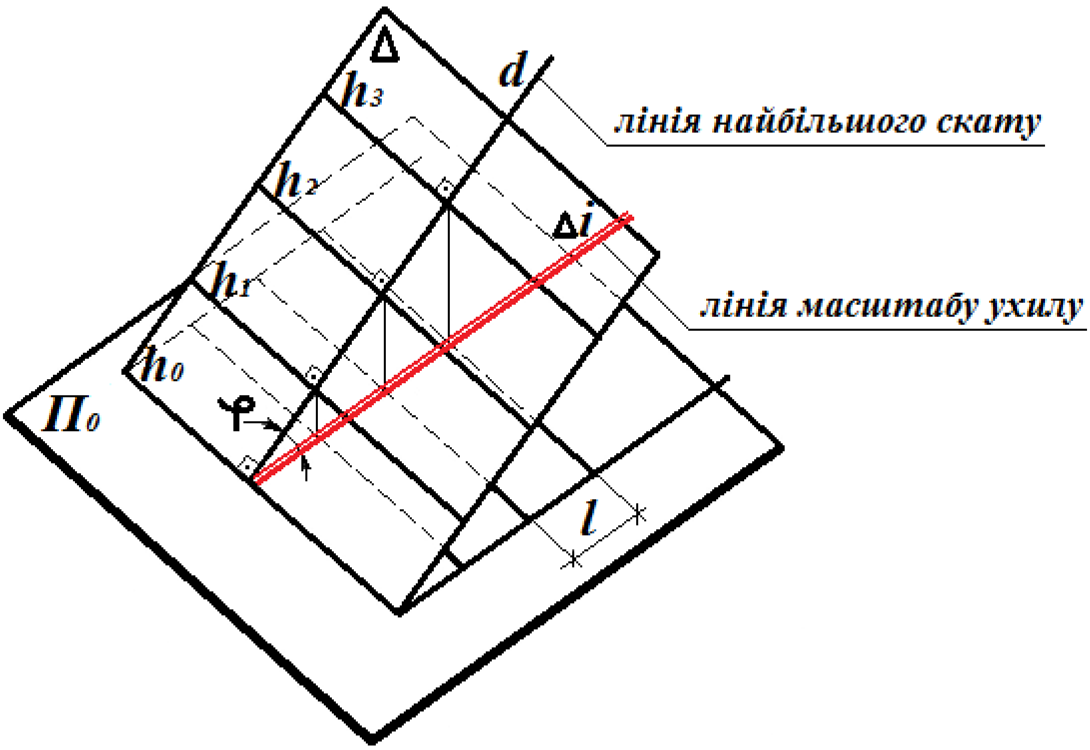
Рис. 5.4. Взаємне положення двох прямих

Площину, крім традиційних способів (трьома точками, точкою та прямою тощо), у проекціях з числовими позначками можна задати **лінією**

масштабу ухилу – це градуйована проекція лінії найбільшого скату **(рис. 5.5)**. У цьому розділі, необхідно підкреслити, зберігаються всі основні закономірності, які вивчались на комплексному кресленні, наприклад, *точка належить до площини, якщо вона лежить на лінії (зокрема, на горизонталі),* що належить до наданої площини (див. **рис. 5.5*а***).



а)

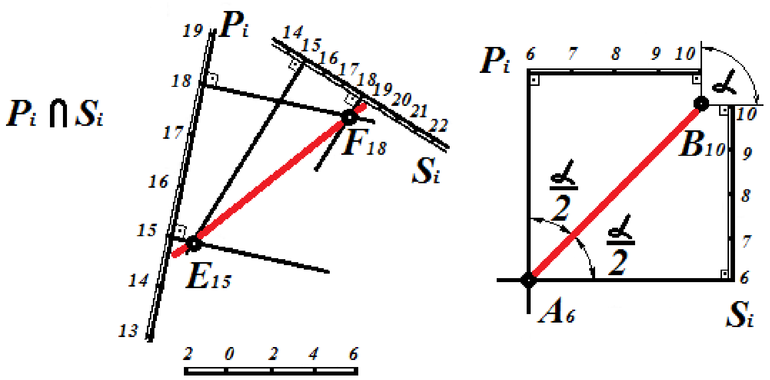


б)

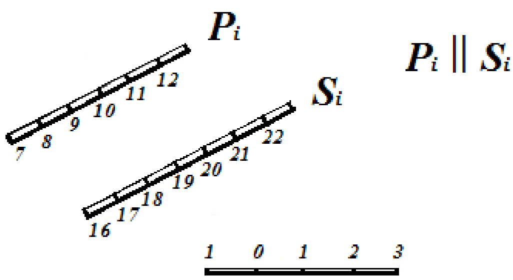
Рис. 5.5. Задання площини в проекціях з числовими позначками

На **рис. 5.5*б*** показана похила площина **Δ**, лінія найбільшого скату ***d***, що перпендикулярна до горизонталі $\boldsymbol{h_0}$ площини **Δ**, ***кут падіння φ*** **–** це кут нахилу площини **Δ** до основної площини $\mathbf{П_0}$, що вимірюється кутом між лінією найбільшого скату та її проекцією на $\mathbf{П_0}$. Через рівні проміжки паралельно до $\mathbf{П_0}$ проведені горизонтальні площини, що у перетині з площиною **Δ** дають горизонталі $\boldsymbol{h_1}$, $\boldsymbol{h_2}$, $\boldsymbol{h_3}$***...***; проекції горизонталей розташовані на відстані ***ℓ*** одна від одної (***ℓ – інтервал)*** та перпендикулярні до проекціїї лінії найбільшого скату, яку позначають $\boldsymbol{\Delta_i}$ – це і є ***лінія масштабу ухилу*** площини **Δ** (її показують подвійною лінією).

У просторі дві площини можуть перетинатись між собою **(рис. 5.6*а*)** або бути паралельними **(рис. 5.6*б*)**. Якщо дві площини перетинаються, то лінія їхнього перетину – пряма, що будується за точками перетину хоч би двох однойменних горизонталей (див. рис. 5.6*а*). При цьому, якщо площини мають однаковий інтервал (або ухил), то лінія перетину таких площин проходить по бісектрисі кута між їхніми лініями масштабів ухилів.



а)



б)

Рис.5.6. Взаємне положення двох площин

Якщо площини паралельні між собою (див. рис. 5.6*б*), то в них лінії масштабів ухилів також паралельні між собою, інтервали однакові та зріст числових відміток йде в одному й тому ж напрямі.

Таким чином, узагальнимо *термінологію та основні поняття методу:*

Площина нульового рівня, $\mathbf{П_0}$ – площина проекцій, від якої проводиться відлік висот (див. рис. 5.1);

Числова відмітка – відстань наданого об’єкта, наприклад, точки, до площини $\mathbf{П_0}$**;**

Перевищення (або **підйом)**, Δ**H** – різниця між числовими відмітками двох будь-яких точок (див. рис. 5.2);

Закладення, **L** – проекція відрізка на площину нульового рівня $\mathbf{П_0}$;

Ухил, ***i*** – відношення перевищення будь-якого відрізка до його закладення: $\boldsymbol{i} = \Delta\mathbf{H} / \mathbf{L}$. Ухил можна визначити як тангенс кута нахилу $\boldsymbol{\alpha}$ відрізка до площини проекцій $\mathbf{П_0}$: $\boldsymbol{i} = \mathbf{tg}\ \boldsymbol{\alpha}$. На кресленні ухил може бути вказаний відношенням $(\Delta\mathbf{H} / \mathbf{L})$, в градусах (^{0}), у відсотках (%), в промілях (0/00) – біля стрілки, що вказує напрям зменшення відміток;

Інтервал, ***l*** – закладення відрізка при одиничному перевищенні точок, тобто при різниці між числовими відмітками Δ**H** = 1. Інтервал – величина, що зворотна до ухилу***:*** $\boldsymbol{l} = \mathbf{1} / \boldsymbol{i}$;

Градуювання (інтерполювання) прямої – знаходження точок, відмітки яких визначаються цілими числами та відрізняються на одиницю (див. рис. 5.3);

Графік масштабів ухилів – графічна залежність вказаних параметрів ***i***, ***l***, що виконується у масштабі креслення.

По осі ординат відкладається значення перевищення Δ**H**, по осі абсцис – значення закладення **L**. Через здобуту точку та початок координат будується пряма – графік ухилу. Кут між прямою і віссю абсцис і є кутом нахилу $\boldsymbol{\alpha}$ відрізка до $\mathbf{П_0}$. Як відомо, інтервал ***l*** дорівнює величині закладення при перевищенні 1. Через відмітку 1м на осі ординат проводиться горизонтальна лінія (одиничний підйом) до перетину з графіком ухилу. Абсциса точки перетину дорівнює значенню інтервалу ***l***.

Бергштрихи – умовні знаки, що зазначають спуск, зображуються тонкою лінією штриховки (на весь відсік ухилу) та короткою **основною суцільною** лінією довжиною 5 - 7мм на відстані 2 - 2,5 мм, які направлені в бік пониження відміток перпендикулярно до горизонталей.

Напрям простирання площини – лівий напрям її горизонталей, якщо дивитись вздовж лінії найбільшого скату в бік спуска площини, вказується стрілкою на горизонталі.

Кут простирання площини ψ (°) – кут між північним напрямом магнітного меридіану та напрямом простирання площини, що вимірюється проти годинникової стрілки.

Масштаб ухилу площини – градуйована проекція лінії найбільшого скату площини. Масштаб ухилу зображають двома паралельними лініями на відстані 1мм, одна з яких основна, товщиною 0,7мм, друга тонка – 0,35мм. Цілочисельні відмітки позначають засічками, довжиною 1,0 - 1,5 мм. Числа розташовують над верхньою частиною в бік підвищення відміток.

Інтервал площини *l* (м) – відстань між проекціями сусідніх горизонталей, інтервал площини дорівнює інтервалу лінії найбільшого скату.

Градуювання площини – побудова набора горизонталей площини, відмітки яких визначаються цілими числами та відрізняються на одиницю.

У процесі будівництва будь-яких споруд на місцевості можна зустрінуться з різними видами поверхонь. До геометричних поверхонь відносяться всі поверхні, утворення яких виконується за певними геометричними законами. Різні поверхні у проекціях з числовими позначками задають за допомогою проекцій своїх горизонталей. Для побудови горизонталей поверхонь їх перетинають горизонтальними площинами. Так, наприклад, поверхню ***прямого кругового конусу*** **(рис. 5.7)** задають проекцією вершини з її числовою позначкою та проекціями паралелей у виді концентричних кіл, які розташовані на відстані інтервалу ℓ (градуйована проекція твірної є лінією масштабу уклону поверхні конуса).

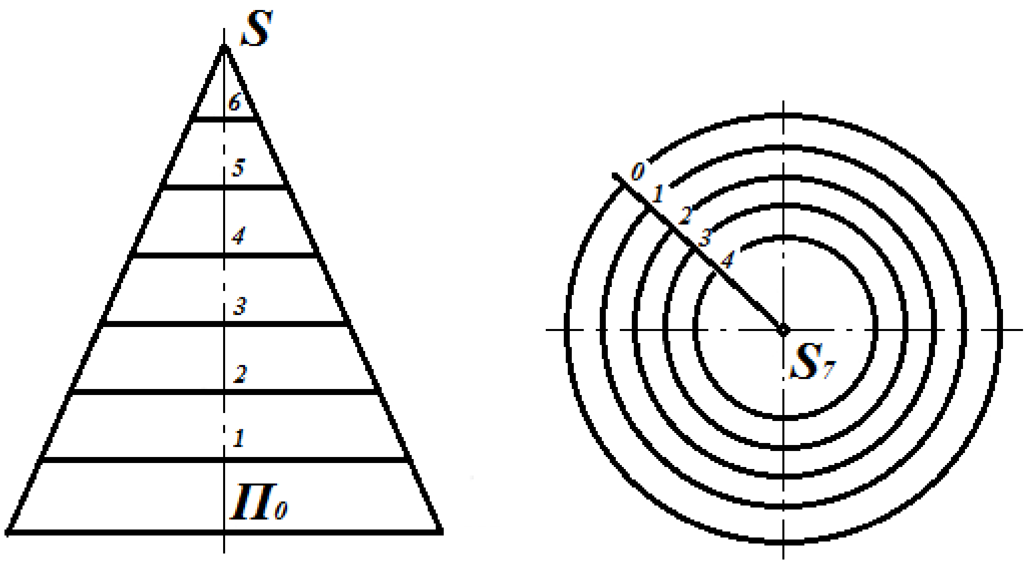


Рис. 5.7. Задання поверхні прямого кругового конусу

Графічною визначається «*неправильна*» поверхня, закон утворення якої невідомий. Прикладом графічної поверхні можна вважати поверхню землі, яку ще визначають як **топографічну** поверхню. В цьому випадку поверхня задається за допомогою деякої кількості ліній, що утворюють **каркас**. Для зображення поверхонь як геометричних, так і топографічних використовують проекції горизонталей, що знайдені в результаті перетину наданої поверхні рядом січних площин - посередників – горизонтальних площин рівня $\mathbf{П_0}$, $\mathbf{П_1}$, $\mathbf{П_2}$, …, які відстоюють одна від іншої на фіксовану величину – 1 м, 5 м чи ін. в залежності від висоти об’єкта (**рис. 5.8**). Топографічна поверхня на кресленні зображується проекціями своїх ***горизонталей***, тобто незакономірними лініями, що з’єднують точки з однаковими числовими відмітками.

Зазвичай горизонталі позначаються числовими відмітками, по яких можна говорити про рельєф місцевості – зменшення відстані між проекціями суміжних горизонталей означає, що крутість схилу топографічної поверхні збільшується, та навпаки.

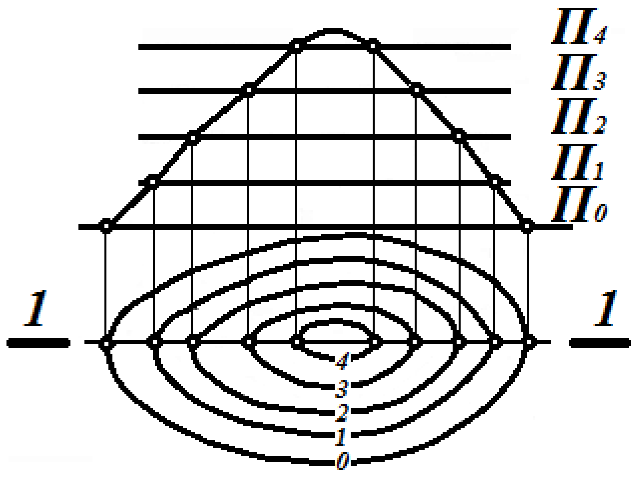


Рис. 5.8. Задання топографічної поверхні

В практиці проектування за допомогою методу проекцій з числовими позначками вирішуються задачі на перетин двох площин (раніше розглядались такі задачі) та площин з топографічною поверхнею. Лінія перетину *площини з топографічною поверхнею будується за точками перетину однойменних горизонталей*, приклад побудов наведений на **рис. 5.9**.

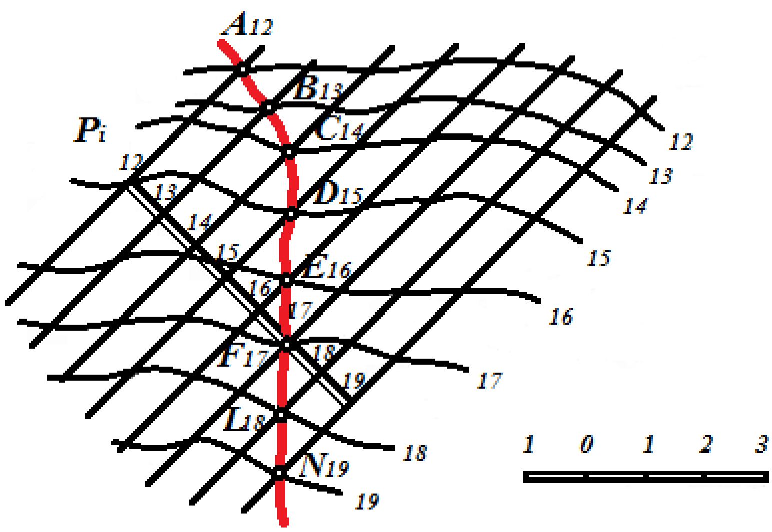


Рис.5.9. Побудова лінії перетину площини з топографічною поверхнею

Розглянемо наступні задачі.

Задача 1 **(рис. 5.10).** На прямій **($A_4B_{7,2}$)** визначити числову відмітку точки **С**.

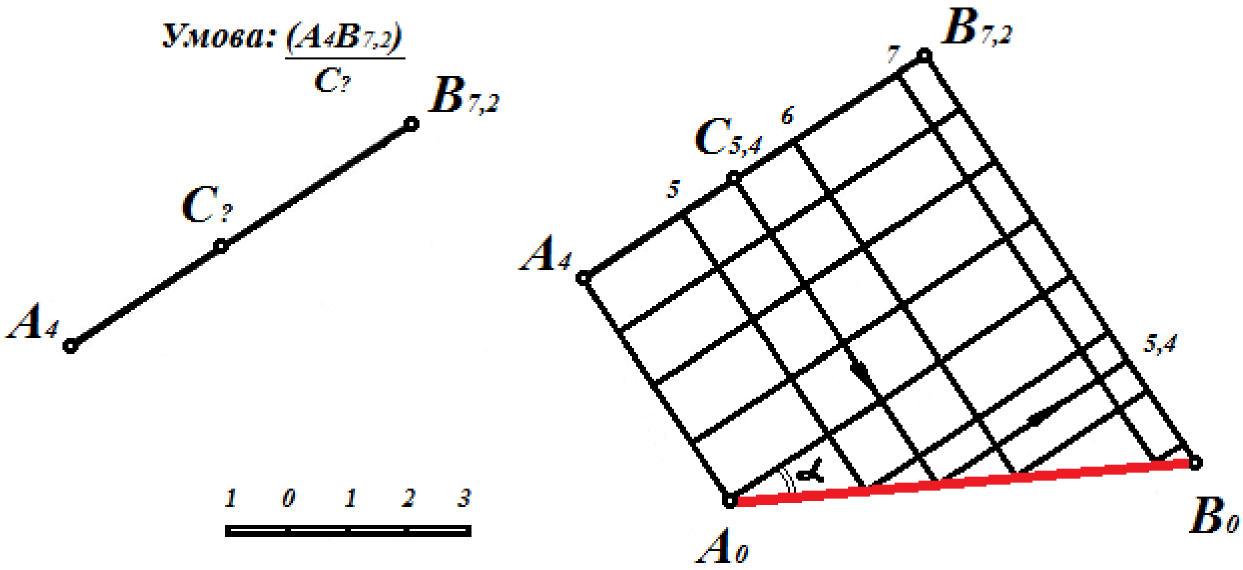


Рис. 5.10. Задача 1

Розв'язання. Для визначення числової відмітки довільної точки, по-перше, необхідно проградуювати надану пряму. Для цього на основі пропорційного ділення (див. **рис. 5.10**) відрізка спочатку побудуємо перпендикуляри до проекції прямої з точок **A_4** та **$B_{7,2}$**, на яких відкладемо **4** масштабних одиниці від точки **A_4** та сім і дві десятих одиниць від точки **$B_{7,2}$**. З'єднуємо знайдені точки – це суміщені з **$П_0$** проекції точок **A_0** та **B_0**. Далі через відмітки на великому перпендикулярі проводимо прямі лінії паралельно до закладення **(A_4,$B_{7,2}$)** до перетину із суміщеною проекцією **(A_0,B_0)**. Через знайдені точки будуємо перпендикуляри до закладення. Отже, точка **С** розташована в інтервалі **(5 – 6)**. Далі необхідно зробити інтерполяцію**.** Таким чином, відмітка т. **С = 5,4**. На **рис. 5.10** також можна визначити натуральну величину **α** кута нахилу наданої прямої до площини **$П_0$**: якщо через найближчу до закладення т.A_0 провести пряму, що паралельна до закладення, то кут, утворений цією прямою та проекцією (A_0B_0) й буде шуканий кут α.

Задача розв'язана.

***Задача 2* (рис. 5.11).** Через точку C_6 провести пряму d, що паралельна до прямої a. В площині Δ_i ($d \parallel a$) побудувати горизонталь b з числовою відміткою **5**.

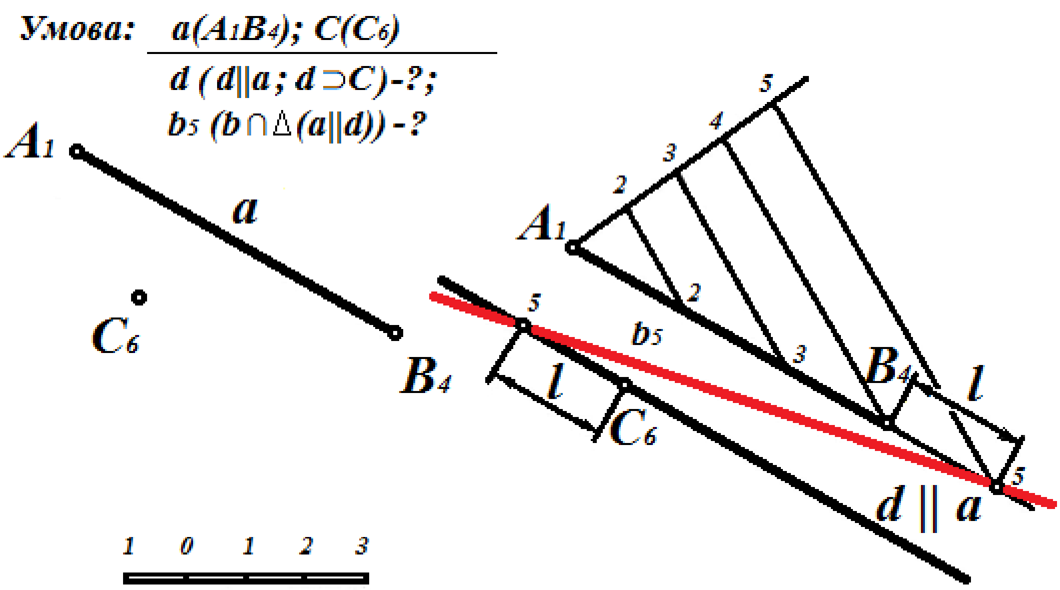
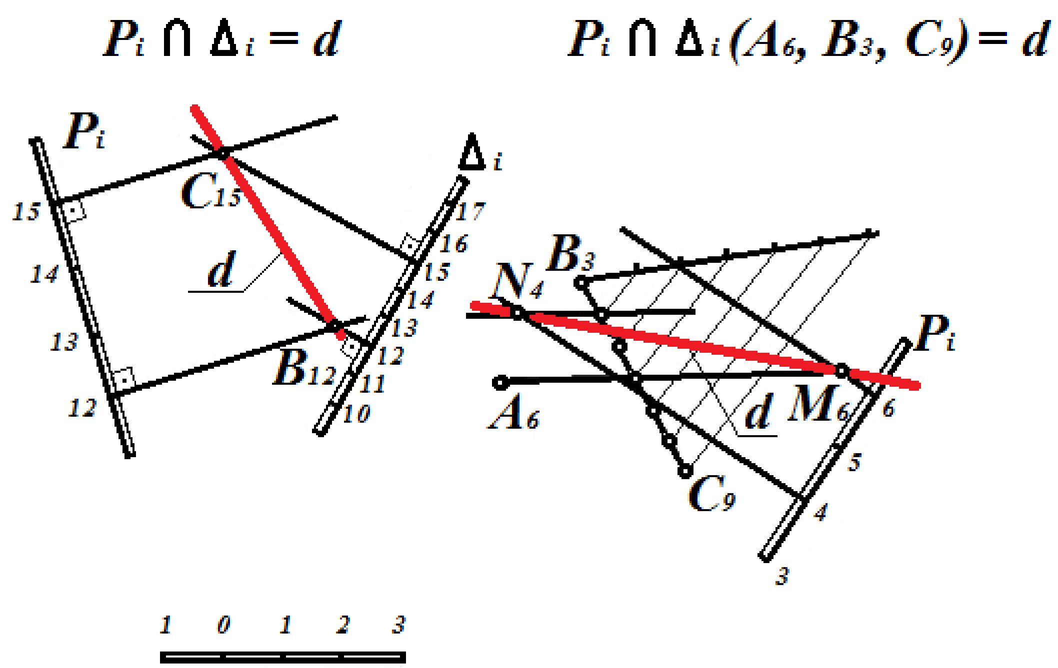


Рис. 5.11. Задача 2

Розв'язання. За ознакою двох паралельних прямих необхідно, по-перше, через точку C_6 побудувати проекцію $d \parallel a$; по-друге, необхідно проградуювати надану пряму a. Для цього на основі пропорційного ділення відрізка (рис. 5.3*а*) з т. A_1 будуємо промінь, на якому відкладаємо **(4 - 1 = 3)** відрізка однакової довжини. Здобуту точку з'єднуємо з кінцевою точкою B_4. Далі лініями, паралельними до цієї прямої, переносимо відмітки з променя до закладення (A_1B_4), на якому здобуваємо цілі відмітки **2** та **3**. На продовженні прямої a можна знайти відмітку **5** на відстані інтервалу ℓ. З урахуванням того, що для паралельних прямих числові відмітки зростають в одному й тому ж напрямі, на прямій ***d*** вліво від точки C_6 відкладаємо інтервал ***ℓ*** і здобуваємо точку з відміткою **5**. З'єднуємо дві точки з відмітками **5** та за ознакою це й буде горизонталь b_5 площини Δ_i *(d || a)*.

Задача розв'язана.

Задача 3 **(рис. 5.12).** Побудувати лінію перетину – пряму лінію ***d*** двох площин P_i та Δ_i.



а)   б)

Рис. 5.12. Задача 3

Розв'язання:

а) Як відомо, дві площини завжди перетинаються по прямій. Для побудови прямої досить знайти дві точки. Тому необхідно знайти, наприклад, точки B_{12} і C_{15} як точки перетину двох однойменних горизонталей **12** та **15** для двох наданих площин, що проходять перпендикулярно до ліній масштабу ухилів площин P_i та Δ_i.

Задача розв'язана.

б) Умовою задачі площина Δ_i задана трьома точками **(A_6, B_3, C_9)**. Тому для побудови горизонталей цієї площини необхідно спочатку визначити їхній напрям, тобто з'єднати точки з однаковими числовими відмітками. Оскільки A_6 вже є, тоді на прямій **(B_3, C_9)** необхідно знайти точку з відміткою ***6***. Для цього необхідно проградуювати **(B_3, C_9)** (див. задачу 2). Далі з'єднуємо дві точки з відміткою **6** і здобуваємо напрям горизонталей для площини Δ_i, паралельно до якого будуємо ще одну горизонталь, наприклад, через відмітку **4**. Таким чином, в іншій площині P_i необхідно побудувати дві горизонталі з відмітками **4** та **6**, що проходять перпендикулярно до лінії масштабу ухилу площини P_i. Точки перетину двох однойменних горизонталей **4** та **6** для двох наданих площин і визначають шукану лінію ***d***.

Задача розв'язана.

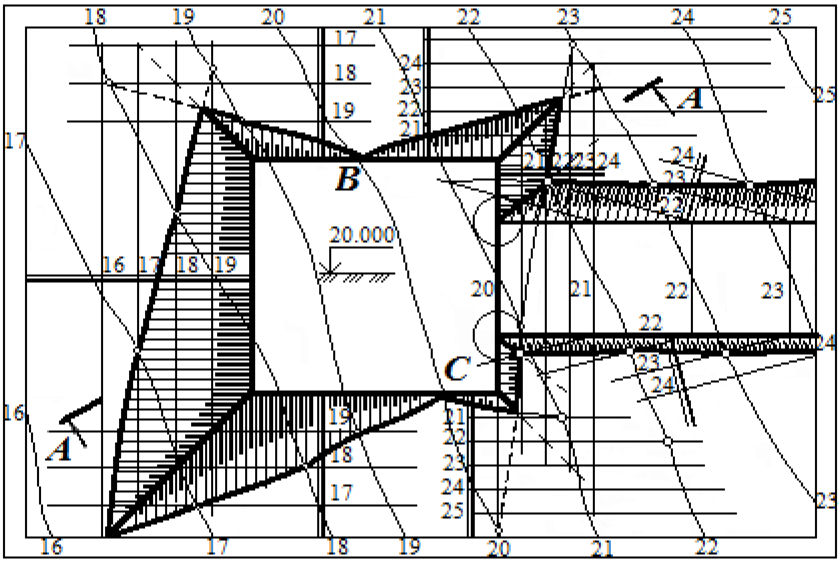
Проектування земляних споруд зокрема базується на розв'язанні двох основних задач: визначення розмірів будівельних майданчиків і розрахунок об'ємів ґрунту, що потрібно перемістити. Ці задачі можливо вирішити, визначивши межі земляних робіт, тобто необхідно знайти лінії перетину площин укосів виїмки та насипу з топографічною поверхнею.

Задача 4 **(рис. 5.13).** Побудувати лінії перетину площин укосів виїмки і насипу, а також укосів земляної споруди з топографічною поверхнею за наданим планом топографічної поверхні та планом горизонтального майданчику, якщо ухил виїмки $i_в$ = **1:1**; ухил насипу $i_н$ = **1:1,5**; ухил шляху $i_ш$ = **1:4**. Побудувати профіль споруди в заданому положенні січної площини **А-А**, нанести бергштрихи. Бергштрихи наносять на утворених поверхнях у напряму лінії ската. Бергштрихи конічної поверхні наносяться нормально до кола, тобто проходять крізь його центр.

Рекомендується обрати масштаб креслення М 1:200.

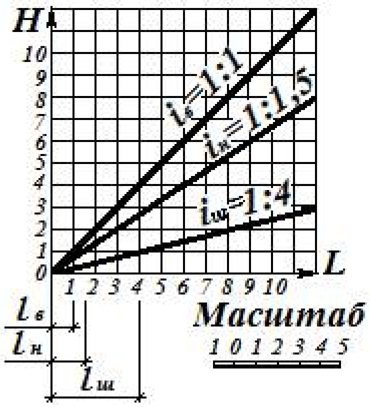
Розв'язання. Задача зводиться до пошуку ліній перетину між собою площин укосів виїмки та насипу, а також з топографічною поверхнею. Спочатку, користуючись прийнятим лінійним масштабом **1:200**, необхідно побудувати графік масштабів ухилів (див. рис. 5.13*б*). Тобто необхідно побудувати сітку з розміром комірки **5х5** мм. А далі для укосів виїмки будуємо графік $\boldsymbol{i_в}$ = **1:1** – пряму лінію, де на одну одиницю підйому приймається одна одиниця закладення; для укосів насипу $\boldsymbol{i_н}$ **= 1:1,5** – на одну одиницю підйому – 1,5 одиниці закладення; нарешті, для укосів шляху $\boldsymbol{i_ш}$ **= 1:4** – на одну одиницю підйому – чотири одиниці закладення. Тоді горизонтальна лінія, що відповідає висоті позначки **1м,** виявляє інтервал ліній найбільшого скату площин укосів виїмки $\boldsymbol{\ell_в}$, насипу $\boldsymbol{\ell_н}$ та шляху $\boldsymbol{\ell_ш}$ (див. рис. 5.13*б*).

Виконаємо аналіз майданчику та шляху. Відмітка майданчику – **20.000** м. Тоді у точках **В** та **С** – точках перетину топографічної горизонталі з такою ж відміткою **20** знаходяться ***точки нульових робіт***, а вся горизонталь **20** є ***лінією нульових робіт***. Майданчик в плані уявляє собою прямокутник, до трьох боків якого ліворуч від лінії (**ВС**) примикають укоси **насипу** (місцевість нижче, тому потрібно **насипати** ґрунт для вирівнювання площадки), а до інших боків праворуч від лінії (**ВС**) – укоси **виїмки** і **шляху** (місцевість вище, ніж площадка). Далі перпендикулярно до ліній контуру майданчику (крім шляху), які є горизонталями з позначкою **20**, слід побудувати ***лінії масштабів ухилів*** площин укосів (їх зображують подвійною лінією). Кожну таку лінію необхідно проградуювати відповідним інтервалом (у районі виїмки інтервал $\boldsymbol{\ell_в}$, насипу – $\boldsymbol{\ell_н}$). Через знайдені відмітки провести горизонталі укосів, які, відповідно перетинаючись, визначають ***межі*** площин укосів. Це, як відомо, прямі лінії (якщо інтервали площин укосів однакові, лінія перетину пройде як бісектриса кута між лініями масштабів ухилів). Горизонталі площин, перетинаючись з горизонталями топографічної поверхні, що мають однакові позначки, визначають лінії – ***межі укосів*** (це незакономірні лінії, вони утворюються за допомогою послідовного з'єднання відповідних точок).



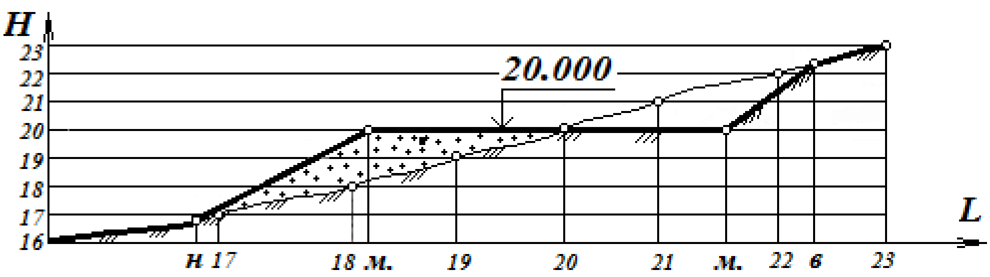
а)

Графік масштабів ухилів



б)

Профіль по А-А



в)

Рис. 5.13. Задача 4

Для побудови площини укосів шляху, по-перше, необхідно по бровці відкласти інтервал $\boldsymbol{\ell_{ш}}$ (з графіку масштабів ухилів) та позначити точки: шлях знаходиться у району виїмки, тому наступні відмітки будуть мати позначки **21, 22, 23** ... . Далі з попередніх точок, наприклад, з точки **20**, як із центра, проводять коло радіусом $\boldsymbol{\ell_{в}}$ (потім з відмітки **21,** потім – з **22**, тощо), тобто будують допоміжні будівельні конуси з радіусом основи $\boldsymbol{\ell_{в}}$ **(рис. 5.14)**.

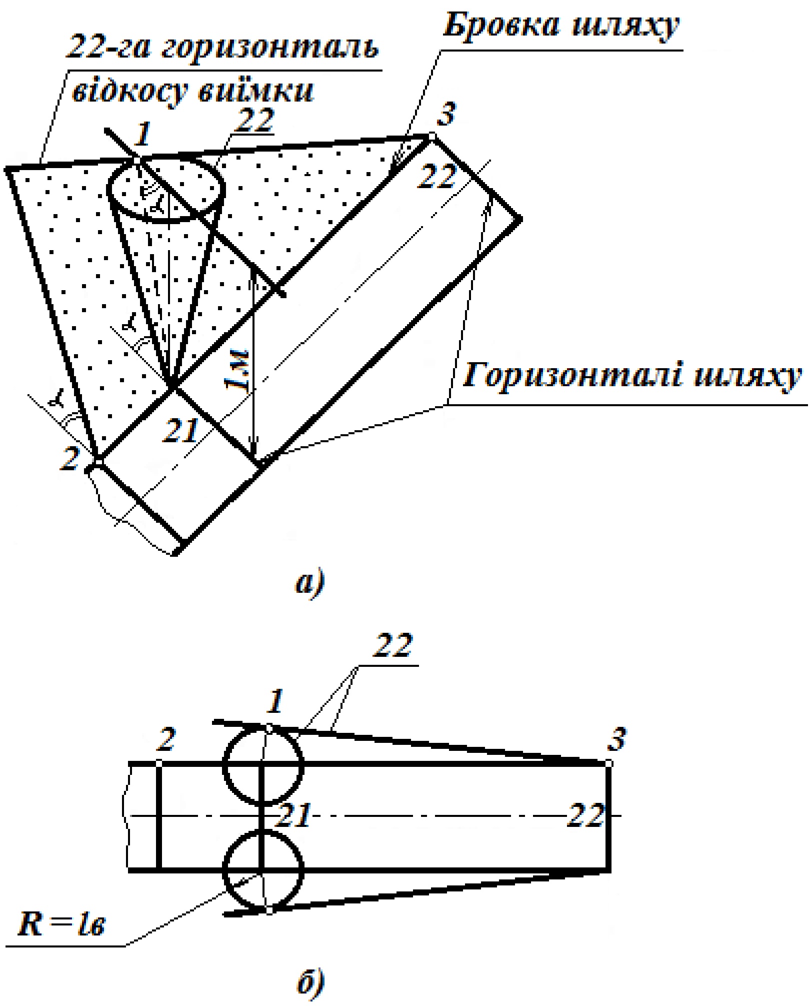


Рис. 5.14. Побудова будівельних конусів шляху

Побудовані кола дають змогу провести горизонталі площини укосів шляху – це дотичні до відповідних кіл (вони паралельні між собою). Перетин однойменних горизонталей площин укосів площадки та шляху визначає межі укосів, а перетин горизонталей шляху з топографічною поверхнею визначає межу контурів земляних робіт (лінії масштабів ухилів укосів шляху перпендикулярні до проектних горизонталей шляху).

Для збільшення наочності зображення використовують бергштрихи: верхню границю укосів позначають бергштрихами, які наносять перпендикулярно до горизонталей площин укосів у бік скату, тобто у районі виїмки – від контуру земляних робіт до площадки, а у районі насипу – від площадки до контуру земляних робіт.

Для побудови профілю **А-А** січної площини споруди в заданому положенні необхідно взяти смужку аркушу, прикласти до лінії перерізу та перенести на аркуш точки перетину сліду січної площини з топографічними горизонталями, з контуром площадки, а також побудованих контурів земляних робіт виїмки та насипу. Ці відмітки переносимо на горизонтальну ось координат ***L*** (від початку координат можна відкласти довільну відстань). По вертикальній осі ***H*** наносимо відмітки горизонталей, починаючи з найнижчої **16** - ої: **17, 18, ..., 23.** Через відмітки на осі ***L*** проводимо перпендикуляри до перетину з однойменною проектною горизонталлю. Ці точки необхідно з'єднати і тоді утвориться профіль споруди за даним положенням січної площини **А-А**. Далі через відмітку ***«м.»*** необхідно побудувати перпендикуляр до відмітки ***20*** – рівня майданчику, а через відмітки ***«в.»*** та ***«н.»*** – до перетину з побудованим профілем. Таким чином здобуваємо побудови укосів виїмки та насипу: переріз насипу умовно заповнюємо точками – це ґрунт.

Задача розв'язана.

5.2. Розгортки поверхонь

Побудова розгорток має велике практичне значення, тому що є важливим технологічним етапом у тих видах виробництва, що зв'язані з листовими матеріалами: легка промисловість (швейна і шкіряна), нафтохімічна і газова промисловість (резервуари і трубопроводи), суднобудування, авіабудування тощо. Розгортки виробів будують на стадії проектування.

У техніці широко застосовуються усі види розгорток – точні, наближені, умовні. Площі наближених і умовних розгорнень не дорівнюють точним площам проектованих поверхонь – вони завжди або більше їх або менше. У першому випадку одержуємо складку, у другому – розриви, але в наближених розгортках складки (розриви) не перевищують 3%, а в умовних розгортках вони можуть бути значно більше, чого не припустимо в ряді виробництв.

У цих випадках металевий аркушевий матеріал у певних умовах піддають деформації в межах пластичності, після якої складки (розриви) зникають.

Найпоширенішими прикладами такої деформації є штампування заготівель з листового металу, температурно-вологісна обробка тканин з натуральних волокон за допомогою гарячої праски: окремі ділянки тканини можна розтягти – ліквідувати розриви, а окремі – зжати («утюжити»).

Розгортки використовують також при виготовленні найпростіших гребних гвинтів для моделей кораблів, причому на багатьох підприємствах розгортки – викрійки ряду виробів виконуються за допомогою ЕОМ.

Розгорткою називається таке перетворення поверхні $\boldsymbol{\Gamma}$, у результаті якого вона сполучається з площиною $\mathbf{\Pi}^1$: $\Gamma \rightarrow \Gamma^1$, $\Gamma^1 = \mathbf{\Pi}^1$ Розгортку можна визначити як послідовне розгинання гнучкої і нерозтяжної плівки – поверхні $\boldsymbol{\Gamma}$ и сполучення її без складок і розривів із площиною $\mathbf{\Pi}^1$ (дотичної до неї в кожний наданий момент).

Плоска фігура, що отримується в результаті розрізу поверхні (чи її частини) вздовж її твірної лінії та суміщення з площиною, називається розгорткою.

Теоретично можна сполучити площиною без складок і розривів тільки ті лінійчаті поверхні, дві суміжні твірні яких паралельні чи перетинаються. Такі поверхні називаються ***розгортними***. Інші поверхні називаються ***нерозгортними.***

Розгортки підрозділяються на три групи: **точні**, **наближені** й **умовні**.

На практиці точні розгортки будують в основному для поверхонь багатогранників, а для всіх інших поверхонь, що розгортаються, будуються ***наближені*** розгортки. ***Умовні*** розгортки будують для поверхонь, що не розгортаються. На кресленнях розгорток лінії згину зображують штрих - пунктирною лінією з двома точками.

При побудові розгорток зберігаються наступні ***властивості***:

1 - кожній точці поверхні однозначно відповідає точка на її розгортці і навпаки: (за винятком лінії розрізу);

2 - пряма лінія на поверхні перетворюється в пряму лінію на розгортці. Зворотне твердження несправедливе. Лінія поверхні, що відповідає прямій на розгорненні, називається найкоротшою чи *геодезичною;*

3 - взаємна належність фігур зберігається;

4 - паралельність прямих зберігається;

5 - на розгортці зберігаються: довжини дуг (відрізків) будь-яких ліній; величини кутів між лініями; площини фігур, що визначають метричні властивості фігур, тому розгортки відносяться до ***ізометричних*** перетворень, а задачі побудови розгорток – до метричних задач.

Способи побудови розгорток. При побудові *наближених* і *умовних* розгорток використовують *апроксимацію* однієї поверхні іншою, тобто заміна однієї поверхні іншою – апроксимуючою, котра наближається до заданої за якимись визначеними властивостями (форма, площа, кривизна) з тим чи іншим ступенем точності.

Розгортки призм будують способами *нормального перетину* або *розкочування*, а розгортки пірамід – способом *трикутників* (*тріангуляції*).

При побудові *наближених* розгорток поверхонь циліндрів, конусів, торсів використовують поверхні призм і пірамід, а також багатогранників, що складаються з трикутників.

При побудові *умовних* розгорток апроксимуючими поверхнями є поверхні циліндрів, конусів і багатогранників, що складаються з трикутників.

А. Точні розгортки

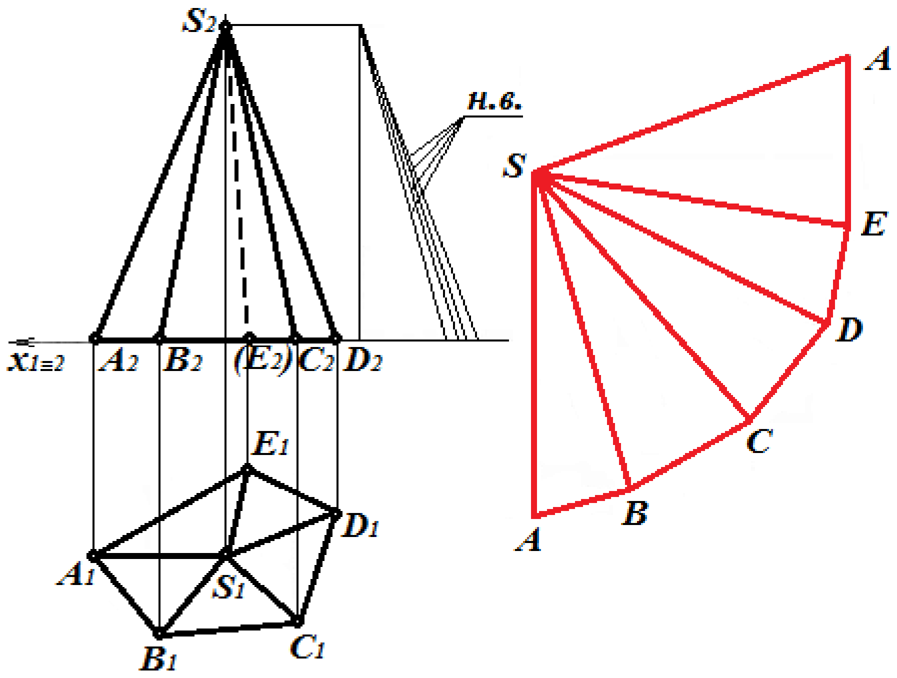
а) Спосіб *нормального* перетину застосовують на практиці для побудови точних розгорток бічних поверхонь призм і циліндрів обертання.

б) Спосіб *розкочування* застосовують для побудови точної розгортки бічної поверхні призми. Цей спосіб зручний, якщо ребра призми рівнобіжні до однієї площини проекцій, а сторони основ – до іншої.

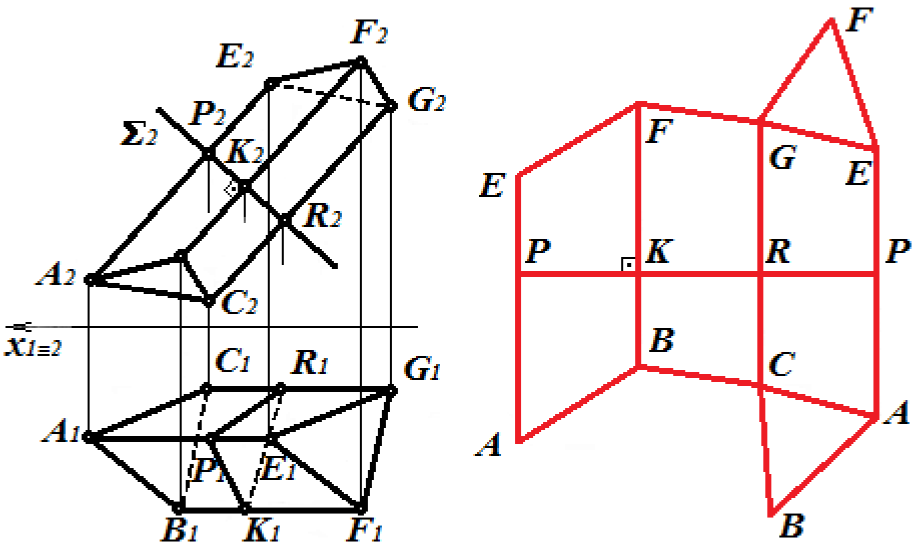
На **рис. 5.15** наведені приклади побудов розгорток поверхонь піраміди (***а***) й призми ***(б)***.

в) **Спосіб трикутників (тріангуляція) –** цим **с**пособом можна будувати ***точну*** розгортку поверхні будь-якого багатогранника. Сутність цього способу полягає в тому, що кожна грань багатогранника розбивається на трикутники, натуральний вид яких визначається відомими способами. Після цього будується плоска фігура, що складається з послідовно розташованих друг до друга трикутників – шукана розгортка.

Крім того, кожен трикутник на розгортці можна будувати способом відміток: натуральну величину кожної сторони трикутника визначаємо за допомогою відомих прийомів перетворення креслення, після чого будуємо трикутник за трьома його сторонами.



а)



б)

Рис. 5.15. Побудова розгорток поверхонь піраміди (*а*) й призми *(б)*

Б. Наближені розгортки

а) Спосіб апроксимуючих призм – цей спосіб застосовують для побудови ***наближених*** розгорток відсіків циліндричних поверхонь.

б) Спосіб апроксимуючих пірамід – цей спосіб застосовують для побудови розгорток бічних поверхонь конусів.

В. Умовні розгортки

Для побудови ***умовної*** розгортки поверхні обертання її попередньо апроксимують розгортними циліндричними та конічними поверхнями.

Розглянемо наступні задачі.

Задача 5. Побудувати повну розгортку поверхні призми, нижня основа якої належить до площини $\mathbf{П_1}$ **(рис. 5.16)**.

Розв'язання. За умовою задачі для побудови розгортки бічної поверхні призми доцільно вибрати спосіб розкочування (всі вертикальні ребра поверхні зображуються на $\mathbf{П_2}$ в натуральну величину, а ребра нижньої основи – на $\mathbf{П_1}$).

Таким чином, на $\mathbf{П_2}$ через фронтальну проекцію нижньої основи будуємо горизонтальну лінію, на якій від точки $\mathbf{C_2}$ відкладаємо відрізки $\mathbf{(C_1B_1)}$, $\mathbf{(B_1A_1)}$, $\mathbf{(A_1D_1)}$, $\mathbf{(D_1C_1)}$.

Через кінці відрізків будуємо перпендикуляри до основи та відкладаємо на них відповідні ребра $\mathbf{(B_2B'_2)}$, $\mathbf{(A_2A'_2)}$, $\mathbf{(D_2D'_2)}$ та $\mathbf{(C_2C'_2)}$ (або через фронтальні проекції точок $\mathbf{B_2}$, $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{D_2}$ і $\mathbf{C_2}$ проводимо горизонтальні лінії до перетину з кожним перпендикуляром). Отже, розгортка бічної поверхні побудована.

Розгортку нижньої основи можна добудувати до неї з довільного ребра, наприклад, візьмемо **(AB)**. Уперед розіб'ємо основу на два трикутники, наприклад, $\mathbf{(A_1B_1C_1)}$ та $\mathbf{(A_1C_1D_1)}$ за допомогою діагоналі $\mathbf{(A_1C_1)}$, яка теж буде мати натуральну величину на **П$_1$**. з точки **A** зробимо засічку відрізком **(A_1C_1)**, а з точки **B** – відрізком **(B_1C_1)** до взаємного перетину засічок Таким чином ми здобули вершину **C**.

Далі аналогічно виконуємо засічки з точки **A** – відрізком **(A_1D_1)**, а з точки **C** – відрізком **(D_1C_1)** та одержуємо вершину **D**.

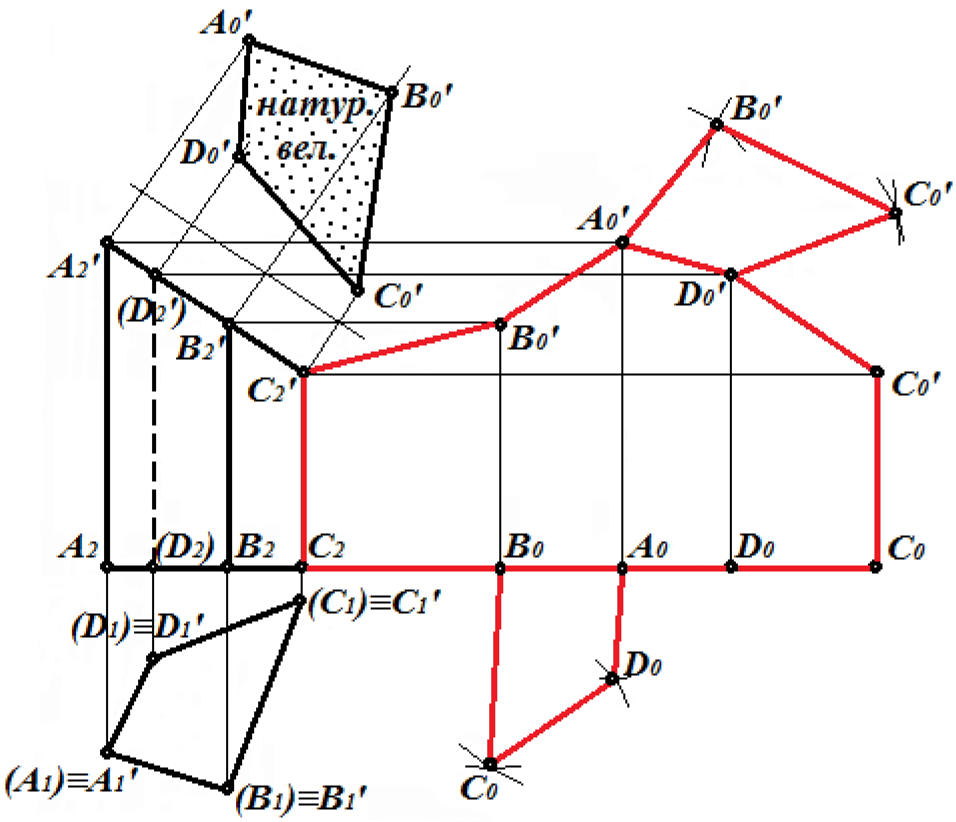


Рис. 5.16. Задача 5

Для побудови розгортки верхньої основи ($A_0'B_0'C_0'D_0'$) спочатку необхідно знайти її натуральну величину, а далі виконати аналогічні дії.

Задача розв'язана.

***Задача 6* (рис. 5.17).** Побудувати розгортку наданої конічної поверхні.

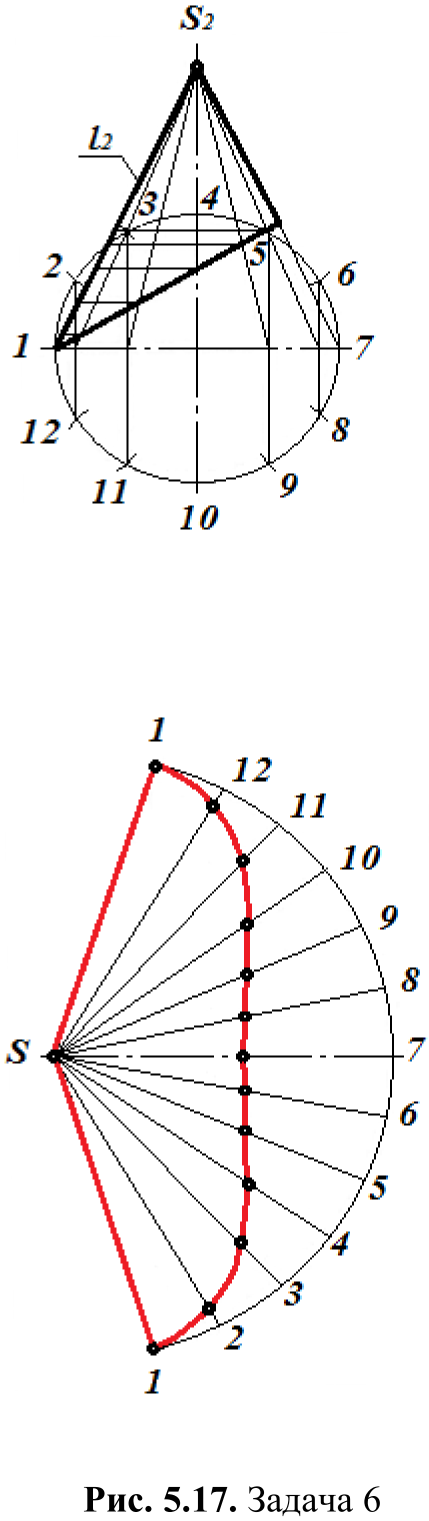


Рис. 5.17. Задача 6

Розв'язання. За умовою задачі для побудови розгортки поверхні вибрати спосіб ***трикутників***. Тобто потрібно замінити конічну поверхню багатогранною пірамідальною поверхнею, яку й будемо розгортати. Для цього на $\mathbf{П_1}$ розіб'ємо довжину кола основи на **12** рівних частин. Замість горизонтальної проекції можна використовувати суміщену проекцію. Тобто через нижню точку основи провести горизонтальну лінію, праву контурну твірну продовжити до перетину з цією лінією, а далі повернути на $\mathbf{90}^0$ – це й буде коло основи.

Кожний трикутник – грань **12** - граної піраміди – повинен бути побудований за натуральними величинами. Отже, оскільки поверхня симетрична, доцільно на вільному місці побудувати лінію та точку **S** як вершину, з якої радіусом $\boldsymbol{R = \ell}$ провести дугу кола. Від точки її перетину з осьовою лінією ліворуч та праворуч необхідно відкласти по 6 відрізків, що дорівнюють **1/12** частині кола, та з'єднати їх з вершиною. А далі від вершини по кожній твірній необхідно відкласти її натуральну величину. На $\mathbf{П_2}$ через точки перетину твірних з лінією обрізу провести горизонтальні лінії до перетину з контурною твірною – це й будуть натуральні величини відповідних твірних.

Знайдені точки необхідно сполучити лекальною кривою лінією.

Таким чином, знайдена фігура й буде шуканою ***розгорткою***.

Задача розв'язана.

На **рис. 5.18** наведений приклад розв'язання наступної задачі: побудувати проекції лінії перетину та розгортки усіх елементів трубопроводу. На кресленні наданий один елемент циліндричної поверхні, а також конструкція переходу від квадратної форми (приймальна частини бункера) до круглої (перехідна частина бункера).

Побудови рекомендується розібрати самостійно.

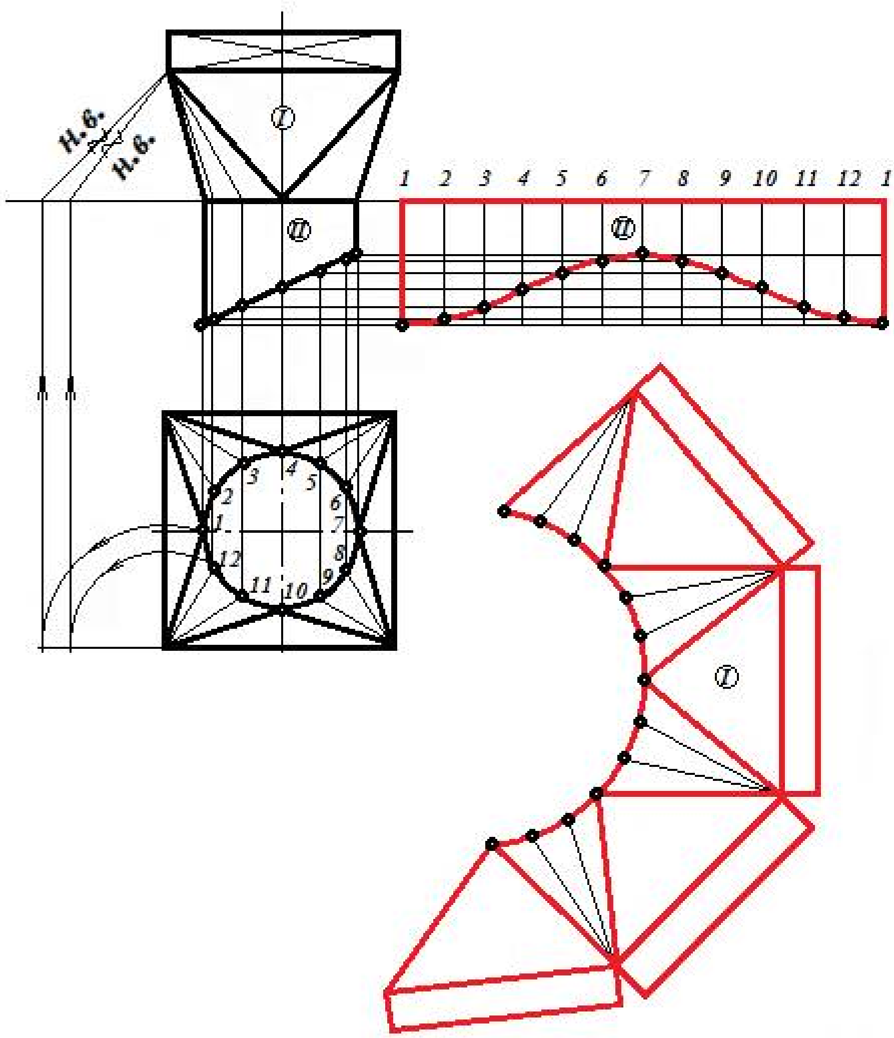


Рис. 5.18. Побудова розгортки трубопроводу

5.3. Аксонометричні проекції

Аксонометричною проекцією об’єкта називають його **паралельну** проекцію на площині, побудовану разом з прямокутними координатними осями, до яких він віднесений (**рис. 5.19**).

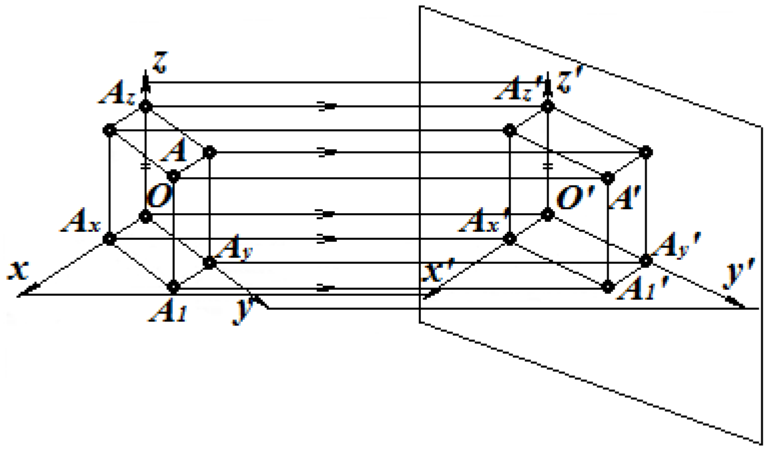
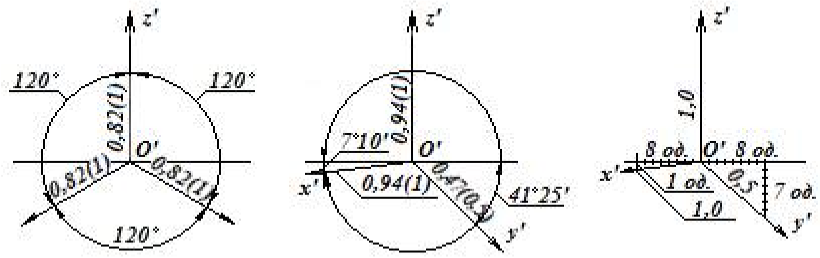
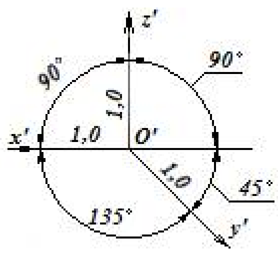


Рис. 5.19. Схема побудови аксонометричного зображення

Існує досить багато видів аксонометричних зображень, в тому числі **стандартних**, серед яких ***прямокутна ізометрія*** (**рис. 5.20*а***) є найбільш поширеною. Її характерні ознаки: аксонометричні осі розташовані під кутом **120^0** одна до одної, приведені ***показники спотворення*** по осях дорівнюють одиниці. У прямокутній диметрії (**рис. 5.20*б***) та косокутній фронтальній диметрії (**рис. 5.20*в***) показники спотворення однакові тільки по двом осям.



а) *б)*



в)

Рис. 5.20. Положення осей в аксонометричних проекціях

Згадаємо **правило*:*** *у прямокутній ізометрії будь-яка довільна точка будується за допомогою* ***аксонометричної ламаної лінії****, що складається з відрізків координат x, y* та *z кожної характерної точки* (**рис. 5.21)**. На основі побудови точки в аксонометрії можна побудувати зображення будь-якого просторового об’єкту.

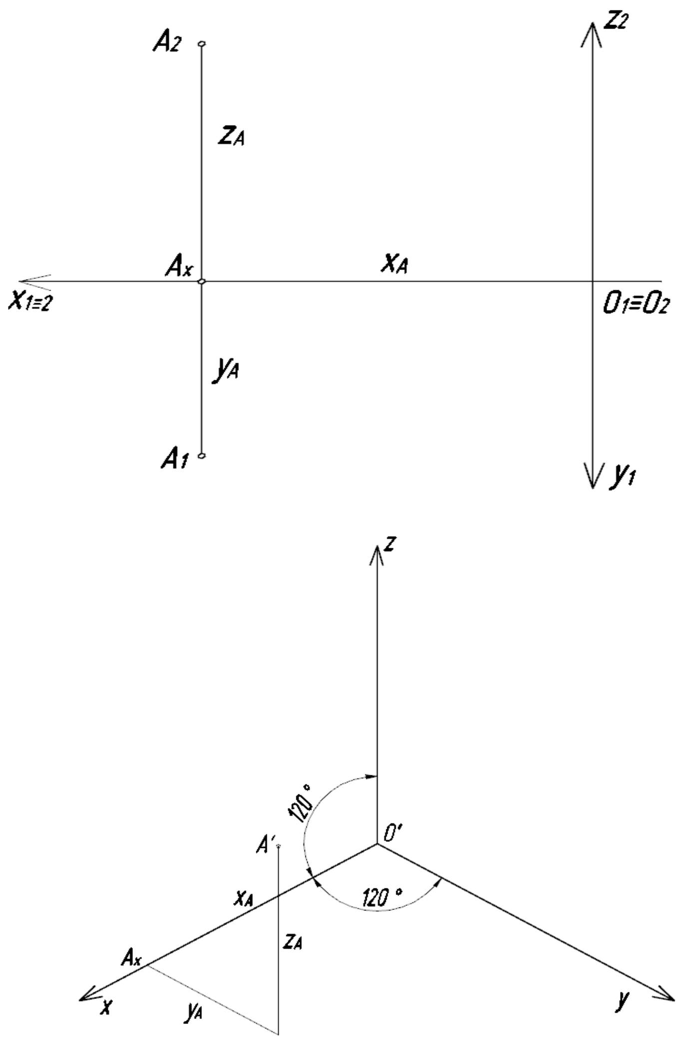


Рис. 5.21. Побудова точки у прямокутній ізометрії

Розглянемо наступні задачі у ***прямокутній ізометрії***.

Задача 7 **(рис. 5.22).** Побудувати прямокутну ізометрію правильного шестикутника, що належить до площини проекцій $\mathbf{П_1}$.

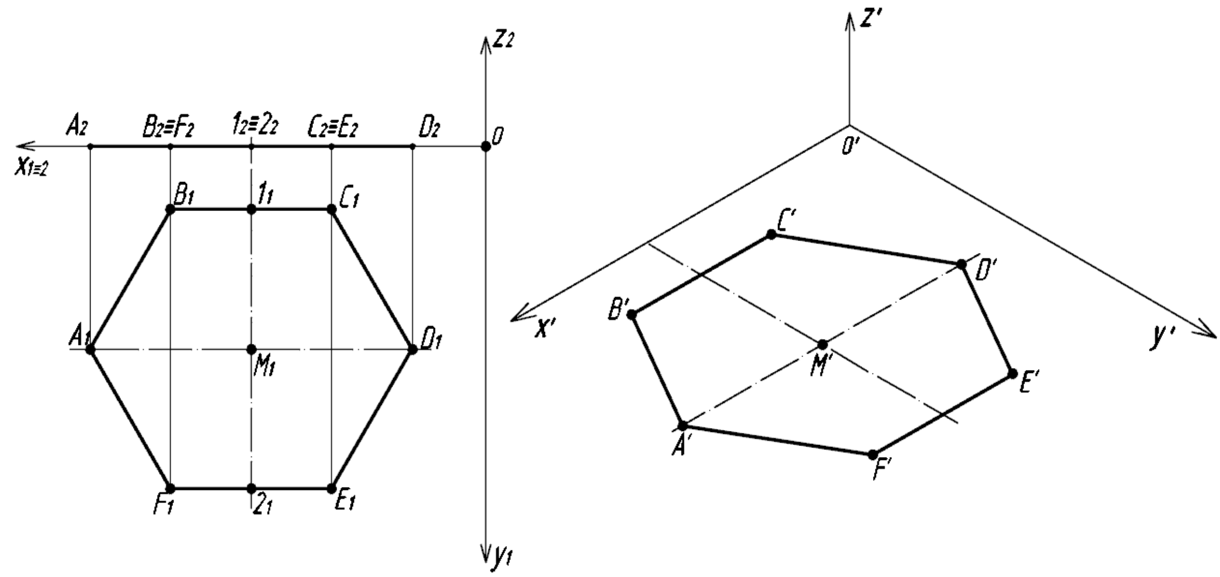


Рис. 5.22. Задача 7

Розв'язання. Оскільки фігура шестикутника – симетрична, доцільно спочатку побудувати у **прямокутній ізометрії** за координатами т. **С** – його центру за її аксонометричною ламаною лінією, далі можна позначити вершини шестикутника **1, 2, ... 6** та кожну точку побудувати за її аксонометричною ламаною.

Задача розв'язана.

Задача 8 **(рис. 5.23).** Побудувати за наданими ортогональними проекціями правильної шестигранної призми її прямокутну ізометрію (побудови розглянути самостійно).

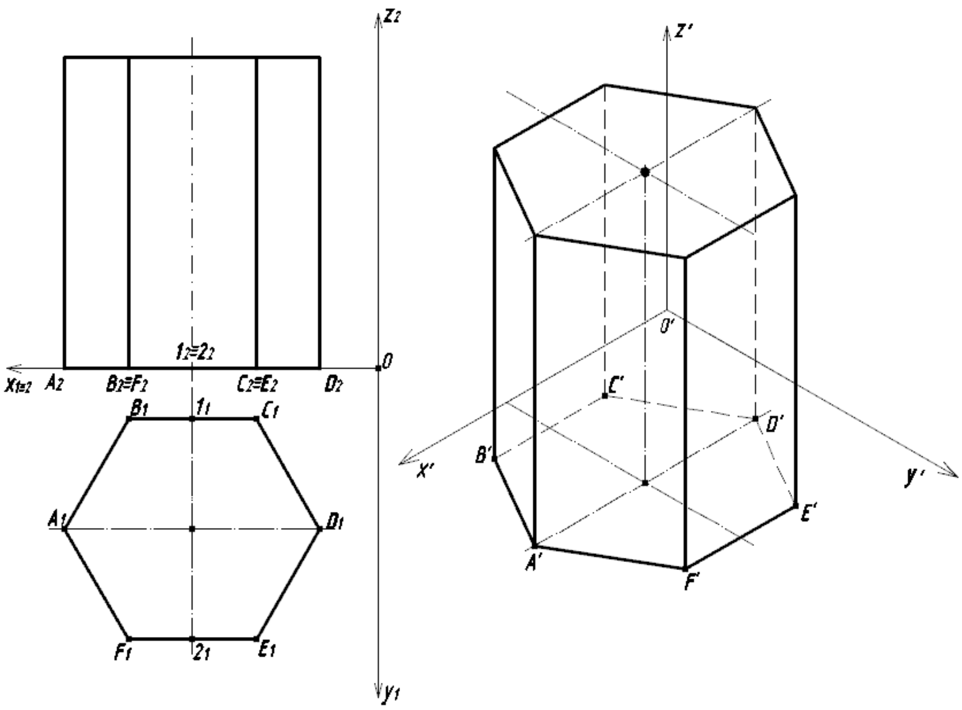


Рис. 5.23. Задача 8

Розглянемо побудови в прямокутній ізометрії проекцій кіл, що знаходяться у площинах проекцій $\mathbf{П_1}$ $\mathbf{П_2}$ $\mathbf{П_3}$, або в площинах, які паралельні до них. Вони проекціюються на аксонометричну площину в еліпси (**рис. 5.24**). Коефіцієнти спотворення по осях ***x, y, z*** дорівнюють 0.82, але для спрощення ізометричну проекцію виконують, прийнявши коефіцієнти спотворення за 1 (одиницю). У цьому випадку велика вісь еліпсів 1, 2, 3 дорівнює **1,22D**, а мала вісь – **0,71D**, де **D** – діаметр кола.

Еліпс – це крива лінія другого порядку або, інакше, геометричне місце точок площини, сума відстаней яких до двох визначених точок – фокусів є величина постійна (існує канонічне рівняння еліпса $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, де a – велика піввісь еліпса, b – мала піввісь).

Для побудови ізометричних зображень еліпсів допускається в кресленні заміняти їх **овалами** – це **циркульна** крива лінія, тобто геометрична фігура, яка складається з двох кіл, що мають внутрішнє **спряження**, побудова яких показана, наприклад, способом Ю.Іванова на **рис. 5.25** (побудови розібрати самостійно).

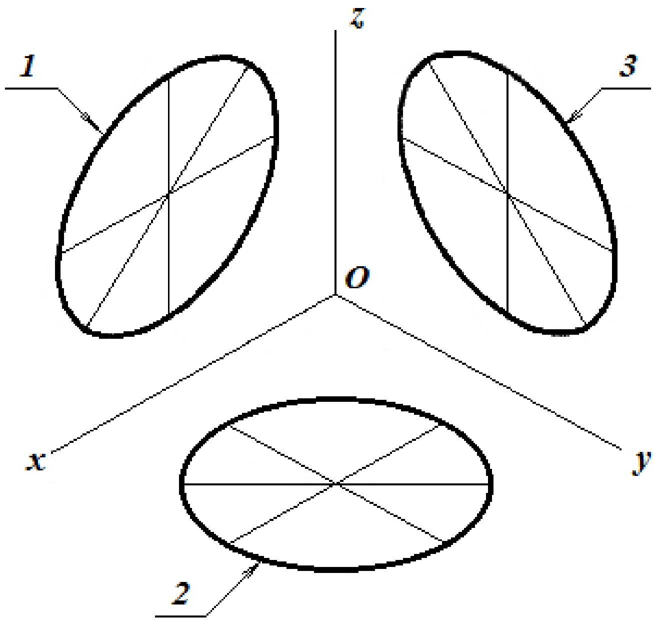


Рис. 5.24. Побудова прямокутної ізометрії кола

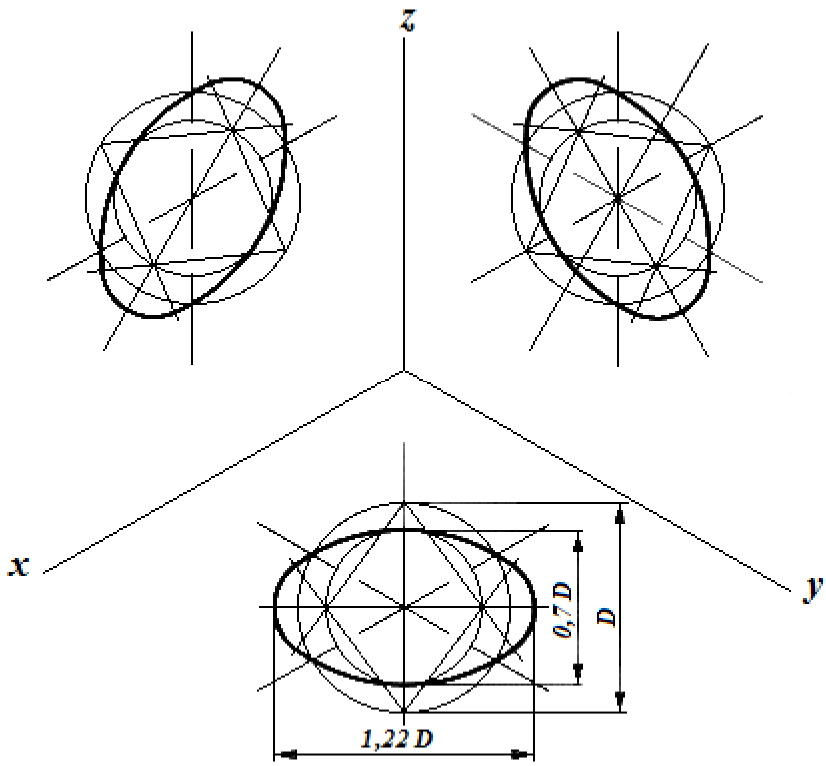


Рис. 5.25. Спосіб Іванова Ю.Б.

Розглянемо наступні задачі.

Задача 9. Побудувати прямокутну ізометрію двох наданих геометричних об’єктів **(рис. 5.26)**.

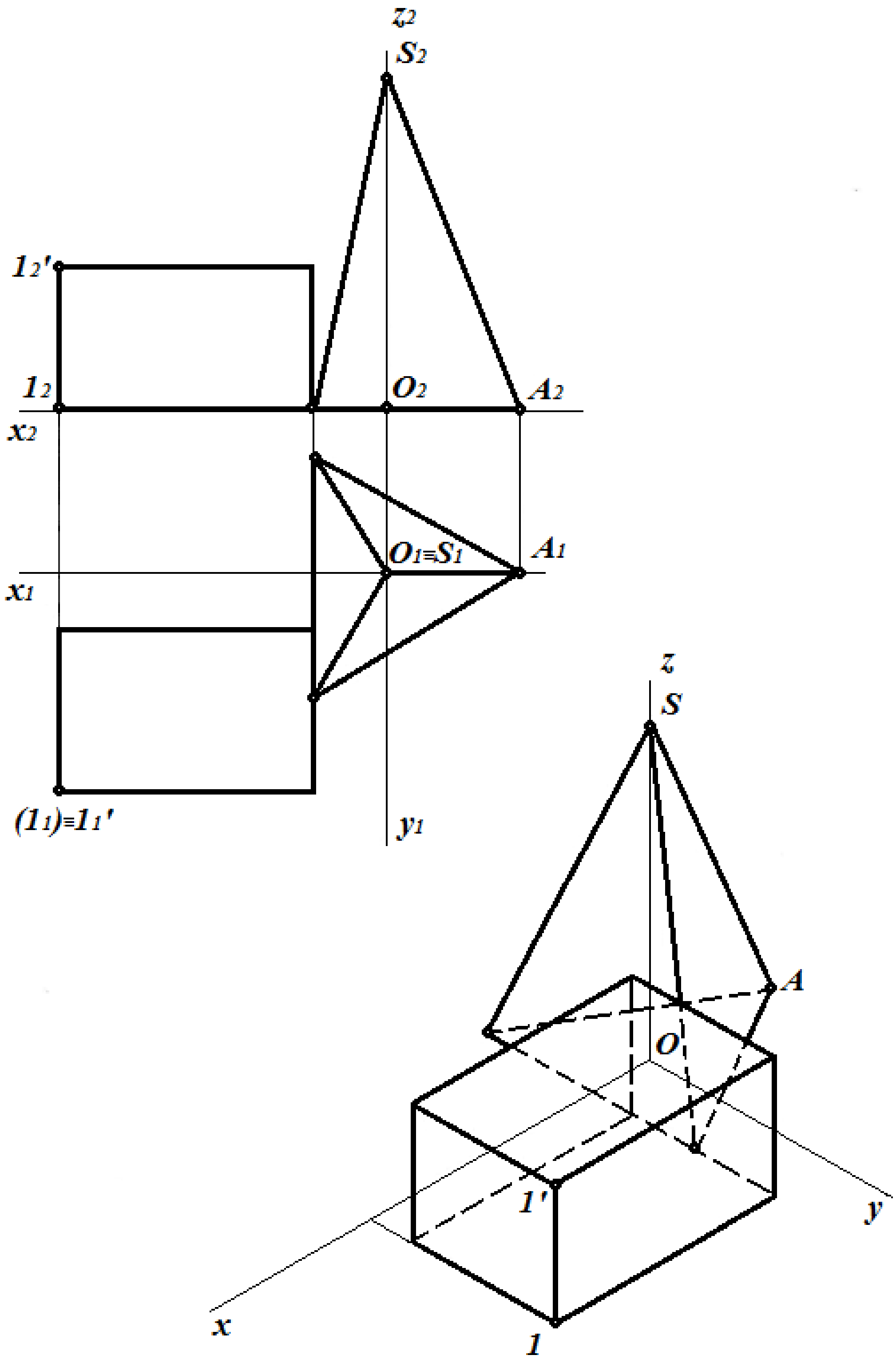


Рис. 5.26. Задача 9

Розв’язання. Для побудови у прямокутній ізометрії просторового об’єкту необхідно кожну його характерну точку побудувати за її аксонометричною ламаною лінією.

Задача розв’язана.

Задача 10. Побудувати прямокутну ізометрію групи схематизованих будівель **(рис. 5.27)**.

Розв’язання. Для побудови у прямокутній ізометрії, по-перше, на ортогональних проекціях необхідно вибрати точку *початку координат* – позначимо її т. ***O*** ***(O_1,O_2)***, тобто наданий просторовий об’єкт віднесений (або «прив'язаний») до відповідної системи координат.

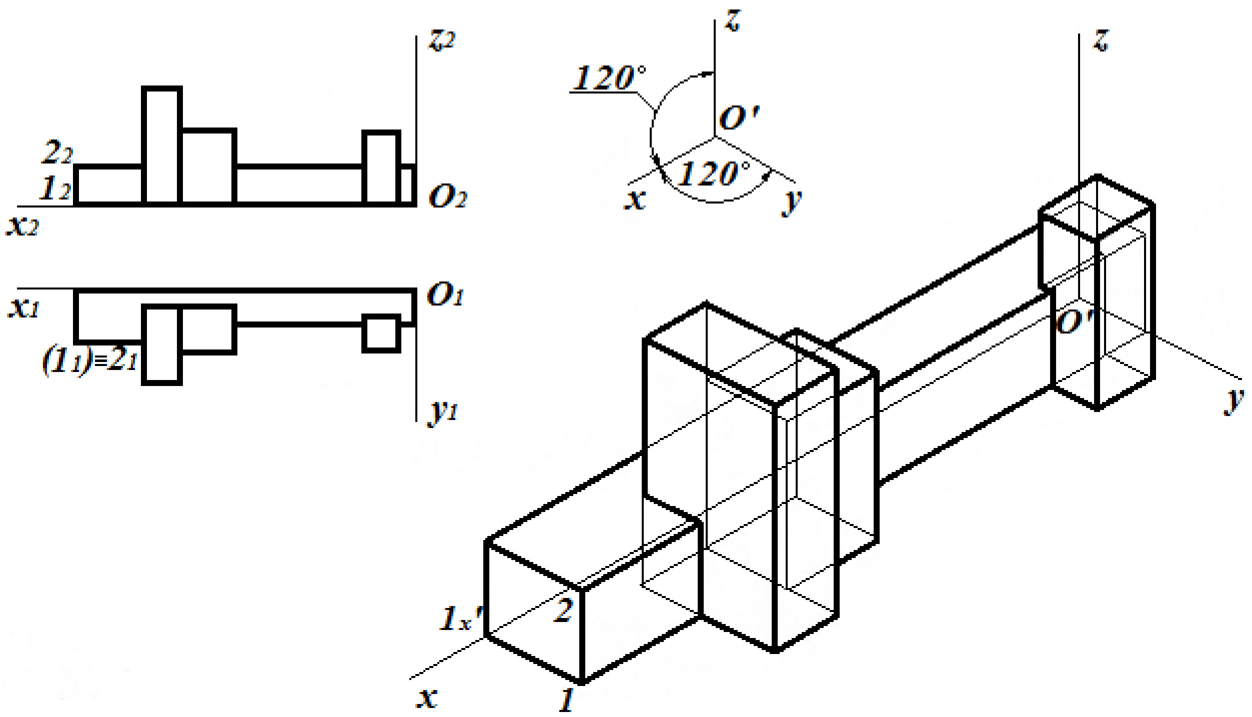


Рис. 5.27. Задача 10

Візьмемо довільну точку **O'**, з якої будуємо напрями аксонометричних осей (під кутом $\mathbf{120^0}$ одна до одної). Побудуємо у прямокутній ізометрії, наприклад, найбільш віддалене ліве переднє ребро **1-2** (можна починати з будь-якої точки), для чого спочатку позначимо його на ортогональних проекціях:на $\mathbf{П_1}$ **-** це $\mathbf{1_1 \equiv 2_1}$, а на $\mathbf{П_2}$ **-** $\mathbf{1_2}$ та $\mathbf{2_2}$. Координата ***x*** для точок **1** та **2** однакова: вона дорівнює відрізку $\mathbf{O_1 - 1_x}$**;** координата ***y*** теж однакова: вона дорівнює відрізку $\mathbf{1_x - 1_1}$***;*** координата ***z*** для точки **1** дорівнює нулю, а для точки **2** ***z*** дорівнює відрізку $\mathbf{1_2 - 2_2}$.

Для знаходження у прямокутній ізометрії точки **1** необхідно побудувати її *аксонометричну ламану*. Тобто від початку координат – точки **О'** по осі ***x*** відкладаємо відрізок $\mathbf{O_1 - 1_x}$, який дорівнює координаті ***x*** для точки **1**, та позначимо цю точку $\mathbf{1'_x}$; через цю відмітку проводимо лінію, яка паралельна до осі ***y,*** та від точки $\mathbf{1'_x}$ по цій лінії відкладаємо відрізок $\mathbf{1_x - 1_1}$, який дорівнює координаті ***y*** для точки **1**; оскільки координата ***z*** для точки **1** дорівнює нулю, тоді відразу утворюється точка **1** *у прямокутній ізометрії****,*** а точка **2** будується за допомогою координати ***z***, яка дорівнює відрізку $\mathbf{1_2 - 2_2}$ (нагадаємо, що координати ***x*** та ***y*** точок **1** і **2** однакові).

Аналогічно можна побудувати всі характерні точки будівель та з'єднати їх між собою з урахуванням видимості суцільною основною лінією.

Задача розв'язана.

5.4. Основи теорій тіней та перспективи

У практичній діяльності інженера-будівельника і архітектора нарисна геометрія, і в цілому, інженерна графіка має найважливіше прикладне значення, в тому числі розділи **«ТІНІ»** та **«ПЕРСПЕКТИВА».**

Тіні будують для надання плоскому зображенню наочності та рельєфності, а також, крім вміння суб'єктивної передачі тіней, у процесі архітектурного проектування уявляється необхідним виконання точних геометричних побудов тіней, що дозволяє ще на попередній стадії виявити переваги та недоліки композиційного рішення. В окремих випадках тіні будують для визначення освітленості елементів об'єктів, що проектуються.

Перспектива дає можливість зобразити трьохвимірність об'ємно-просторових форм, передати просторовий характер оточуючого середовища, що відіграє особливу роль на завершальній стадії розробки загального композиційного рішення.

Розглянемо детальніше теоретичні питання елементів теорій тіней та перспективи.

5.4.1. Загальні положення теорії тіней

А. Тіні в ортогональних проекціях

При зображенні тіней світлові промені вважаються ***прямолінійними***, причому сонячні промені приймають **паралельними** між собою, а якщо джерело світла штучне (точкове), то промені виходять з однієї точки, тобто промені складають пучок прямих ліній. В ортогональних проекціях напрям світлових променів обирають паралельним до головної діагоналі куба, грані якого належать до площин проекцій $\mathbf{П_1}$ та $\mathbf{П_2}$ **(рис. 5.28)**.

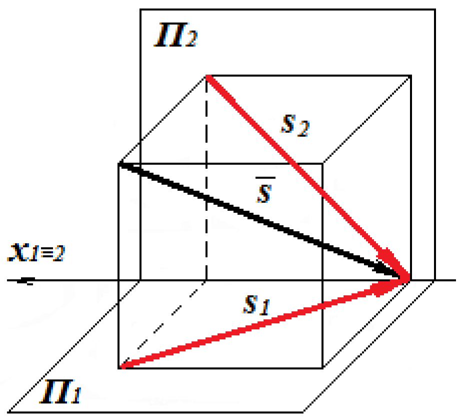
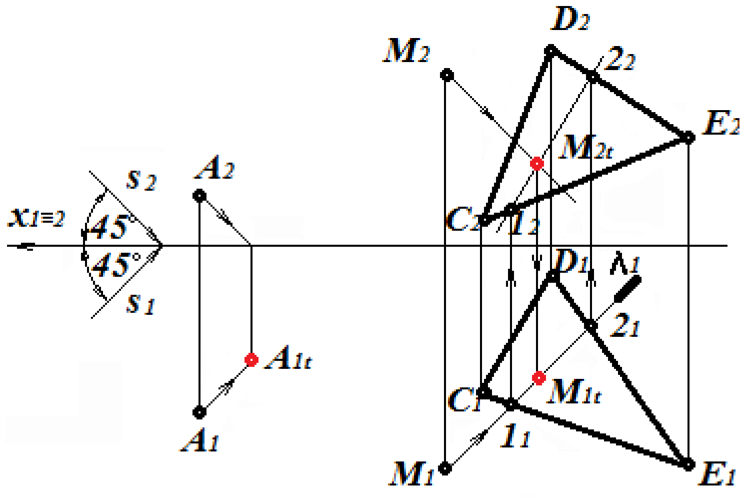


Рис. 5.28. Напрям світлових променів в ортогональних проекціях

При цьому проекції променів утворюють з осями кут 45°. Дійсний кут нахилу променів до площини $\mathbf{П_1}$ дорівнює приблизно 35°.

Геометричні основи теорії тіней полягають в тому, що тінню точки є точка перетину світлового променя, що проходить через надану точку, з площиною проекцій **(рис. 5.29*а*)**, де **A_{1t}** – реальна тінь на **$П_1$**; або з іншою площиною чи поверхнею, де **M_{2t}** – реальна тінь на **$П_2$** **(рис. 5.29*б*)**.



а) *б)*

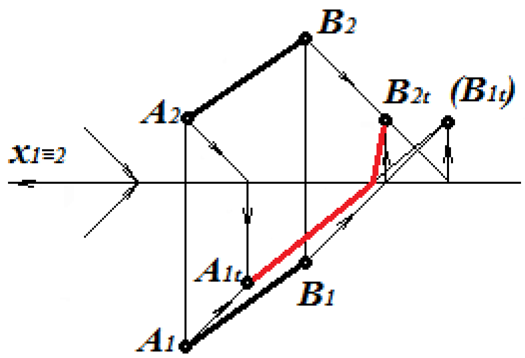
Рис. 5.29. Проекції тіні точки

Таким чином, для знаходження тіні точки на площині необхідно розв’язати *першу ГПЗ* (за допомогою січної проекціюючої площини-посередника Λ – у нашому випадку на рис. 5.29*б* – Λ_1).

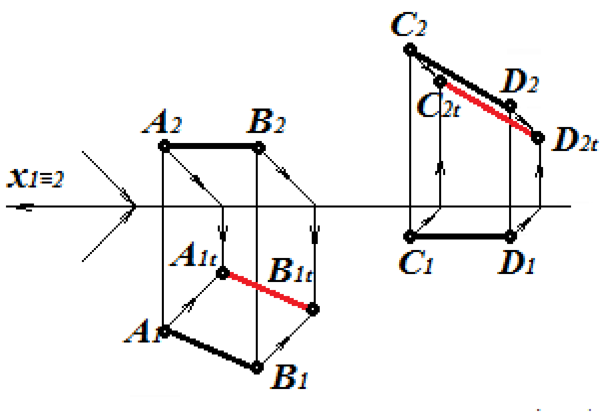
Тінь прямої лінії на площині або поверхні є лінія перетину світлової площини з наданою площиною чи поверхнею: необхідно побудувати тіні двох точок, що належать до прямої (див. рис. 5.29). Побудова тіней прямих *загального положення* показана на **рис. 5.30**.

На **рис. 5.30а** тінь прямої падає на дві площини проекцій, тому вона перетворюється у ламану лінію з точками злому на лінії перетину цих площин – на осі $x_{1\equiv2}$.

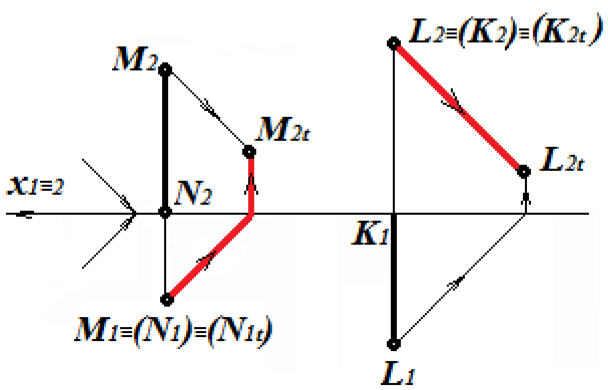
Тіні прямих *окремого положення* будуються за наступними правилами: якщо відрізок прямої розташований **паралельно** до будь-якої площини, тобто є лінією рівня, то від нього на цю площину падає тінь, що дорівнює йому за величиною та паралельна до самого відрізку **(рис. 5.30*б*)**.



а)



б)



в)

Рис. 5.30. Тіні прямих загального та окремого положення

Тінь **проекціюючої** прямої *збігається з проекцією світлового променя*, наприклад, тінь вертикальної прямої на горизонтальну площину $\mathbf{П_1}$ збігається з горизонтальною проекцією променя **(рис. 5.30*в*)**.

Тінь кривої лінії будують як сукупність тіней точок, що належать до цієї кривої лінії.

Відмітимо наступні основні **терміни**:

- *власну тінь* предмета визначають як неосвітлену його частину;
- межа між освітленою та неосвітленою частинами визначається як *контур власної тіні*;
- *падаюча тінь* – це тінь, яку відкидає предмет на будь-яку поверхню чи площину;
- лінія, що обмежує падаючу тінь, визначається як *контур падаючої тіні*.

Основною задачею при побудові тіней об'єктів є знаходження контуру падаючої тіні, тому необхідно запам'ятати наступне **правило**: *контур падаючої тіні будується як тінь від контуру власної тіні.*

Розглянемо наступні задачі.

Задача 11 **(рис. 5.31).** Побудувати контур падаючої тіні непрозорої плоскої фігури – трикутника **(DEF)**.

Розв'язання. Тінь плоскої фігури будується як сукупність тіней точок її вершин, що сполучаються між собою відрізками прямих, наприклад, тінь від точки **D** падає на $\mathbf{П_1}$ – $\mathbf{D_{1t}}$, а тінь від точки **E** падає на $\mathbf{П_2}$ – $\mathbf{E_{2\mathit{t}}}$, тому тінь від відрізка **(DE)** буде ламаною лінією з точкою зламу на осі $\boldsymbol{x_{1\equiv2}}$. Далі знаходимо тінь точки **F** - $\mathbf{F_{1t}}$ і тінь від відрізку **(EF)** будується аналогічно з точкою зламу на осі. З'єднуємо точки $\mathbf{D_{1t}}$ та $\mathbf{F_{1t}}$ і здобуваємо тінь від відрізка **(DF)**, тобто всієї фігури **(DEF)**.

Задача розв'язана.

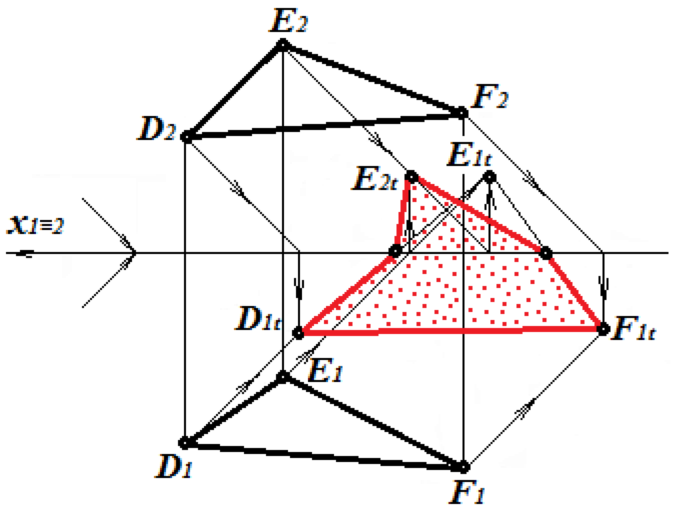


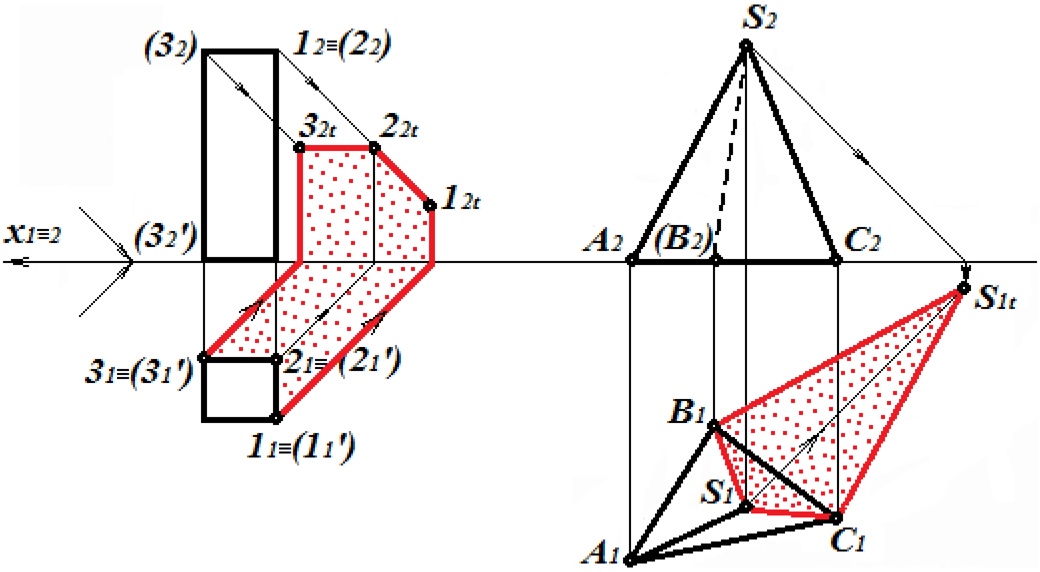
Рис. 5.31. Задача 11

Задача 12 **(рис. 5.32*а*).** Побудувати контур падаючої тіні призми.

Розв'язання. Як відомо, для побудови власної тіні об'ємної фігури є багато способів, серед яких основним є *спосіб обгортаючих поверхонь*. Тобто для побудови контуру власної тіні необхідно знайти лінію дотику обгортаючої поверхні, у якої твірні розташовані паралельно до світлового променя – це циліндрична поверхня, або виходять з однієї ж тієї точки – це конічна поверхня.

Побудова обгортаючої поверхні, як правило, зводиться до побудови множини дотичних до заданої фігури площин, що суміщаються з побудовою шуканого контуру падаючої тіні. Так, контуром власної тіні призми є ламана лінія **1'-1 – 2 - 3 - 3'-2'-1**, тобто замкнена лінія. Обгортаюча поверхня складається із світлових площин, що проходять через контурні твірні призми та які в перетині з площинами проекцій визначають контур падаючої тіні.

Розглянемо окремо ребро **1'-1** – це горизонтально - проекціююча пряма, тінь від якої збігається з горизонтальною проекцією променя: $\mathbf{1'_{1t}}$ – збігається з самою точкою **1'**; тінь від точки **1** падає на $\mathbf{П_2}$ - $\mathbf{1_{2t}}$: тінь упала на дві площини $\mathbf{П_1}$ та $\mathbf{П_2}$.



а) *б)*

Рис. 5.32. Задача 12

Далі аналогічно знаходимо тіні від ребра **2’-2** та **3’-3’** і з’єднуємо їх відповідними відрізками.

Задача розв’язана.

На **рис. 5.32*б*** показані побудови падаючої тіні піраміди: спочатку необхідно побудувати тінь від вершини **S (S_{1t})**, а далі з’єднуються з нею $\mathbf{B_1 \equiv B_{1t}}$ та $\mathbf{C_1 \equiv C_{1t}}$ (контур власної тіні є ламана **SBCS**).

Задача 13 **(рис. 5.33*а*).** Побудувати контур падаючої тіні циліндра.

Розв’язання. Для побудови падаючої тіні циліндра необхідно, по-перше, знайти контур власної тіні, тобто необхідно побудувати дві обгортаючі дотичні до поверхні циліндра площини $\mathbf{\Gamma^1}$ $\mathbf{(\Gamma^1{}_1)}$, $\mathbf{\Gamma^2}$ $\mathbf{(\Gamma^2{}_1)}$ з кутом нахилу $\mathbf{45^o}$: лінії дотику – це дві твірні **1** $\mathbf{(1_1)}$ та **5** $\mathbf{(5_1)}$. Уздовж цих твірних й проходить контур власної тіні, що замикається частинами кіл верхньої та нижньої основ: на $\mathbf{\Pi_1}$ тінь нижньої основи – це теж коло, його можна побудувати за точкою центра основи

O (O$_1$,O$_2$); тінь від верхньої основи падає на **П$_1$** та **П$_2$** і будується за точками **1 – 2 – 3 – 4 – 5** (вона має лінію зламу на осі ***x$_{1≡2}$*)**. Ширина цієї падаючої тіні на **П$_2$** дорівнює **1,4 D** – діаметра циліндру.

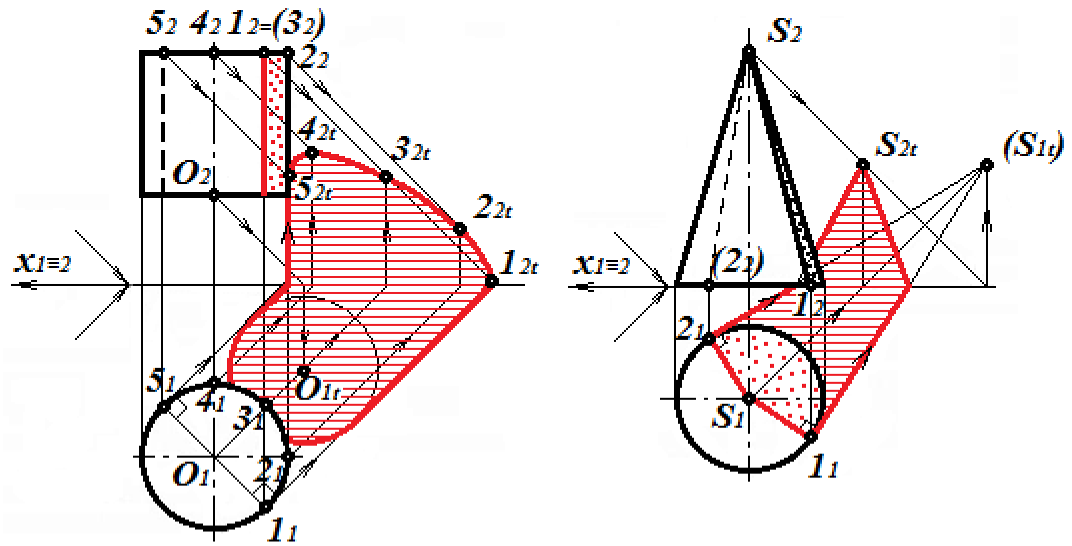


Рис. 5.33. Задача 13

Необхідно підкреслити, що на поверхні циліндра лінія розподілу освітленої та тіньової частин ділить фронтальну проекцію радіуса основи у співвідношенні **3:7**.

Задача розв'язана.

На **рис. 5.33*б*** показані побудови падаючої тіні конуса – це поверхня, для якої спочатку необхідно побудувати контур падаючої тіні: по-перше, будуємо тінь від вершини **S (S$_{1t}$, S$_{2t}$)**, далі проводимо дві дотичні **S$_{1t}$,1$_1$**; **S$_{1t}$,2$_1$** до основи поверхні конуса – ці точки дотику **1 (1$_1$)**, **2 (2$_1$)** утворюють з вершиною **S(S$_{1t}$,S$_{2t}$)** дві твірні **(S,1)** та **(S,2)**, які визначають разом з дугою кола основи контуру власної тіні (падаюча тінь конуса має точки зламу на осі ***x$_{1≡2}$***).

Задача розв'язана.

Поверхні базових елементів будівель та споруд, архітектурних форм являють собою різні взаємопов’язані точки, лінії, плоскі фігури та поверхні. При побудові тіней визначають ці об’єкти, будують контури власних тіней, а далі, нарешті, будують контур падаючої тіні як сукупність падаючих тіней точок, ліній, тощо цих контурів.

Розглянемо наступну задачу.

Задача 14. Побудувати в ортогональних проекціях падаючі тіні двох схематизованих будівель **(рис. 5.34)**.

Розв’язання. Схематизована будівля (одна) уявляє собою призматичну поверхню. Як відомо, контур падаючої тіні будується як тінь від контуру власної тіні, тобто для будівлі контур власної тіні (див. **рис. 5.34*а***) складається з ребер (замкнена ламана лінія): **1-2; 2-3; 3-4; 4-5; 5-6; 6-1**, якщо вважати, що промені спрямовані зверху та спереду**.** Проаналізуємо положення цих ребер у просторі: вони всі займають окреме положення, а саме: **1-2; 4-5; 3-6** – це *горизонтально - проекціюючі*, а **2-3; 6-1** – *фронтально - проекціюючі* (**6-1** – належить до горизонтальної площини, на якій будується тінь, тому її тінь збігається з самим ребром); **2-3; 3-4; 5-6** – ці ребра паралельні до $\mathbf{П_1}$ **(5-6** – належить до $\mathbf{П_1}$**)**. За відомими правилами, тінь проекціюючої прямої збігається з проекцією світлового променя на $\mathbf{П_1}$ або на $\mathbf{П_2}$, а для ребер, що займають положення ліній рівня, тіні паралельні цим ребрам та рівні їм за довжиною. Для спрощення побудов тіней візьмемо спрощений контур власної тіні для будівлі № **II** (див. **рис. 5.34*б***), а саме ребра **1-2; 4-5; 3-6,** та побудуємо від них тіні на $\mathbf{П_1}$**.** Для цього з точок $\mathbf{1_1, 3_1, 4_1}$ і $\mathbf{2_2, 4_2}$ проводимо прямі лінії, паралельні до відповідних проекцій світлових променів (під кутом $\mathbf{45^0}$ до осі $\boldsymbol{x_{1\equiv2}}$). З точок перетину фронтальних проекцій світлових променів з віссю $\boldsymbol{x_{1\equiv2}}$ проводимо лінії зв’язку до перетину з горизонтальними проекціями світлових променів, де і одержуємо відповідно тіньові точки $\mathbf{2_{1t}, 3_{1t}}$ і $\mathbf{4_{1t}}$, що утворюють контур падаючої тіні для будівлі № **II** на площині $\mathbf{П_1}$. Контур падаючої тіні для будівлі

№ **I** на площині **П**$_1$ будується аналогічно, після чого спільний контур наводиться основною суцільною лінією. Крім побудованих падаючих тіней (штриховка виконана на площині **П**$_1$ суцільною тонкою лінією під кутом **45**^{0} до осі $x_{1\equiv2}$) тіні падають також від будівлі № **I** на фасад та дах будівлі № **II**.

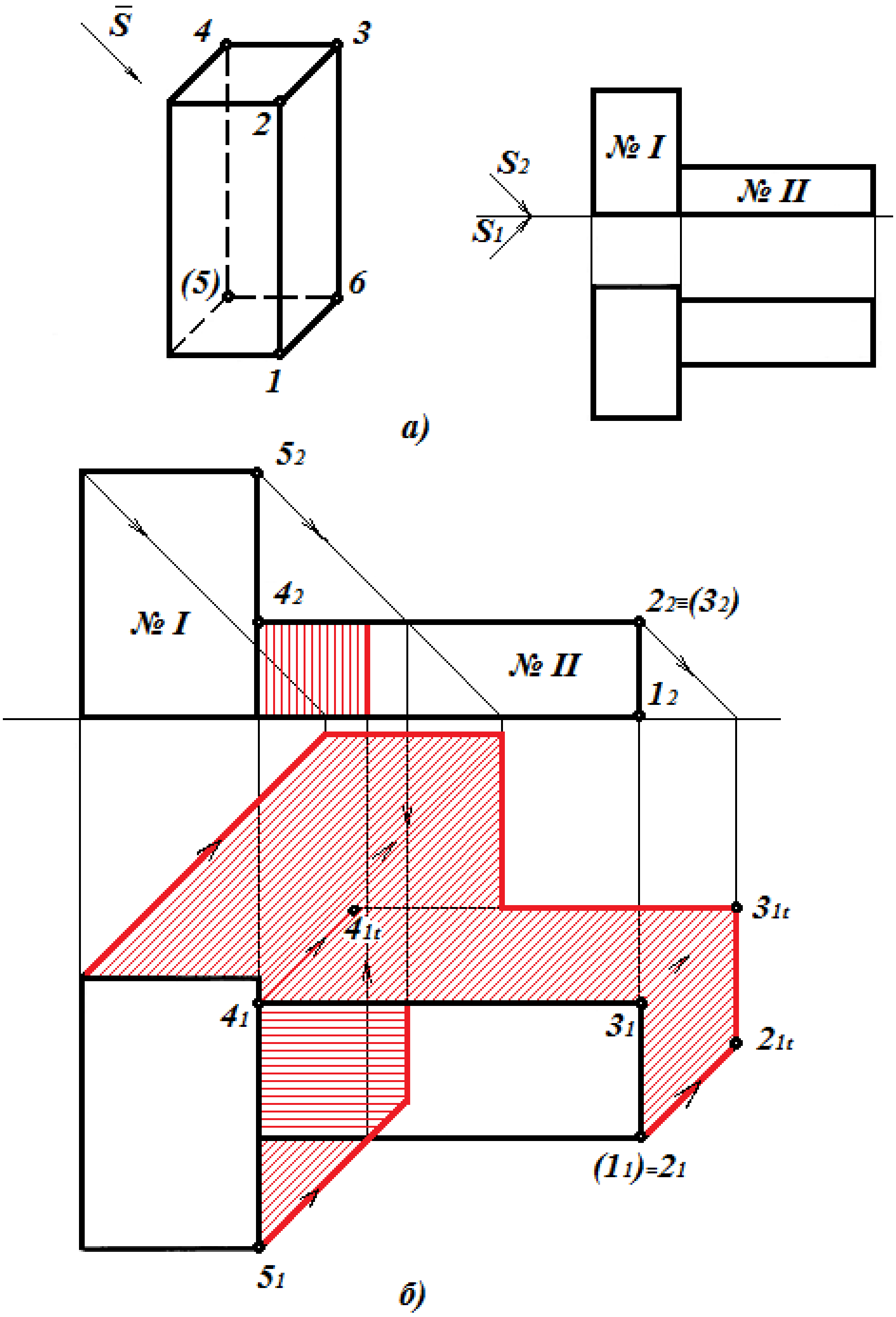


Рис. 5.34. Задача 14

Для знаходження тіні на фасаді необхідно відмітити точку перетину променя, що проходить з точки **5**$_1$, із фронтальною передньою стіною, та провести з неї вертикальну лінію зв'язку, а далі на **П**$_2$ від рівня землі по стіні пройде контур падаючої на фасад тіні, що продовжується ліворуч до перетину з боковою стіною будівлі № **I** (штриховка виконана на площині **П**$_2$ суцільною тонкою вертикальною лінією). На даху будівлі № **II** тінь утворюється за допомогою променя, що виходить з точки **5**$_2$. З точки перетину цього променя з дахом проводимо вертикальну лінію зв'язку, що перетинає горизонтальну проекцію променя з точки **5**$_1$ та утворює контур падаючої тіні на даху (штриховка виконана на площині **П**$_1$ суцільними тонкими горизонтальними лініями (див. рис. 5.34*б*).

Задача розв'язана.

На **рис. 5.35; 5.36** показано побудови падаючих тіней на будівлі, всі лінії побудови на кресленні збережені (рекомендується самостійно розглянути побудови).

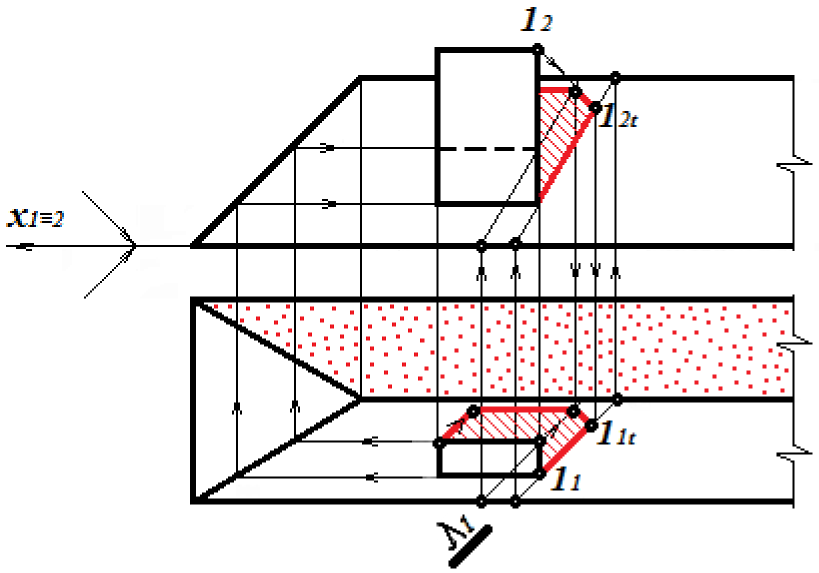


Рис. 5.35. Побудови падаючих тіней на даху

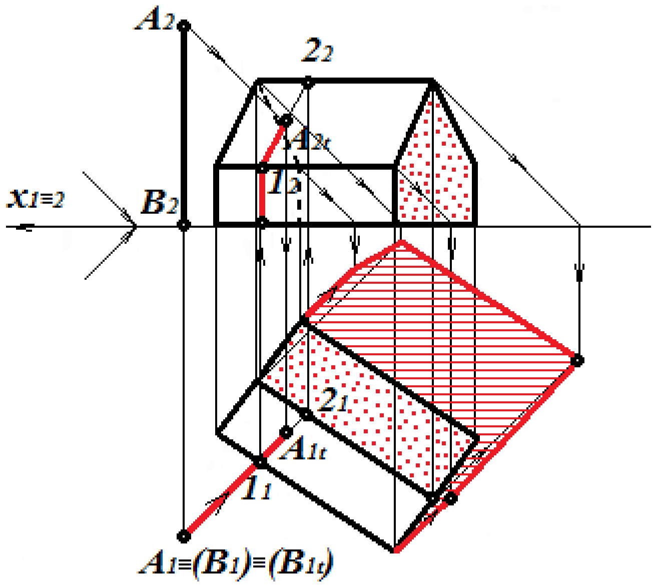


Рис. 5.36. Побудови падаючих тіней будівлі

Б. Тіні в аксонометрії.

Побудови в аксонометрії тіні точки також, як і в ортогональних проекціях, знаходиться за точкою перетину світлового променю з наданою площиною (або з поверхнею). В даному випадку напрям променів (**рис. 5.37**) обирається довільно, але рекомендується, щоб тіні просторових об'єктів відповідали реальним, тобто не були занадто короткими або витягнутими.

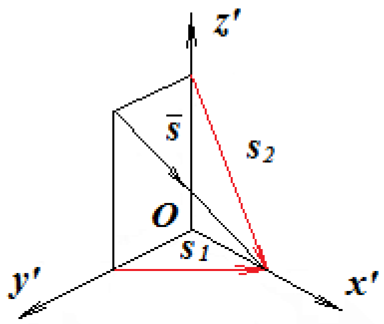


Рис. 5.37. Напрям променів в аксонометрії

На **рис. 5.38** наведений приклад побудови (у збільшеному масштабі) падаючих тіней групи просторових об’єктів у прямокутній ізометрії за контуром їхньої власної тіні (розглянути самостійно).

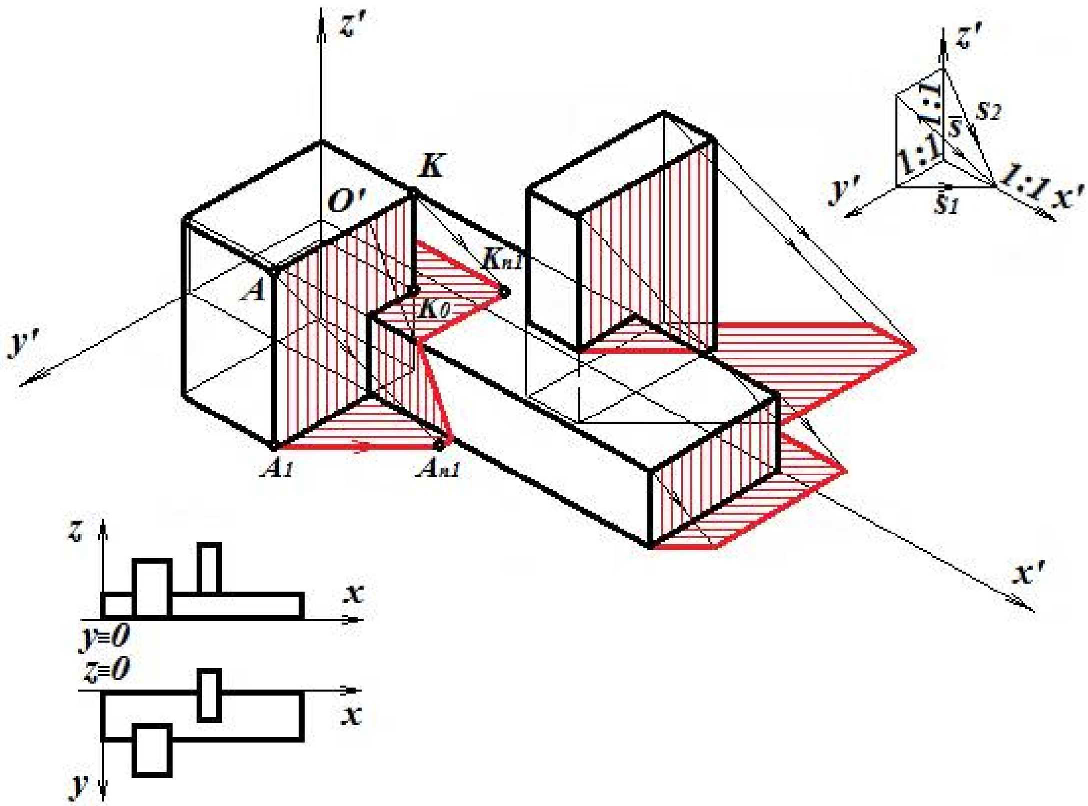


Рис. 5.38. Приклад побудови падаючих тіней групи просторових об’єктів у прямокутній ізометрії

5.4.2. Загальні положення теорії перспективи

Перспектива, в перекладі з латинської «**perspectus**», означає «бачити вперед», «правильно бачити» і є такою проекцією, за допомогою якої можна з найкращою наочністю передати оточуючу дійсність. Навколишній світ сприймається перспективно, тобто з урахуванням візуального феномену сприймання перспективних явищ. *Перспектива*, крім ролі ілюстрації, повинна відігравати також роль робочого апарата архітектурного проектування, тому необхідне задоволення геометричної схеми її побудови, в основі якої лежить метод *центрального проекціювання*, наступним сучасним вимогам: по-перше, передбачати прямий проекційний зв'язок між ортогональними проекціями об'єкту і його перспективою для їхнього взаємного сприймання; бути принципово однаковою для побудови на вертикальній і похилій картинах; бути раціональною – містити мінімально можливу кількість простих графічних операцій тощо.

Перспективу в залежності від форми поверхні, на якій будується зображення, розділяють на такі види:

- ***лінійна*** – перспектива будується на площині;

- ***панорамна*** – перспектива будується на циліндричній поверхні;

- ***купольна*** (сферична) – перспектива будується усередині сфери.

Основним видом перспективи є геометрична лінійна перспектива, при цьому площина проекцій може бути загального положення або вертикальною.

Основні поняття перспективи наведені нижче **(рис. 5.39)**:

Предметна площина $П_1$ – як правило, горизонтальна площина ортогональних проекцій, на якій розташовуються об'єкти.

Картинна площина К – як правило, вертикальна, що збігається з фронтальною площиною ортогональних проекцій (зображення на горизонтальній картині називають іноді *плафон перспективними*).

Лінія основи картини – лінія перетину предметної та картинної площин.

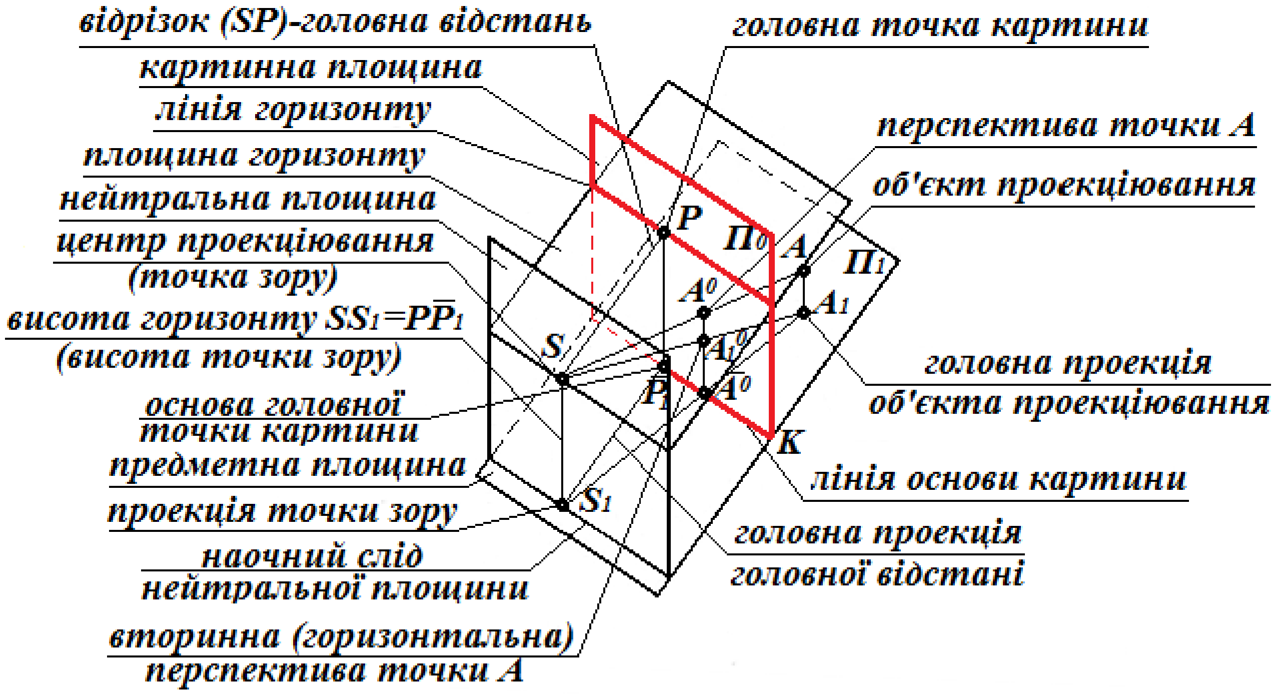
Точка зору S – центр зв'язування прямолінійних променів, за допомогою яких об'єкт проекціюється на картину.

Головний промінь зору (**SP**) – самий короткий промінь зв'язування, перпендикулярний до картини.

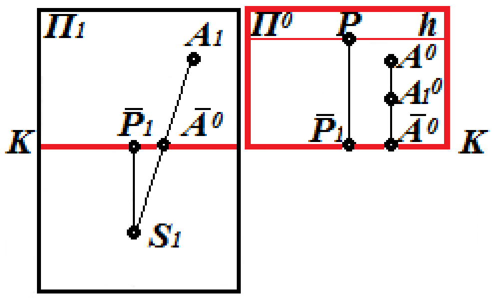
Головна відстань D= (SP) – довжина головного променю зору.

Головна точка картини Р – точка перетину головного променя зору з картиною.

Площина горизонту – площина, що проходить через точку зору **S** паралельно до предметної площини.



а)



б)

Рис. 5.39. Апарат проекціювання

Лінія горизонту – лінія перетину картинної площини з площиною горизонту.

Нейтральна площина – площина, що проходить через точку зору **S** паралельно до картини. Елементи простору, що розташовані в цій площині, на картині не проекціюються.

Кут зору – тілесний кут при вершині – точці зору **S**, обмежений конічною променевою поверхнею, з горизонтальною віссю – *головним променем* зору, обумовлений фізіологічними можливостями апарата зорового сприйняття. Цей кут обмежує частину простору, яку можна охопити поглядом, не повертаючи голови, і яка заповнена зоровими променями зв'язування. Цій умові відповідає значення *горизонтального* кута зору **φ** від $\mathbf{18^o}$ до $\mathbf{53^o}$ і *вертикального* кута **ψ** – до $\mathbf{50^0}$. Кращим вважається горизонтальний кут $\mathbf{28^0}$, коли ширина перспективи укладається в довжині головного променя зору *два рази*. Точка зору також повинна вибиратися таким чином, щоб головний промінь був розташований приблизно посередині цього кута.

На **рис. 5.40** зображено побудови перспективи **A'** точки **A**, тобто *перспективою точки* – оригіналу **A** є точка **A'** перетину картинної площини **K** проекціюючим променем, що проходить через точку зору **S** та точку **A**.

Порядок побудови наступний:

1. Знайти проекції точок ***S*** і ***A*** - $\mathbf{S_1}$ і $\mathbf{A}_1$ на предметну площину та з'єднати **S** та точку **A,** а також **S** і $\mathbf{A_1}$ та $\mathbf{S_1}$ і $\mathbf{A}_1$.

2. Відмітити т. $\mathbf{A_0}$ як результат перетину $\mathbf{(S_1\ A_1)}$ з основою картинної площини, через $\mathbf{A_0}$ побудувати перпендикуляр до предметної площини.

3. У точці перетину цього перпендикуляру з променями $\mathbf{(SA_1)}$ та **(SA)** відмітити т. $\mathbf{A'_1}$ та т. **A'** , які відповідно є перспективною проекцією т. $\mathbf{A_1}$ або вторинною проекцією т. **A** та безпосередньо саме перспективою т. **A**.

Перспективна **A'** та вторинна $\mathbf{A'_1}$ проекції точки **A** однозначно визначають положення точки у просторі.

Відмітимо наступні особливості побудов перспективи точок:

- якщо точка належить до картинної площини, то її перспектива збігається із самою точкою;

- якщо точка належить до предметної площини, то її перспектива та основа збігаються;

- для точки, що віддалена у нескінченність – це невласна точка прямої, перспектива лежить над лінією горизонту, а її основа знаходиться на лінії горизонту. Таку точку ще визначають як точку **збігу**.

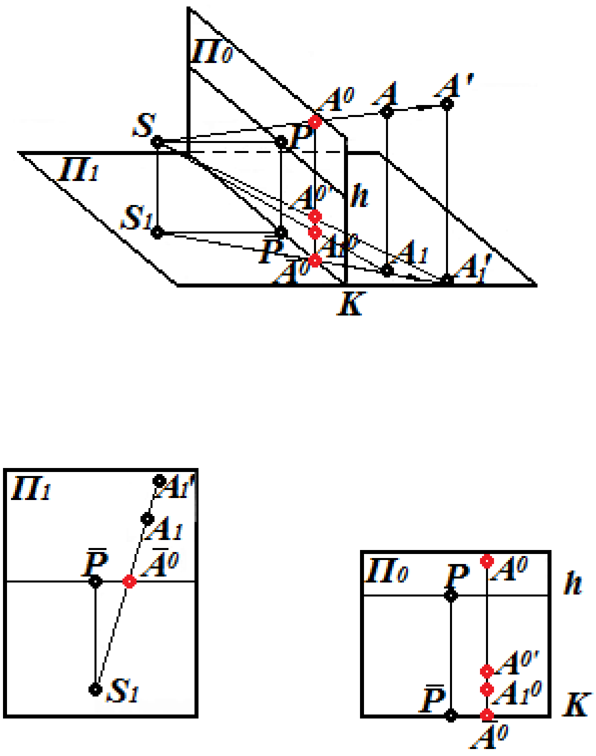
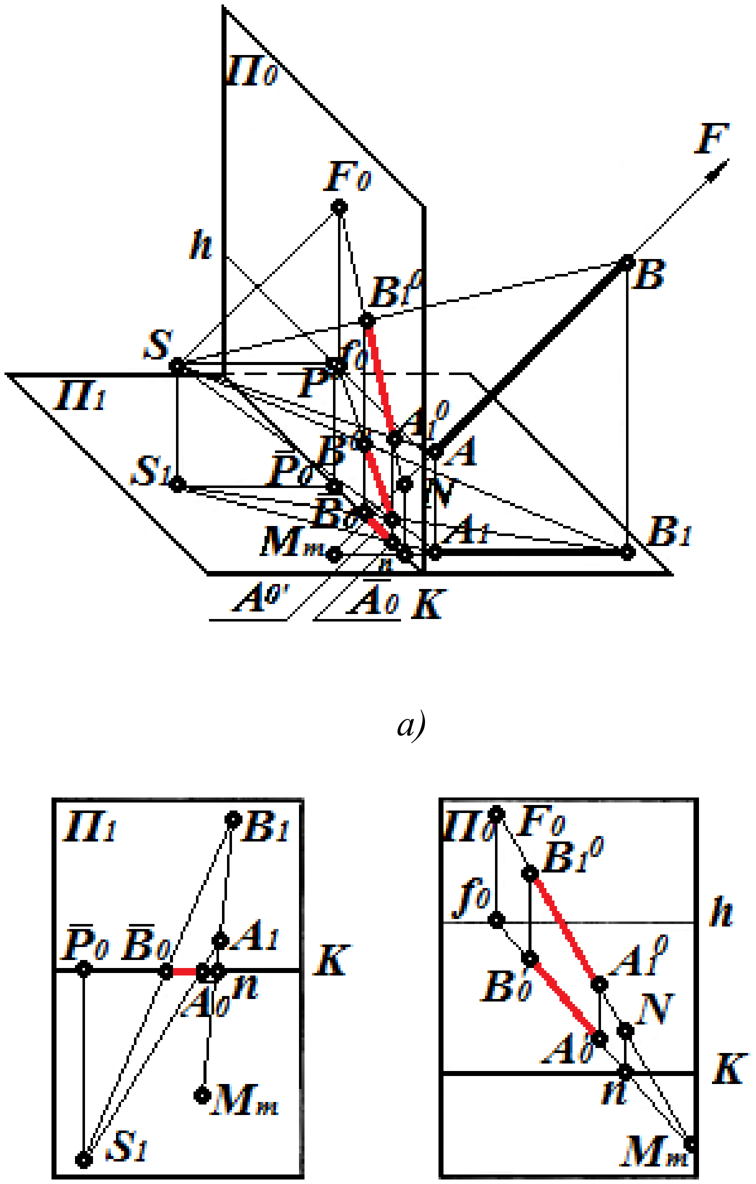


Рис. 5.40. Побудови перспективи точки А

Перспективи **(А’В’)** *прямої загального положення* **(АВ) (рис. 5.41)** знаходиться за допомогою двох точок: точка ***N*** – точка перетину прямої **(АВ)** з картинною площиною **К** (цю точку визначають ще як *слід* або «*початок*» прямої **(АВ)** та точка **F** – точка *збігу*, що визначається як точка перетину проекціюючого променю з точки зору **S** та паралельного до **(АВ)** з картинною площиною **К** (див. рис. 5.41).



а)

б) в)

Рис. 5.41. Перспективи прямої загального положення

Відмітимо особливості побудов перспективи прямих ліній:

- прямі, що перпендикулярні до картини **К**, визначаються як *головні лінії* – точкою збігу таких прямих є головна точка картини т. **Р**;

- прямі, що паралельні до предметної площини, визначаються як *горизонтальні* лінії – точки збігу таких прямих знаходяться на лінії горизонту;

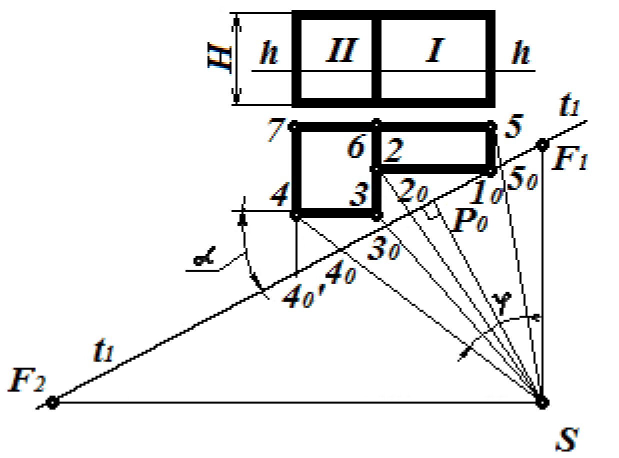
- прямі, що паралельні до картини **К**, визначаються як *фронтальні* лінії – вони мають невласні точки збігу. Перспективи таких прямих паралельні до прямих-оригіналів. Будь-яка плоска фігура, що утворена такими прямими, знаходиться у площині, яка паралельна до картини, тому у перспективі вона зображується подібною до оригіналу фігурою. Окремим випадком фронтальних ліній є *вертикальні* прямі – перспективи таких прямих також вертикальні, тобто перпендикулярні до основи картини;

- перспектива прямих, що *розташовані у картині*, збігаються із самою прямою, тобто у перспективі відрізок такої прямої зображується у натуральну величину (за цією особливістю такі прямі використовують як масштаби: горизонтальні прямі – це масштаби широт або глибин; вертикальні прямі – це масштаби висот тощо).

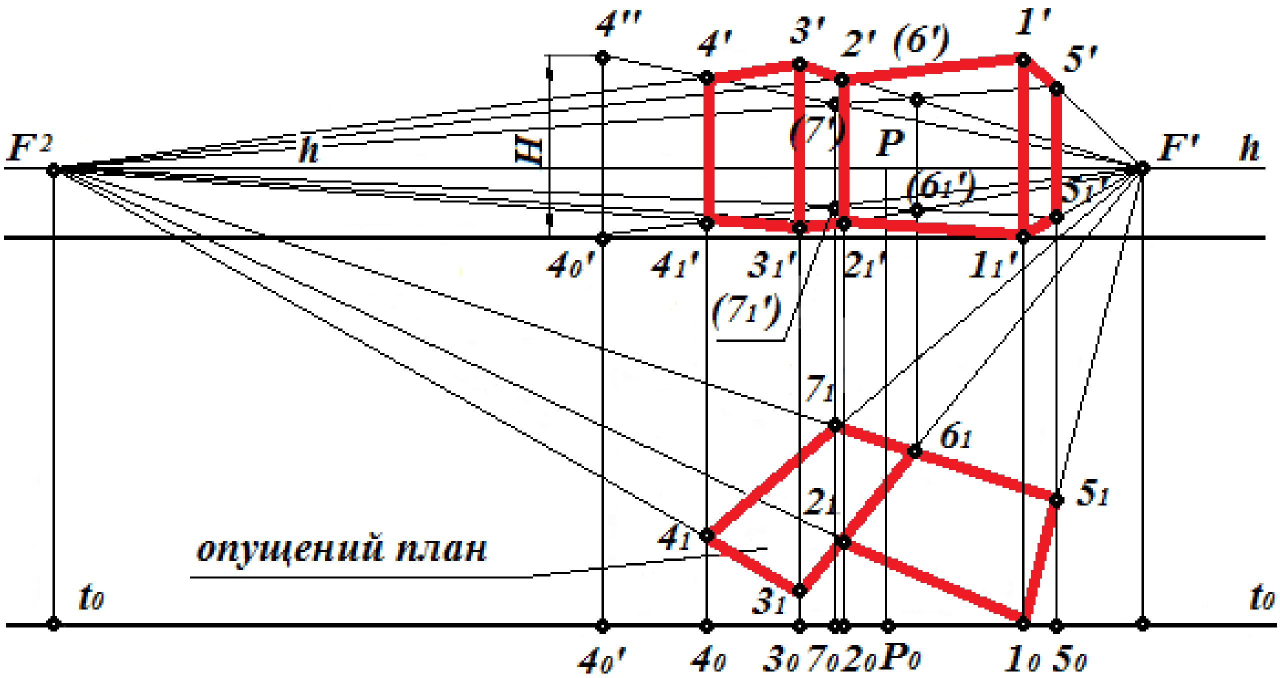
Для побудови перспективних зображень просторових фігур існують певні правила. По-перше, основою є *ортогональні проекції* об'єкту – плани, фасади з боку точки зору. По-друге, побудова перспективи предмета зводиться до побудови перспективи його основи та до наступного відкладення висоти кожної точки: таким чином, *кожна точка знаходиться у перспективі за допомогою двох ліній, що направлені до відповідної точки збігу*. Є багато способів побудови, найбільш поширеним є *спосіб архітекторів з двома точками збігу* (стародавні архітектори Гвідо Убальді та Франческо Бруннелескі). Практичні рекомендації вибору основних параметрів побудови перспективи (картинна площина, точка і кут зору, висота площини горизонту тощо) розглянемо подалі на конкретному прикладі.

Задача 15 **(рис. 5.42)**. Побудувати перспективу групи будівель методом архітекторів з двома точками збігу за двома наданими ортогональними проекціями.

Розв'язання. Спочатку необхідно вибрати положення точки зору **S** та картинної площини **К**.



а)



б)

Рис. 5.42. Задача 15

Положення точки зору **S** і висоти горизонту **h** повинне бути таким, щоб на перспективі можна побачити всі характерні частини будівлі. Горизонтальна точка зору приймається в межах **φ = 18°** …. **53°**, що відповідає видаленню точки зору від картинної площини на відстані від **1,5** до **двох** габаритних розмірів будівлі.

З горизонтальної проекції точки зору **S** проводимо горизонтальні проекції проміння зору через крайні лівий і правий кути будівлі, отримуємо кут зору ***φ*.** Будуємо бісектрису цього кута **(SP)**, яка є горизонтальною проекцією головного променя картини. Перпендикулярно до **(SP)** проводимо горизонтальну проекцію (слід) картинної площини **(t_1 - t_1)**.

Картинну площину доцільно проводити через ближнє ребро будівлі, оскільки висота ребра, що належить до картини, на перспективі зобразиться в *натуральну* величину. Слід картинної площини в плані щодо сторін будівлі розташовують так, щоб він складав з передньою стіною кут ***$\alpha = 20^o \ldots 30^o$***.

З точки зору **S** паралельно домінуючим напрямам ліній будівлі проводимо прямі до перетину з горизонтальною проекцією картинної площини **(t_1 - t_1)**. Одержуємо точки збігу **F_1** і **F_2**.

Позначимо на плані будівлі цифрами всі ребра **(1, 2, ... 7)**. Отримані точки з'єднаємо з точкою **S**. Точки перетину променів зору з проекцією картинної площини ***t_1 - t_1*** позначимо **1_0, 2_0, … 7_0**. Далі побудуємо проекції основи картинної площини (***t*** - ***t*** – горизонтальна лінія), паралельно до якої проведемо лінію горизонту на висоті **2h** (**h** – висота лінії горизонту**)**, і тоді всі розміри з ортогонального креслення збільшуємо у два рази.

На лінії горизонту позначимо точку збігу **F^2** та відкладемо від неї відстані від т. **F^2** до т. **P_0** та від **P_0** до **F'**, що збільшені у два рази. Потім аналогічно будуються всі точки, що знаходяться на лінії ***t_1 - t_1*** (рекомендується відкладати відстані від т. **P_0**).

Для побудови перспективи будівлі **I** з т. **1_1'** проводимо лінію, що перпендикулярна до t_1 - t_1. Оскільки ребро **1** будівлі **I** знаходиться в картинній площині, то в перспективі воно будується в натуральну величину. Відкладемо від т. **1_1'** подвійну висоту ребра **1**, одержимо т. **1'**. Ребро **1-2** має точку збігу **F^2**. Проводимо з точок **1_1'** і **1'** проміння в точку сходу **F^2**, з т. **2_0** – вертикальну лінію. На перетині одержимо точки **2_1'** і **2'**. Ребро **1-5** має точку збігу **F'**. З точок **1_0,** 1_1' і **1'** проводимо проміння в т. збігу **F'**, а з т. **5_0** – вертикальну лінію. На перетині одержимо точки **5_1'** і **5'**.

Для того, щоб побудувати ребро **6-6'**, проводимо з т. **5_1'** і **5'** промінь в точку збігу **F^2**, а з т. **2_1'** і **2'** – промені в т. збігу **F'**. На перетині променів одержимо точки **6_1'** і **6'**.

Перспектива будівлі **I** побудована.

Для побудови перспективи будівлі **II** на ортогональному кресленні з т**. 4** проводимо вертикальну лінію до перетину з ***t - t***. Одержану точку позначимо **4_0'**. Побудуємо т. **4_0'** на перспективі на лінії ***t - t***. З т. **4_0'** проводимо вертикальну лінію, на якій відкладаємо подвійну висоту ребра **4.** Одержимо точку **4''**. Лінія **4-7** має точку збігу **F'**. З т. **4_0'** проводимо промінь в точку збігу **F'**, а з точок **4_0** і **7_0** – вертикальні лінії. На перетині одержимо точки **4_1', 4', 7_1', 7'**. Лінія **4-3** має точку збігу **F^2**. З точок **4_1'** і **4'** проводимо проміння в **F^2**, та продовжуємо його до проведеної з т. **3_0** вертикальної лінії. На перетині одержимо т. **3_1'** і **3'**.

Перспектива будівлі **II** побудована.

Задача розв'язана.

Розглянемо приклад побудови перспективи будівлі *методом* німецького графіка **Ф.Гаука (рис. 5.43)** за двома наданими ортогональними проекціями.

Розв'язання. Спочатку необхідно вибрати положення точки зору **S (S_1,S_2)** та картинної площини **К –** проводимо її слід через ближній до глядача кут будівлі. Позначимо всі характерні точки наданого просторового об'єкту – від **1-ї** … до **25-ї**. Межі картинної площини знаходимо за допомогою двох перпендикулярів до картини, що проведені з крайніх точок **1** і **5** та знаходимо її фронтальну проекцію. Горизонтальний кут зору утворюється за допомогою двох променів, що проходять через крайні точки **1** і **5**. Через т. зору **S** проводимо головний промінь зору (перпендикулярно **К**) і знаходимо головну точку картини **Р(Р$_1$,Р$_2$)**.

Для побудови перспективного зображення нам потрібно буде використовувати на фронтальній площині висотні відмітки точок, що будемо знаходити на лівому обрізу картини (оскільки перспективне зображення при побудовах зменшується, то всі розміри необхідно збільшувати в два рази).

Рекомендується спочатку побудувати перспективу даху (точки **1…9**) – розглянемо побудову т.**1**. Для цього, по-перше, проведемо горизонтальну проекцію променю **S$_1$** і **1$_1$**. Там, де **(S$_1$ 1$_1$)** перетне слід картини **К**, знайдемо горизонтальну проекцію перспективи точки **1$_0$**. Для знаходження фронтальної проекції перспективи точки **1** проводимо **(S$_2$ – 1$_2$)** – там, де цей промінь перетне лівий обріз картини на **П$_2$**, отримаємо т.**1$'_2$**. Знайдемо ці точки у перспективі: збільшуємо всі розміри в два рази і ліворуч від головної точки **Р** відкладаємо відрізок (**Р$_0$,1$_0$**) **х 2** на лінії поверхні землі ***(t-t)***. По лівому обрізу картини по вертикалі відкладаємо відрізок до точки **1'$_2$**, також збільшений в два рази. З т. **1$_0$** будуємо перпендикуляр – там, де перетнуться ці дві лінії отримуємо перспективу т. **1**.

Решта позначених характерних точок будівлі у перспективі знаходиться за тими ж правилами і з'єднується відповідно до плану об'єкту (див. **рис. 5.43**).

Задача розв'язана.

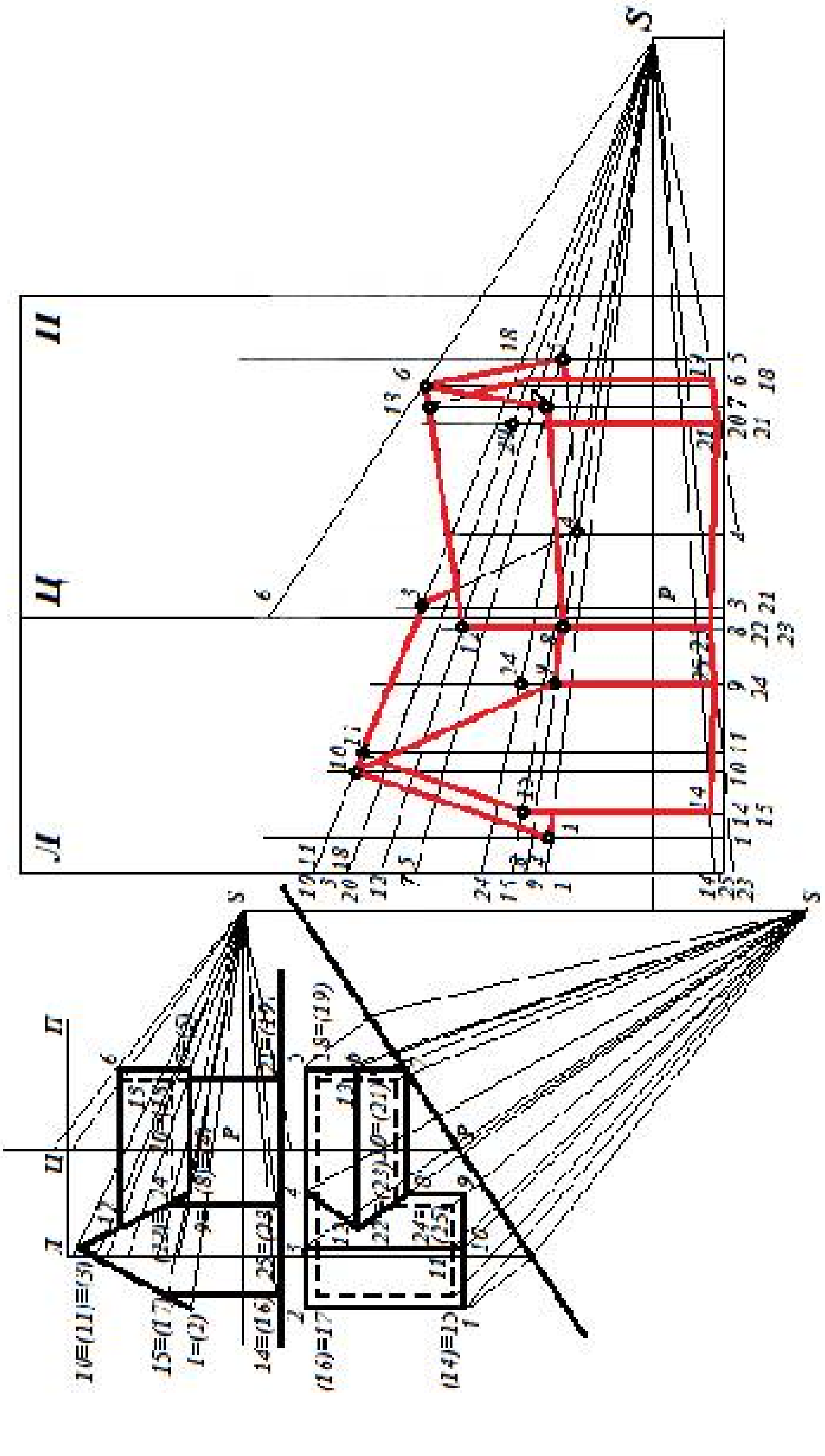


Рис. 5.43. Приклад побудови перспективи будівлі методом Ф.Гаука

На **рис. 5.44** показано вихідні дані та перспективне зображення будівельної споруди, побудоване методом архітекторів. Всі необхідні допоміжні побудови збережені. Завдання рекомендовано розглянути самостійно.

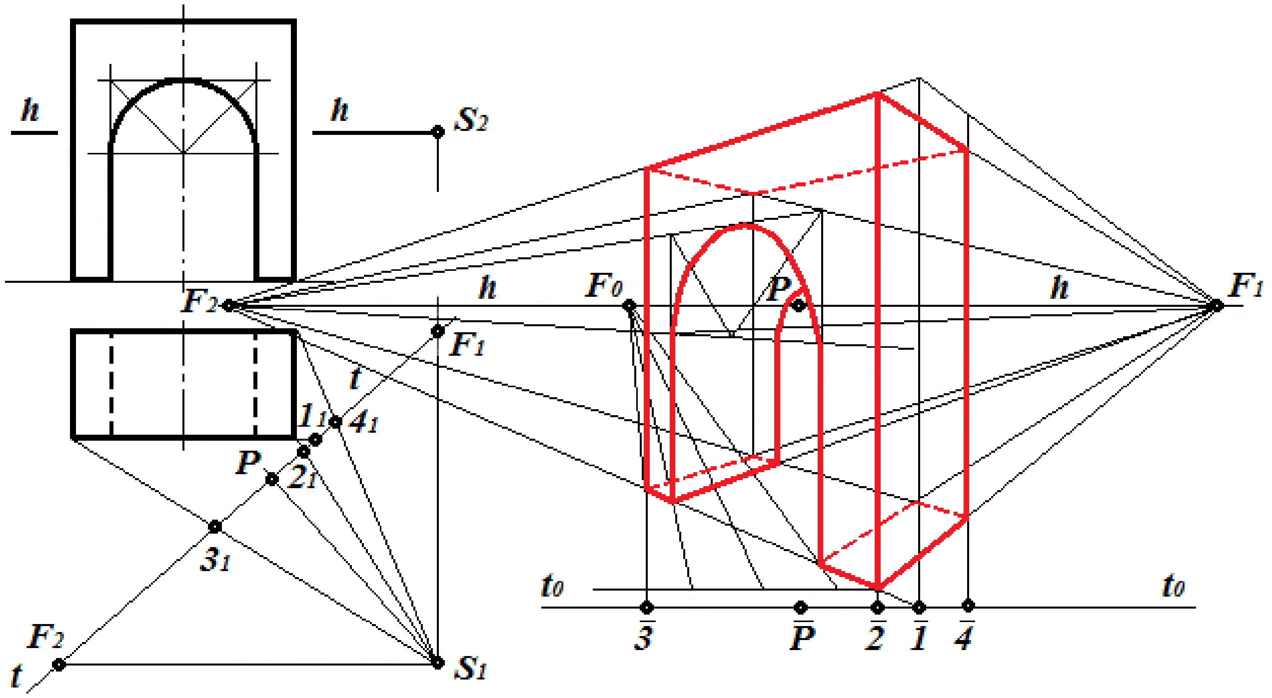


Рис. 5.44. Перспективне зображення будівельної споруди, побудоване методом архітекторів

На **рис. 5.45** і **рис. 5.46** показані всі необхідні допоміжні побудови і наведені приклади виконання перспективи методом Гаука. На **рис. 5.45** наведено перспективне зображення двох схематичних будівель, а на **рис. 5.46** – фрагмент архітектурної конструкції – карниз будівлі. За допомогою наведених перспективних зображень рекомендується самостійно розібрати особливості виконання побудов з використанням методу Гаука.

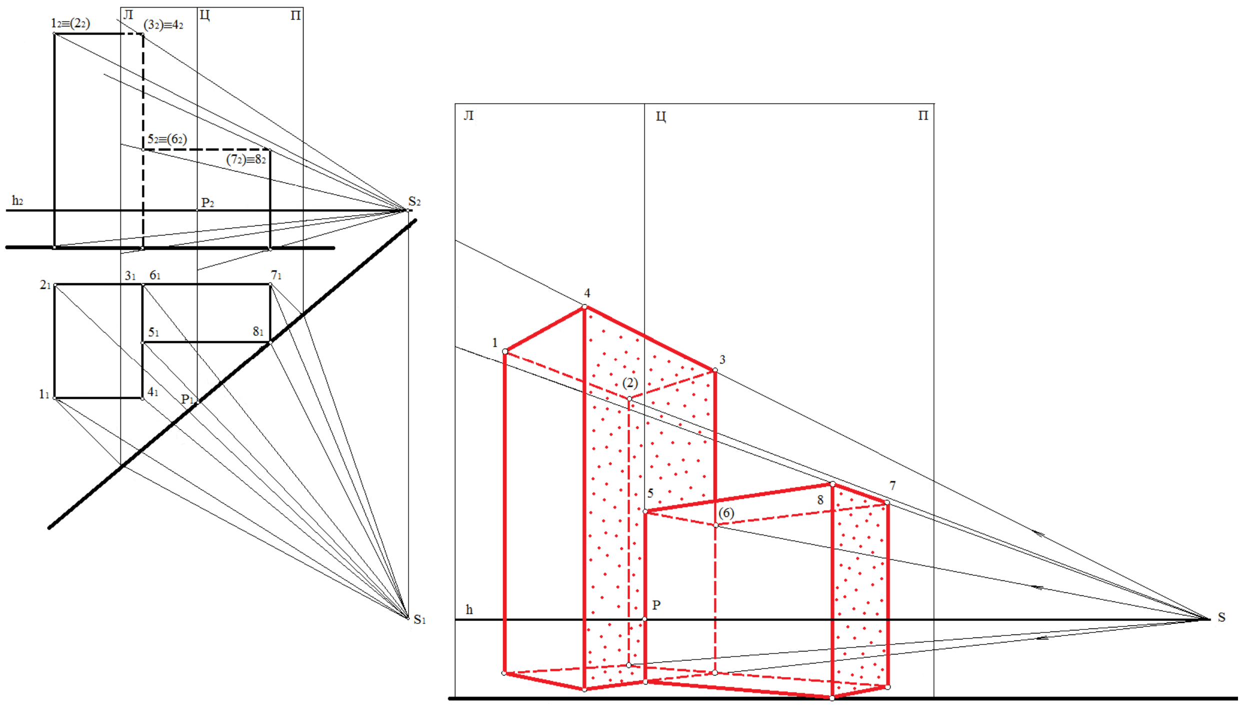


Рис. 5.45. Побудова перспективного зображення двох схематичних будівель методом Гаука

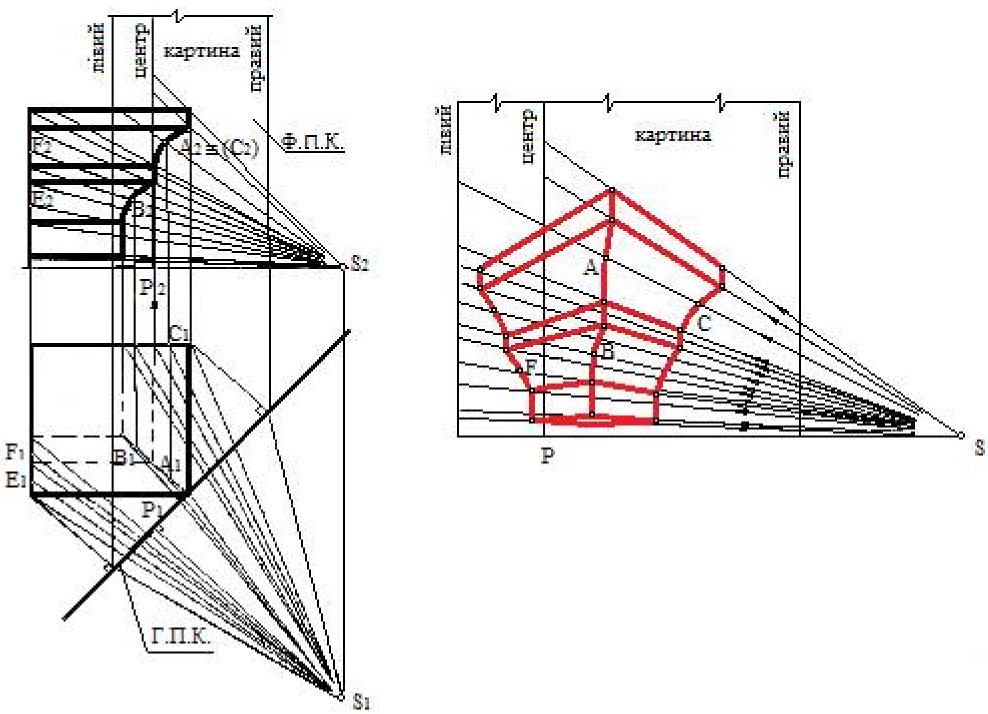


Рис. 5.46. Побудова карнизу методом Гаука

5.5. Питання для самоконтролю

1. В чому полягає сутність методу проекцій з числовими відмітками (позначками)?

2. Як задається точка та пряма лінія в проекціях з числовими позначками? Що означає числова відмітка точки?

3. Що визначає закладення та перевищення прямої лінії, інтервал та ухил, градуювання прямої лінії? Порядок знаходження натуральної величини відрізка прямої та кута його нахилу до основної площини $\mathbf{П}_{0}$.

4. Способи задання площини в проекціях з числовими позначками. Лінія масштабу ухилу та горизонталі площини, інтервал та ухил площини. Умови належності точки та прямої лінії до площини.

5. Взаємне розташування двох площин: умови паралельності та перетину двох площин в проекціях з числовими позначками.

6. Навести приклади розв'язання ГПЗ в проекціях з числовими позначками (перетин прямої з площиною, перетин двох площин, площини з поверхнею).

7. Яким чином задаються будь - які поверхні (в тому числі топографічні) в проекціях з числовими позначками?

8.*Сформулювати загальну послідовність побудови контурів земляної споруди в проекціях з числовими позначками.*

9. Визначити поняття виїмка і насип, точка та лінія нульових робіт.

10. Вказати послідовність та значення креслення графіку масштабів ухилів. Пояснити визначення інтервалів укосів.

11. Як визначаються та будуються межі відкосів земляної споруди з геометричної точки зору (пояснити на прикладі)?

12. Як будуються контури земляних робіт з геометричної точки зору?

13. Як визначається профіль поверхні та послідовність його побудови?

14. Визначення поняття берг-штрихи і порядок їхньої побудови?

15. Визначення поняття «розгортка» поверхні?

16. Які поверхні визначаються як розгортні? Характеристика способів побудови розгорток поверхонь.

17. Послідовність побудови розгорток багатогранних, а також циліндричних і конічних. поверхонь.

18. Які проекції визначаються як аксонометричні? Що характеризують коефіцієнти (показники) спотворення ?

19. Сформулюйте основну теорему аксонометрії Польке – Шварца.

20. Аксонометрична ламана лінія. Навести приклади побудови плоских (квадрат, шестикутник, коло) та просторових об'єктів (піраміда, призма, циліндр) в прямокутній ізометрії та в прямокутній диметрії.

21. Яке значення має наявність тіней на кресленні? Визначення основних понять теорії тіней: тінь точки, власна та падаюча тіні просторових об'єктів тощо.

22. В чому полягають геометричні основи теорії тіней.

23. Вибір напряму світлових променів. Побудова проекцій світлового променя на комплексному кресленні.

24. Тінь точки в ортогональних проекціях (навести приклад на комплексному кресленні).

25. Особливості побудови тіней прямих загального та окремого положень. Навести приклади на комплексному кресленні.

26. Які основні правила вибору напряму світлових променів при побудові тіней в прямокутній ізометрії?

27. Види перспективи (лінійна, панорамна, купольна) та визначення основних понять теорії перспективи (картинна та предметна площини, головний промінь, перспектива точки та її вторинна проекція, точка збігу прямих, кут зору тощо). Вимоги до вибору кута зору, положення точки зору та картинної площини.

28. Спосіб архітекторів з двома точками збігу та метод Ф.Гаука: особливості та переваги побудови ними перспективних зображень.

ЛІТЕРАТУРА

1. Михайленко В.Є., Найдиш В.М., Підкоритов А.М., Скидан І.А. Інженерна та комп’ютерна графіка. – Київ: Слово, 2011. – 352 с.

2. Михайленко В.Є., Найдиш В.М., Підкоритов А.М., Скидан І.А. Збірник задач з інженерної та комп’ютерної графіки. – Київ: Вища школа, 2002. – 342 с.

3. Михайленко В.Є., Євстифєєв М.Ф., Ковальов С.М., Кащенко О.В. Нарисна геометрія. – Київ: Вища школа, 1993. – 272 с.

4. Кириченко А.Ф. Теоретичні основи інженерної графіки. – Київ: Професіонал, 2004. – 495 с.

5. Русскевич Н.Л. Сборник задач по начертательной геометрии – К: Вища шк. – 1978. – 183 с.

6. Бредньова В.П. Нарисна геометрія. Конструктивні та прикладні задачі з елементами теорії. Навч. посібник для вищих техніч. навч. закл. (з грифом МОНУ). ISBN 966-318-399-3. – Одеса: Астропринт, 2013. – 196с.

7. Бреднева В.П., Джугурян Т.Г., Марченко В.С. Инженерная графика. Краткий конспект лекций по начертательной геометрии для студентов первого курса строительных специальностей. – Одесса: Астропринт, 2013. – 204 с.

8. Марченко В.С. Інженерна графіка. Курс лекцій для студентів 1- шого курсу будівельних спеціальностей. Навч. посібник (з грифом МОНУ). ISBN 978-966-190-019-5. – Одеса: Астропринт, 2008. – 168 с.

9. Русскевич Н.Л и др. Справочник по инженерно - строительному черчению. – К.:1987.

10. Інженерна графіка. Практикум з нарисної геометрії для студентів першого курсу (упор. Бредньова В.П., Калінін О.О., Марченко В.С.). – Одеса: ОДАБА. – 2011. – 72 с.

11. Інженерна графіка. Методичні вказівки з нарисної геометрії для виконання контрольних графічних робіт (упор Бредньова В.П., Марченко В.С., Сидорова Н.В.). – Одеса: ОДАБА. – 2013. – 72 с.

12. Інженерна графіка. Методичні вказівки для виконання контрольної графічної роботи №1 з нарисної геометрії «Завдання, конструювання та зображення поверхонь на комплексному кресленні» на основі графічної системи T-FLEX (упор. Бредньова В.П., Сидорова Н.В., Доценко Ю.В.). – Одеса: ОДАБА, 2016. – 40 с.

13. Решение главных позиционных задач начертательной геометрии с применением автоматизированной обучающей системы T-FLEX CAD. Методические указания и варианты заданий к практической работе в компьютерном классе (сост. Джугурян Т.Г., Марченко В.С., Думанская В.В.). – Одесса: ОГАСА, 2012. – 28 с.

15. Методичні вказівки з дисципліни «Інженерна графіка» до практичних занять з використанням графічної системи T-FLEX CAD (упор. Джугурян Т.Г., Марченко В.С., Думанська В.В., Кльоб Н.В., Яворська Н.М.). – Одеса: ОДАБА, 2013. – 27 с.

16. Методичні вказівки з дисципліни «Нарисна геометрія, інженерна та комп'ютерна графіка» до практичних занять для студентів напряму 6.050503 «Машинобудування» (упор. Марченко В.С., Думанська В.В.). – Одеса: ОДАБА, 2014. – 26 с.

17. Інженерна графіка. Методичні вказівки з нарисної геометрії для самостійної роботи студентів першого курсу напряму «Будівництво» (упор. Бредньова В.П.). – Одеса: ОДАБА, 2015. – 28 с.

18. Методичні вказівки з дисципліни «Інженерна графіка 1» до виконання спецрозділу «Побудова тіней» для студ. спеціальності 192 «Будівництво та цивільна інженерія» (упор. Марченко В.С., Думанська В.В.). – Одеса: ОДАБА, 2016.– 27 с.

19. Методичні вказівки з дисципліни «Нарисна геометрія, інженерна графіка та комп'ютерна графіка» до практичних занять графічної системи T-FLEXCAD для студентів напряму 6.050503 «Машинобудування» (упор

Джугурян Т.Г., Перпері А.О., Думанська В.В, Доценко Ю.В.). – Одеса: ОДАБА, 2013. – 28с.

20. Методичні вказівки та варіанти завдань для виконання контрольних графічних робіт №1, №2 студентів заочної форми навчання напряму 6.060101 «Будівництво» з дисципліни «Інженерна графіка 1» (упор. Перпері А.О., Сидорова Н.В.). – Одеса: ОДАБА, 2015 р. – 50 с.

21. Методичні вказівки та варіанти завдань до виконання контрольних графічних робіт №3 та №4 студентів заочної форми навчання напряму 6.060101 «Будівництво» з дисципліни «Інженерна графіка 2» (упор. Перпері А.О., Сидорова Н.В.). – Одеса: ОДАБА, 2016 р. – 71 с.

ДОДАТОК 1.

СТИСЛИЙ ІСТОРИЧНИЙ ОГЛЯД ВИНИКНЕННЯ ТА РОЗВИТКУ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Як відомо, потреба у побудові зображень за законами геометрії (тобто, проекційних креслень **«projecere»** – *кидати вперед*) з'явилась з давніх часів із практичних задач будівництва укріплень, пірамід, споруд тощо. З тих часів геометрія розвивалась у тісному зв'язку з іншими науками: математикою, механікою, фізикою, архітектурою та впливала на розробку теоретичних основ в образотворчому мистецтві і техніці.

Відносно точні свідоцтва про рівень геометричних знань в Стародавньому Єгипті відомі, наприклад, з папірусу *Ахмеса* про розрахунки пірамід, виміри земельних ділянок. Засновником геометрії в Греції вважають фінікіянина *Фалеса Мілетського* (біля 624-547 рр.), що заклав школу геометрів і розвинув її основи як науки. Учню Фалеса *Піфагору Самосському* (біля 580-500 рр.) належать перші відкриття в геометрії: теорія правильних тіл, теорема про квадрат гіпотенузи прямокутного трикутника та багато ще іншого. Послідовник Піфагора *Платон* (427-347 рр.) ввів в геометрію аналітичний метод, основи теорії про геометричні місця та конічні перерізи. Систематизував основи геометрії та розвинув її подалі видатний олександрійський вчений Евклід (III в. до н.е.) у своїй першій серйозній науковій праці «*Начала*», на якому протягом двох тисячоліть навчались геометрії.

«*Золотим*» віком грецької геометрії визнають епоху, коли працювали математики *Архімед* (287-195 рр. до н.е.), *Ерастофен* (275-195 рр. до н.е), *Аполлоній Пергський* (250-190 рр. до н.е.). Архімед розробив методи виміру довжини кола, площини круга, сегмента параболи та спіралі, об'ємів та поверхонь сфери, інших поверхонь обертання тощо. Це були *Додатки* до «Начал» Евкліда. Трактатом про конічні перерізи відзначився Аполлоній Пергський – його працями завершується період *класичної* геометрії.

З відродженням будівництва та мистецтв в епоху Ренесансу починається новий період розвитку геометрії. Найбільш бурхливий темп в країнах – Італії, Нідерландах, Германії – здобули скульптура, живопис, архітектура, поширилось застосування елементів проекційних зображень, з'явились поняття центр проекціювання, картинна площина тощо.

Вагомий внесок в розвиток методів перспективних зображень внесли італійський зодчий *Лоренцо Гіберті* (1378-1455 рр.), італійський теоретик мистецтв *Леон Батиста Альберті* (1404-1472 рр.), *Пієтра-делла-Франческа* (1406-1492 рр.). Розглядав питання лінійної перспективи геніальний італійський вчений, інженер, художник *Леонардо да Вінчі* (1452-1519 рр.), а також її побудові на циліндричних склепіннях, тобто заклав основи панорамної перспективи. У своїй праці «Trattato della pittura» він виклав закони перспективи. У розвиток перспективи значний вклад вніс німецький вчений і художник *Альбрехт Дюрер* (1471-1528 рр.). Він розробив графічні способи побудови плоских та просторових кривих, оригінальні способи побудови перспективи і тіней об'єктів. У своєму трактаті, виданому у 1525 р. він вперше спробував теоретично обґрунтувати спосіб прямокутного проекціювання на дві взаємно перпендикулярні площини. Засновником теоретичної перспективи вважають італійського вченого *Гвідо Убальді* (1545-1607 рр.) – його трактат «*Шість книг про перспективу*» містить розв'язання майже всіх основних задач перспективи. Французький архітектор і математик *Дезарг* (1593-1662 рр.) вперше застосував метод координат *Декарта* для побудови перспективи, що допомогло появі нового аксонометричного методу в геометрії. Французькі математики *Ферма* (1601-1665 рр.) і *Декарт* (1596-1650 рр.) заклали основи аналітичної геометрії. Видатний трактат Ісаака Ньютона (1642-1727 рр.) у галузі нескінченно малих заклав нову вітку – *диференційну* геометрію. «Геометрію потрібно будувати геометрично» – ***«Geometria geometrice»*** – була поговірка серед математиків. З’явилась ще одна вітка – *проективна* геометрія, творцями нового напрямку вважають французьких математиків *Понселе, Шаля, Мьобіуса*, але основу заклав *Дезарг.*

Засновником нарисної геометрії та ортогональних проекцій вважають французького геометра, військового міністра Наполеона Бонапарта *Гаспара Монжа* (1746-1818 рр.), який систематизував і узагальнив знання, що були накопичені в теорії й практиці зображень просторових об’єктів на площині та підняв нарисну геометрію на високий рівень наукової дисципліни (основи її як військової справи були таємні для всіх протягом тридцяти років). З цієї точки зору нарисна геометрія – це графічна мова, що необхідна інженеру – фахівцю у будь-якій технічній галузі (Г. Монж в 1795 р. написав першу книгу – посібник «Geometrie descriptive» – «геометрія графічна», так говорили в ті роки – геометрія креслення). У 1797 р. Г. Монж зайняв місце директора Політехнічної школи – «**Маленький шедевр»** – так він її назвав, тому що вона дала світовій науці багато видатних імен: *Ампер, Пуассон, Коріоліс, Беккерель* та ін. Г. Монж запропонував багато нововведень, в тому числі, по-перше, *епюр Монжа*, тобто комплексне креслення просторового об’єкту як результат суміщення його зображень у двох площинах проекцій.

Подальший розвиток нарисна геометрія здобула в працях багатьох вчених: *Г. Шрейбер* (1799-1871 рр.), *В. Фідлер* (1871 р. – книга «Нарисна геометрія», нім. мова), проф. Берлінської Будівельної академії *К.Польке* (1810-1876 рр.).

В 1810 р. послідовник Г. Монжа інженер *К.Потьє* почав викладати курс нарисної геометрії французькою мовою в Петербурзі, а потім помічник Потьє проф. *А.Севастьянов* (1796-1849 рр.) переклав ці лекції російською мовою.

Проф. *М.Макаровим* були написані капітальні трактати «Нарисна геометрія з проекціями з числовими позначками та ізометрією», «Теорія тіней», «Лінійна перспектива на площині» (приблизно в 1883-1901 рр.). Досить цікавим, на наш погляд, є витяг того часу з Правил Інституту: «*Для исполнения графических работ учащиеся могут оставаться в чертежных залах до 10 часов вечера, так как все чистовые графические работы обязательно исполняются в стенах Института, а эскизы, пояснительные записки и расчеты могут быть исполнены дома. Познание и успехи учащихся проверяются посредством повторений и срочных подач рисунков, чертежей и расчетов. Графические работы принимаются к рассмотрению только представленные учащимися в сроки, определенные учебным планом».*

Утворення нарисної геометрії як науки мало велике теоретичне значення. Ось що сказав про це учень Монжа *М.Шаль*: *«С появлением начертательной геометрии мгновенно расширилась как по понятиям, так и по средствам остававшаяся около века в пренебрежении чистая геометрия – наука, прославившая Евклида, Архимеда, Аполлония, бывшая в руках Галилея, Кеплера, Паскаля, Гюйгенса единственным орудием при их великих открытиях законов природы, наконец, наука, породившая бессмертные «Principia» Ньютона.*

До наших часів збереглось багато бездоганних прикладів будівельної та архітектурної практики – архітекторів *В. Растреллі, В. Баженова, М. Казакова*, інженерів *І. Кулібіна, І. Ползунова* та ін. Академік *І. Сомов* (1815-1876 рр.) вперше російською мовою в своїй книзі описав метод перетворення комплексного креслення – метод заміни площин проекцій.

В.Курдюмову належить капітальний трактат «Курс нарисної геометрії» (надрукований з 1895 по 1905 рр.). Широко відомі слова В.Курдюмова, що продовжив фразу Монжа: *«Чертеж - язык техника»*, він підкреслив: «*Если чертеж является языком техники, одинаково понятным всем народам, то начертательная геометрия служит грамматикой этого языка, так как она* *учит нас правильно читать чужие и излагать наши собственные мысли, пользуясь в качестве слов только линиями и точками, как элементами всякого изображения».*

Продовжили розвивати теорію нарисної геометрії учень В. Курдюмова проф. М. Ринін (1877-1942 рр.)., проф. А. Добряков (1895-1947), проф. Н.А. Попова, проф. Д. Каргін (1880-1949), проф. М.Громов (1884-1963), проф. С. Колотов, проф. В. Гордон, проф. М. Четверухін (1891-1974), проф. М. Котов (1909-1976). По підручнику проф. В. Гордона багато років навчались студенти багатьох технічних ВНЗ. Удосконаленню викладання нарисної геометрії у ВНЗ сприяла наукова і методична робота професора, доктора фізико-математичних наук М. Четверухіна, яким отримані значні результати в теорії позиційної та метричної повноти зображень, а також виконані великі роботи в області аксонометрії, теорії геометричних побудов та ін.

У зв'язку з потребами будівництва і техніки удосконалюється сучасна школа нарисної прикладної геометрії, яку представляють багато відомих вчених серед яких українські геометри: В. Михайленко, І. Скидан, О. Кащенко, А. Підкоритов, С. Ковальов, В. Найдиш, Н. Обухова та ін.

ДОДАТОК 2

ПЕРЕЛІК ЗРАЗКОВИХ ПИТАНЬ ДЛЯ ІСПИТУ

1. Визначити два основних види проекціювання, їхні основні елементи та навести основні властивості прямокутного проекціювання.

2. Дати визначення *«комплексне креслення»* та у який спосіб таке креслення утворюється?

3. Квадранти та октанти Евклідового простору.

4. Задання точки та прямої на комплексному кресленні. Навести приклади їхнього зображення на комплексному кресленні.

5. Дати визначення ліній: прямі, ламані, криві.

6. Дати визначення прямої лінії *загального* положення. Ознаки східних та висхідних прямих загального положення на комплексному кресленні.

7. Дати визначення прямих *окремого* положення: прямі лінії рівня та прямі лінії проекціюючого положення. Характерна властивість **основної** проекції проекціюючої прямої. Навести приклади на комплексному кресленні.

8. Метрична визначеність комплексного креслення. Сформулювати правило *прямокутного трикутника* для знаходження натуральної величини відрізка та виконати побудови на комплексному кресленні.

9. Визначити взаємне положення двох прямих у просторі, вказати їхні ознаки та навести приклади на комплексному кресленні.

10. Визначити шість способів задання площини та навести приклади на комплексному кресленні.

11. Сформулювати умови належності точки та прямої лінії до площини та навести приклади.

12. Дати визначення головних ліній площини та побудувати приклади головних ліній на комплексному кресленні.

13. Площини окремого положення та особливості їхнього задання на комплексному кресленні. Навести приклади.

14. Основні елементи теорії поверхонь: надати визначення знако-кодової формули поверхні, визначника та закону каркасу, елементарного та основного креслення поверхні тощо.

15. Навести класифікацію поверхонь за видом твірної лінії та ознакою її руху у просторі. Надати визначення кожного класу та навести приклади поверхонь.

16. Лінійчаті розгортні поверхні: визначник та закон каркасу. Умова належності точки до поверхні. Навести приклади на комплексному кресленні.

17. Лінійчаті нерозгортні поверхні з двома напрямними: гіперболічний параболоїд, циліндроїд, коноїд – визначник та закон каркасу. Умова належності точки до поверхні. Побудова відсіку поверхні за наданими ознаками. Навести приклади на комплексному кресленні.

18. Поверхні обертання: визначення та класифікація: лінійчаті, циклічні та другого порядку. Умова належності точки до поверхні. Навести приклади на комплексному кресленні.

19. Поверхня відкритого тору: визначник та закон каркасу. Умова належності точки до поверхні (побудувати на комплексному кресленні).

20. Практичне застосування поверхонь в техніці та будівельній практиці.

21. Позиційні задачі: визначення та класифікація. Головні позиційні задачі та їх різновиди (1-а та 2-га ГПЗ, 1-й, 2-й та третій загальний випадки).

22. Проекціюючі геометричні образи та характерні ознаки їхніх основних проекцій (навести приклади на комплексному кресленні).

23. Алгоритм розв’язання 1-ої та 2-ої ГПЗ у першому випадку. Навести приклади на комплексному кресленні.

24. Алгоритм розв’язання 1-ої та 2-ої ГПЗ у другому випадку. Навести приклади на комплексному кресленні.

25. Види конічних перерізів, особливості їхнього утворення та зображення на комплексному кресленні. Навести приклади розв’язання на комплексному кресленні.

26. Перетин двох багатогранних поверхонь та два способи розв’язання цієї задачі на комплексному кресленні. Визначення видимості при побудові лінії перетину двох поверхонь.

27. Алгоритм розв’язання 1-ої ГПЗ у третьому загальному випадку. Визначити основні способи розв’язання ГПЗ у 3-ому випадку та особливості їхнього застосування. Навести приклади на комплексному кресленні.

28. Алгоритм розв’язання 2-ої ГПЗ у третьому загальному випадку. Навести приклади розв’язання на комплексному кресленні.

29. Співвісні поверхні та визначення ліній їхнього перетину (без горизонтальної проекції). Навести приклади розв’язання на комплексному кресленні.

30. Сутність та застосування способів січних концентричних та ексцентричних сфер.

31. Особливі випадки перетину поверхонь 2-го порядку. Теорема Гаспара Монжа. Навести приклади на комплексному кресленні.

32. Метричні задачі: визначення та класифікація. Сутність першої та другої основних метричних задач (ОМЗ) та методика їхнього розв’язання.

33. Теорема про проекціювання прямого кута та її застосування на комплексному кресленні (з доказом).

34. Ознаки двох взаємно перпендикулярних площин та їхня побудова на комплексному кресленні на основі теореми про проекціювання прямого кута.

35. Визначення поняття «перетворення комплексного креслення». Характеристика основних способів перетворення комплексного креслення.

36. Сформулювати умови чотирьох основних задач перетворення комплексного креслення. Навести приклади розв’язання на комплексному кресленні.

37. Одинадцять елементарних метричних задач та алгоритми їхнього розв'язання (навести приклади на комплексному кресленні).

38. Рішення головних позиційних задач (ГПЗ) з використанням перетворення комплексного креслення.

39. Сутність методу проекцій з числовими позначками. Задання точки, визначення числової відмітки точки (навести приклади).

40. Задання прямої лінії. Закладення та перевищення, ухил та інтервал прямої. Градуювання прямої лінії та знаходження натуральної величини відрізка (навести приклади).

41. Задання площини в проекціях з числовими позначками. Точка та лінія у площині.

42. Визначення взаємного положення двох площин. Правило побудови лінії перетину двох площин (навести приклади).

43. Задання поверхонь в проекціях з числовими позначками. Правило побудови лінії перетину площини з поверхнею. Визначення контурів виробництва земляних робіт (навести приклади).

44. Розгортки поверхонь: точні, наближені, умовні. Характеристика способів побудови: способи тріангуляції, розкочування, перпендикулярних перерізів тощо. Навести приклади на комплексному кресленні.

45. Сутність методу аксонометричного проекціювання. Основна теорема аксонометрії.

46. Стандартні види аксонометричних проекцій: прямокутна ізометрія, фронтальна косокутна диметрія.

47. Приклади побудови аксонометричних зображень плоских та просторових об'єктів (трикутник, шестикутник, коло, піраміда, призма, конус тощо).

48. Значення тіней на кресленнях. Основні поняття теорії тіней: тінь точки, власна та падаюча тіні просторових об'єктів.

49. Геометричні основи теорії тіней. Вибір напряму світлових променів (побудови на комплексному кресленні).

50. Тінь точки в ортогональних проекціях.

51. Особливості побудови тіней прямих загального положення.

52. Особливості побудови тіней прямих окремого положення.

53. Види перспективи (лінійна, панорамна, купольна) та визначення основних понять теорії перспективи.

54. Вимоги до вибору кута зору, положення точки зору та картинної площини.

55. Перспектива точки та прямої.

56. Спосіб побудови перспективи методом архітекторів з двома точками збігу: його особливості на прикладі побудови перспективи прямої чотирьохгранної призми.

ДОДАТОК 3

ТЕРМІНОЛОГІЧНИЙ СЛОВНИК

А

АБАКА (*архіт.*) – плита (звичайно квадратна), що становить верхню частину капітелі колони

АБЕТКА – сукупність літер, прийнятих у письменності якої-небудь мови і розміщених у певному усталеному порядку; алфавіт, азбука

АБЗАЦ – відступ управо на початку першого рядка для відокремлення однієї частини тексту від іншої

АБРИС – обриси предмета, контур. Контурний малюнок

АБРИСНИЙ – який дає загальний обрис предмета за допомогою самих тільки ліній, контурний

АБСОЛЮТНА ВИСОТА – перевищення по вертикалі даного пункту земної поверхні над рівнем, який приймають за нульовий

АБСОЛЮТНІ СИСТЕМИ ОДИНИЦЬ – системи одиниць, у яких одиниці довжини, маси і часу вибрані за основні

АБСЦИСА – величина, яка визначає положення деякої точки на площині або у просторі по осі x у прямокутній системі координат

АВАНПРОЕКТ – попередній чорновий проект

АВТОРСЬКИЙ НАГЛЯД – контроль з боку авторів проекту, проектної організації за відповідністю об’єкта проектним рішенням

АЗИМУТ – кут між площиною меридіана точки спостереження й вертикальною площиною, що проходить через цю точку і спостережуване світло(або предмет)

АКВАРЕЛЬ – клейові фарби, що розводяться водою. Живопис такими фарбами. Картина, малюнок, що виконані такими фарбами

АКРОПОЛЬ – у стародавній Греції укріплена центральна частина міста, що розташована зазвичай на горі

АКСІОМА – вихідне положення в науці, яке сприймається без доказів

АКСОНОМЕТРІЯ – паралельна проекція предмета, побудована разом з проекцією прямокутних координатних осей, до яких віднесений зображуваний предмет, на будь-яку картинну площину проекцій

АЛГЕБРА – розділ математики, що вивчає загальні закони дій над величинами, вираженими літерами, незалежно від їх числового значення

АЛГОРИТМ – система правил виконання обчислювального процесу, що призводить до розв'язання певного класу задач

АЛЬМА-МАТЕР – старовинна студентська назва університету

АЛЬТЕРНАТИВА – необхідність вибору між двома або кількома можливостями, що виключають одна одну

АЛЬТИТУДА – висота точки місцевості над рівнем моря. Абсолютна висота

АЛЬФА – назва першої літери грецької абетки

АЛЬФА І ОМЕГА - початок і кінець чого-небудь. Основне або головне в чомусь

АМПІР – стиль пізнього класицизму в західноєвропейській архітектурі та прикладному мистецтві

АМПЛІТУДА – найбільше відхилення тіла, що коливається, від положення рівноваги. Розмах коливань

АНАЛІЗ – метод наукового дослідження явищ, предметів шляхом розкладу, розмежування їх у думці на складові частини

АНГСТРЕМ – одиниця довжини, яка дорівнює одній стомільйонній частині сантиметра

АНФІЛАДА – ряд прямолінійно розташованих суміжних кімнат, з'єднаних дверима або відкритими арками, що розміщені по одній осі

АПЛІКАТА – одна з основних декартових координат точки у просторі; вісь аплікат - вісь Oz

АПОГЕЙ – найвіддаленіша від центра Землі точка орбіти Місяця або штучного супутника Землі

АПОФЕМА – геометричний термін, у планіметрії – це перпендикуляр, що опущений із центра правильного багатокутника на будь-яку із його сторін, тобто радіус вписаного кола; у стереометрії - це висота бічної грані правильної піраміди, що проведена з її вершини

АПСИДА (*архіт.*) – півкруглий виступ у стіні античної або церковної будівлі

АРИФМЕТИКА – розділ математики, що вивчає найпростіші властивості чисел і дії над ними

АРКА – склепіння у формі дуги, яким перекривають проріз у стіні або сполучають стояки моста

АРМАТУРА – сталевий каркас. Сукупність металевих частин, уміщених у будь-який матеріал або споруду для їхнього зміцнення

АРХІТЕКТУРА – мистецтво проектування, спорудження та художнього оздоблення будов і т. ін.

АСИМЕТРІЯ – це порушення симетрії, тобто елементи форми не врівноважені щодо центра. Асиметричність - це засіб, який дозволяє органічніше пов’язувати окремі елементи між собою

АСИМПТОТА – пряма, яка не має жодної спільної точки з певною кривою, що необмежено наближається до цієї прямої

АТТИК (*архіт.*) – стінка над карнизом або поверх, що увінчує споруду

Б

БАГАТОВИМІРНИЙ – що має декілька вимірів

БАГАТОГРАННИЙ – який має кілька (багато) граней

БАЗА (*архіт.*) – нижня розширена частина колони або стовпа. Точно виміряна пряма лінія на площині, що служить основою для тригонометричних обчислень під час топографічних зйомок

БАЛКА – дерев'яний брус, металева або залізобетонна деталь, що з'єднує фундамент, стіни, опори моста і т. ін.

БАРЕЛЬЄФ – скульптурна прикраса, композиція на площині, що виступає над площиною фону менше ніж на половину своєї товщини

БАРОКО – стилістичний напрям у європейському мистецтві кінця 16-го – середини 18-го ст., що характеризувався примхливістю форм і декоративною пишністю

БЕТА – друга літера грецької абетки

БІКВАДРАТ – четвертий ступінь будь - якого числа

БІНОМ – сума або різниця двох алгебраїчних величин, що визначаються його членами. Двочлен

БІПІРАМІДА – багатогранник, який являє собою об'єднання двох пірамід, що мають спільну основу, а вершини розміщені в різних півпросторах, визначених площиною спільної основи цих пірамід

БІПРИЗМА – багатогранник, який являє собою об'єднання двох призм

БІСЕКТОР – прилад (інструмент), який ділить плоский кут навпіл

БІСЕКТРИСА – пряма лінія, що проходить через вершину кута і поділяє його навпіл

БУДІВЛЯ – архітектурна споруда, будова

БУСОЛЬ – геодезичний прилад для вимірювання азимутів

БУТ – будівельний камінь, що використовується, головним чином, для фундаменту

В

ВАТМАН – цупкий папір високої якості для креслення й малювання. Ватманський папір

ВЕКТОР – відрізок прямої з певним числовим значенням і напрямком у просторі

ВЕРНІСАЖ – перший день відкриття художньої виставки

ВЕРТИКАЛЬ – прямовисна лінія, напрям якої збігається з напрямом сили тяжіння і визначається схилом, тобто ниткою з прив’язаним до її кінця вантажем

ВЕРШИНА – верхня, найвища частина чого-небудь

ВИДИМІСТЬ – можливість бачити на будь-яку відстань

ВИДІЛЯТИ – відокремлювати кого; що-небудь від загальної кількості

ВИЇМКА – заглибина, зроблена способом виймання, вирізування і т. ін.

ВИГИН – вигнуте місце, округла лінія згону, повороту

ВИД (вигляд) – вживається для означення предмета за його складовою частиною

ВИКРЕСЛЮВАТИ – креслити, робити схему, план і т. ін. Рухаючись, утворювати слід у вигляді якоїсь лінії

ВИПУКЛИЙ – який має округло вигнуту назовні поверхню, який видається наперед

ВИСНОВОК – остаточна думка про що-небудь, логічний підсумок

ВИСХІДНИЙ – який піднімається догори

ВІАДУК – міст через яр, провалля, залізничні колії тощо

ВІДБУДОВА – відновлення чого-небудь зруйнованого або занедбаного

ВІДДАЛЕННЯ (відстань) – простір, що розділяє два пункти, предмети і т. ін.

ВІДДАЛІК – на великій відстані

ВІДДЗЕРКАЛЮВАТИ (відображати) – надавати зображення за певними правилами предмета на гладкій поверхні чого-небудь

ВІДОБРАЖЕННЯ – зображення, уявлення

ВІДОКРЕМЛЮВАТИ – роз’єднувати, розділяти, брати частину від цілого

ВІДМІТКА (позначка) – той або інший знак, яким щось відмічають

ВІДРІЗОК – частина прямої лінії, обмеженої з обох боків, невелика частина чого-небудь

ВІДСІКАТИ – відрізувати, видаляти

ВІДСОТОК – сота частина певного числа, що береться за ціле, за одиницю (процент)

ВІДТВОРЮВАТИ – передавати що-небудь з максимальною точністю

ВІДТІНОК – один із різновидів відповідного кольору

ВІЗЕРУНОК – малюнок із різних ліній, кольорів, тіней тощо. Мереживо

ВНЗ – скорочена назва: вищий навчальний заклад

ВРІВЕНЬ (урівень) – на одному рівні

Г

ГАБАРИТ – граничний зовнішній обрис будь - якого предмета, найбільший розмір чого-небудь

ГАЗОБЕТОН – дірчастий бетон

ГАЛОН – міра об’єму рідин і сипких тіл в Англії (1 г = 4,546 л) і США (1 г = 3,785 л)

ГАЛТЕЛЬ – округлення зовнішніх і внутрішніх кутів у виробах

ГАММА – назва третьої буква грецького алфавіту

ГЕКТАР – позасистемна одиниця площі (1 га = 100000 $м^2$)

ГЕКТОМЕТР – позасистемна одиниця довжини, що дорівнює 100 м

ГЕЛІКОЇД -– гвинтова поверхня, описана прямою, що обертається навколо нерухомої осі з незмінною кутовою швидкістю і одночасно переміщується вздовж осі обертання зі сталою швидкістю

ГЕНПЛАН – генеральний план, наприклад, місцевості

ГЕОМЕТРИЧНА ФІГУРА – всяка множина точок, як скінчена, так і нескінчена

ГЕОМЕТРИЧНІ ПОБУДОВИ – методи побудови геометричних особливостей фігур за допомогою креслярських інструментів

ГЕОМЕТРІЯ – математична наука, яка вивчає просторові відношення і форми реального світу. Форма чого-небудь. *Нарисна геометрія* – математична наука, де вивчаються властивості просторових фігур за їхніми зображеннями, а також методи побудови та властивості таких зображень

ГІПЕРБОЛА – незамкнена крива з двох віток, що утворюються в разі перетину площиною обох порожнин конуса

ГІПЕРБОЛОЇД обертання – поверхня, що утворюється обертанням гіперболи навколо осі

ГОЛОВНІ ЛІНІЇ ПЛОЩИНИ – лінії, що займають особливе положення. До них відносяться лінії рівня (горизонталь, фронталь, профільні прямі), а також лінії, перпендикулярні до ліній рівня – лінії найбільшого скату

ГОРИЗОНТАЛЬ – пряма, що паралельна до площини горизонту. Крива лінія на карті або плані, яка сполучає точки місцевості, що лежать на однаковій висоті над рівнем моря

ГОРИЗОНТАЛЬНИЙ – спрямований паралельно до лінії горизонту

ГОТИКА – художній стиль європейського пізнього середньовіччя в архітектурі, що характеризувався легкими гострокінцевими будівлями

ГРАДУС – одиниця виміру плоского кута, що дорівнює 1/90 частині прямого кута. Одиниця виміру дуги кола, що дорівнює 1/360 довжини кола

ГРАДУЮВАННЯ прямої – в проекціях з числовими позначками процес знаходження на наданій проекції прямої лінії числових відміток, що мають цілочисельні значення

ГРАДУЮВАТИ – наносити рівновіддалені поділки на вимірювальний прилад (виконувати градуювання)

ГРАНЬ – лінія поділу. Межа, границя. Плоска поверхня предмета, що утворює кут з іншою такою ж поверхнею

ҐРУНТ – верхній шар земної кори, придатний для життя рослин

Д

ДАХ – верхня частина будівлі, що служить її покриттям. Покрівля

ДВОВИМІРНИЙ геометричний образ – образ, що має два виміри

ДЕКАРТОВА СИСТЕМА КООРДИНАТ – система розміщення будь-якої точки (об'єкту), наприклад, на площині відносно двох декартових осей ***Ox*** і ***Oy***, що перехрещуються під прямим кутом, або у просторі – за допомогою трьох декартових осей ***Ox***, ***Oy*** і ***Oz,*** що перехрещуються під прямим кутом

ДЕЛЬТА – назва четвертої літери грецької абетки

ДЕТАЛЬ – складова частина складальної одиниці або механізму

ДЕФОРМАЦІЯ – зміна форми або розмірів тіла під впливом прикладених сил чи нагрівання

ДЕЦИМЕТР – одиниця довжини, яка дорівнює одній десятій частині метра

ДИЗАЙН – художнє конструювання та оформлення будь-яких речей

ДИСКРЕТНИЙ каркас – множина окремих ліній, утворених за єдиним правилом; каркас, що протиставляється неперервному типу

ДИСТАНЦІЯ – відстань, проміжок між чим-небудь (у просторі, часі та ін.)

ДІАГОНАЛЬ – пряма лінія між двома несуміжними вершинами багатокутника або між двома вершинами багатогранника, які не знаходяться на одній його грані

ДІАГРАМА – графічне зображення, що наочно у вигляді певних геометричних фігур показує співвідношення між різними величинами, які порівнюються

ДОПУСК – найбільш допустиме технічними нормами відхилення від потрібного розміру під час виготовлення деталей

ДУГА – округла крива лінія. Частина кривої, розміщена між двома будь-якими її точками

ДЮЙМ – міра довжини, що дорівнює 25,4 мм (1/12 фута)

Е

ЕВОЛЬВЕНТА – крива лінія, що описана вільним кінцем нерозтяжної нитки, яка закріплена в певній точці даної кривої (еволюти) і намотується на цю криву

ЕВОЛЮТА – плоска крива, що є основою для побудови за певним правилом іншої кривої – евольвенти

ЕКВАТОР – уявна лінія, що проходить навколо земної кулі на рівній віддалі від обох полюсів (для поверхонь обертання – це траєкторія, за якою рухається найбільш віддалена від осі обертання точка, або паралель найбільшого діаметру)

ЕЛІПС – замкнена алгебраїчна крива лінія, сума відстаней кожної точки якої від двох даних точок (фокусів) залишається сталою величиною (в кресленні її часто замінюють на овал – циркульну криву)

ЕЛІПСОЇД обертання – замкнута овальна поверхня, що утворена обертанням еліпса навколо однієї з його осей

ЕПІЦИКЛОЇДА – плоска крива, що описана довільною точкою кола, яка котиться без ковзання вздовж іншого нерухомого кола, що дотикається зовні до першого

ЕПЮР – креслення, на якому просторова фігура зображена за допомогою двох (або трьох) ортогональних проекцій на взаємно перпендикулярні, а потім розгорнуті площини (комплексне креслення)

ЕРКЕР – виступ зовнішньої стіни з вікнами будинку у вигляді ліхтаря для поліпшення освітлення і збільшення площі приміщення

ЕСКІЗ – попередній начерк малюнка, картини або її частини. В техніці - це рисунок, виконаний від руки в окомірному масштабі з додержанням пропорційності та основних вимог до виконання креслення

ЕТА – сьома літера грецької абетки

ЕТАЛОН – точний зразок установленої одиниці виміру

ЕТЮД – твір образотворчого мистецтва допоміжного характеру, виконаний з натури з метою її вивчення в процесі роботи над картиною

Ж

ЖИВОПИС – вид образотворчого мистецтва, що зображує фарбами предмети і явища реальної дійсності

ЖИТЛОПЛОЩА – житлова площа (площа будинку, квартири)

З

ЗАБУДОВА – спорудження будівель на будь - якій ділянці

ЗАВДОВЖКИ – за довжиною, уздовж (про міру довжини)

ЗАЗОР – щілина, отвір між двома прилеглими поверхнями

ЗАКРУГЛЯТИ – надавати чому-небудь круглої чи овальної форми

ЗАРИСОВКА – малюнок з натури. Начерк, ескіз. Невеличкий нарис

ЗАФАРБУВАТИ – покривати фарбою (надавати якогось кольору або відтінку кольору)

ЗАШТРИХУВАТИ – покривати штриховими лініями що-небудь (наносити штрихи)

ЗВИС – те, що виступає, нависає як продовження даху будівлі. Піддашшя. **ЗЕНІТ** – найвища точка небесної сфери над головою спостерігача

ЗИГЗАГ – ламана лінія

ЗОБРАЖАТИ – відтворювати, передавати будь - що в художніх образах. Робити відбиток, схему, креслення з чого-небудь. Креслити. Бути відбитком, схемою, фотографією будь - чого

ЗОДЧЕСТВО – мистецтво проектувати і споруджувати будівлі. Архітектура

І

ІЗОБАТА – лінія на карті, що сполучає місця з однаковою глибиною водних басейнів (океанів, морів, озер)

ІЗОЛІНІЯ – лінія, що сполучає на карті або діаграмі місця з однаковими кількісними показниками

ІЗОПОВЕРХНЯ – поверхня, що проходить через точки з однаковим значенням будь-якої величини та характеризує розподіл цієї величини у просторі

ІЗОТЕРМА – лінія на карті, що сполучає місця з однаковою пересічною температурою в певний проміжок часу

ІНЖЕНЕР – фахівець із вищою технічною освітою.

ІНТЕРВАЛ – відстань, простір, що відокремлює предмети один від одного. Проміжок

ІНТЕРПОЛЯЦІЯ – знаходження проміжних значень величин за деякими заданими значеннями

Й

ЙОТА – літера грецького алфавіту, яка позначає звук «і»

К

КАПА (матем.) – плоска крива лінія, що є геометричним місцем точок дотику прямих, проведених з початку координат до кола, центр якого переміщується вздовж осі абсцис

КАПІТЕЛЬ – горішня частина (завершення) колони, пілястри або стовпа, на яку спирається балка чи архітрав

КАРДІОЇДА – плоска крива, яка описується якою-небудь точкою кола, що котиться без ковзання вздовж нерухомого кола з таким самим радіусом і має з першим колом зовнішній дотик

КАРНИЗ – виступ, що завершує горішню частину стіни або міститься над вікнами, дверима

КАТЕТ (матем.) – одна із двох сторін, що утворюють прямий кут у прямокутному трикутнику

КВАДРАНТ – будь-яка з чотирьох частин площини, на які ділять її дві взаємно перпендикулярні лінії. Четверта частина кола

КВАДРАТРИСА – геометричне місце точок перетину прямої лінії, що обертається навколо фіксованої точки, і прямої, яка рівномірно переміщується паралельно до самої себе

КВАДРАТУРА – розмір площі, обчислений у квадратних одиницях

КОЛО – замкнена крива, всі точки якої однаково віддалені від центра

КОЛОНА – частина архітектурної споруди у вигляді високого стовпа, що служить підпорою фронтонів, внутрішніх частин будови

КОЛОНАДА – ряд колон, які підтримують загальне перекриття

КОНІЧНІ ПЕРЕРІЗИ – лінії на поверхні конуса, які отримуються в результаті перетину з ним будь-якої площини (коло, еліпс, парабола тощо)

КОНОЇД - поверхня лінійчата нерозгортна, що утворена рухом прямої лінії, яка перетинає дві напрямні, одна з яких пряма лінія, а інша – крива (поверхня Каталана)

КОНСОЛЬ – виступ у стіні будинку, що підтримує карниз, балкон, архітектурні прикраси тощо

КОНСТАНТА – стала величина в низці тих, які змінюються

КОНТУР – лінія, що окреслює форму предмета (обрис). Графічне окреслення предмета

КОНУС обертання – геометричне тіло, що утворюється обертанням прямокутного трикутника навколо одного з катетів

КООРДИНАТИ – числа, якими визначають положення точки на прямій або кривій лінії, на площині, поверхні, у просторі тощо

КОСИНУС – одна з тригонометричних функцій, величина косинусу дорівнює синусу кута, що доповнює наданий до 90^0

КОСИНУСОЇДА – плоска крива лінія, графік функції $y = \cos x$ у прямокутній декартовій системі координат

КОТАНГЕНС – одна з тригонометричних функцій, величина котангенсу дорівнює тангенсу доповнювального кута

КОТАНГЕНСОЇДА – графік функції $y = ctg\ x$ у прямокутній декартовій системі координат

КРЕСЛЕННЯ (креслення) – умовне графічне зображення якогось об’єкту, що виконане відповідно до вимог за допомогою креслярських інструментів на папері, кальці тощо

КРУГ – частина площини, обмежена колом

КСІ – літера грецької абетки

КУБ – правильний шестикутник, усі грані якого квадрати

КУЛЬМАН – креслярський прилад (стіл) пантографної системи для виконання креслень

Л

ЛАМАНА ЛІНІЯ – об’єднання відрізків, в яких кінець кожного відрізка є початком наступного відрізка (в точках зламу), причому відрізки, що мають спільний кінець, не лежать на одній прямій

ЛЕКАЛО – фігурна лінійка для викреслювання кривих ліній

ЛЕКЦІЯ – усний виклад навчальної дисципліни викладачем у вищому або середньому спеціальному навчальному закладі

ЛЕМА – доведене твердження, що корисне не саме по собі, а для доказу інших тверджень

ЛІНІЙКА – креслярський інструмент, планка для креслення прямих ліній

ЛІНІЙЧАСТА ПОВЕРХНЯ – поверхня, яка утворюється рухом прямої лінії (твірної) вздовж деякої іншої лінії (напрямної)

ЛІНІЯ – риска, вузька смужка на будь - якій поверхні. Геометричний образ, що має лише один вимір – довжину

ЛОГАРИФМ – показник ступеня, до якого потрібно піднести число – основу, щоб одержати надане число

ЛЯМБДА – літера грецької абетки

М

МАКЕТ – зразок чого-небудь, відтворений звичайно в зменшеному розмірі

МАСШТАБ – відношення величини довжини зображення (на карті, кресленні) до величини довжини наданого предмету

МЕДІАНА – у геометрії – пряма лінія, що проведена від вершини кута трикутника через середину протилежної сторони

МЕЖА – лінія поділу якої-небудь території. Границя. Лінія (умовна), що розділяє між собою будь - які частини поверхні

МЕРИДІАН – уявна лінія, яка утворюється за перетином земної кулі площиною, що проходить крізь будь-яку точку земної поверхні та вісь обертання Землі

МЕТР – міжнародна одиниця довжини

МОДЕЛЬ – просторове відтворення виробу в умовному матеріалі, який надає найбільш повне уявлення про зовнішній вигляд виробу

МОДУЛЬНА СИСТЕМА – система проектування, в якій розміри будівель і споруд, їхніх елементів та обладнання визначають на основі кратності цих розмірів установленій одиниці – модулеві

Н

НАРИС – контури чого-небудь. Те, що написане, намічене, складене попередньо, в загальних рисах (проект)

НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ – математична наука, де вивчаються властивості просторових фігур за їхніми зображеннями, а також методи побудови та властивості таких зображень

НАСИП – штучне земляне підвищення (насипана куча чого-небудь)

НАХИЛ – положення тіла під кутом між горизонтальною і вертикальною площинами

НАЧЕРК – малюнок, що намічає лише найважливіші, загальні риси того, що повинно бути зображено

НЕВИЗНАЧЕНИЙ – точно не встановлений

О

ОБВОДИТИ – окреслювати що-небудь замкненою лінією

ОБ'ЄКТ – пізнавана дійсність, що існує поза свідомістю людини і незалежно від неї. Предмет наукового дослідження, спеціальної зацікавленості, компетенції. Предмет, що розглядається, з метою його використання за призначенням

ОБМІРЮВАТИ – вимірювати, визначати розмір, величину чого-небудь

ОБРАЗ – зовнішній вигляд. Зображення зовнішнього вигляду чого -, кого-небудь (наприклад, геометричний образ)

ОБРИС – загальний вигляд предмета, окреслений лінією, що обмежує його поверхню. Контур, силует

ОВАЛ – фігура, що має вигляд витягнутого кола (обрис чого-небудь, що нагадує таку фігуру)

ОДНОВИМІРНИЙ – який має один вимір (однобокий, примітивний)

ОКРЕСЛЮВАТИ – обводити що-небудь лінією, рисками. Проводити криву лінію, описувати коло. Чітко визначити що-небудь

ОКРУГЛИЙ – який має заокруглені форми, лінії, обриси

ОКТАЕДР – тіло, що обмежене вісьмома трикутними площинами (восьмигранник)

ОКТАНТ – восьма частина простору, поділеного трьома площинами, що перетинаються між собою під прямим кутом

ОРТ – вектор, абсолютна величина якого дорівнює одиниці (одиничний вектор)

П

ПАНОРАМА – вид на місцевість згори, на далекий простір. Видовище чого-небудь на великому широкому просторі

ПАПІР – матеріал для писання, друку, малювання, виготовлений з ганчіркової, деревної та іншої маси

ПАРАБОЛА – незамкнута крива, кожна точка якої однаково віддалена від однієї точки (фокуса) та однієї прямої (директриси)

ПАРАБОЛОЇД – поверхня, утворена рухом параболи, вершина якої переміщується по іншій нерухомій параболі, чия площина перпендикулярна площині рухомої параболи

ПАРАЛЕЛОГРАМ – чотирикутник, протилежні сторони якого попарно рівні та паралельні між собою

ПАРАЛЕЛЬ – лінія або площина, що на всьому просторі є рівновіддаленою від іншої лінії або площини і ніколи з нею не перетинається (лінія на будь-якій поверхні обертання, що утворюється за допомогою руху точки, яка належить твірній поверхні, при її обертанні навколо осі)

ПЕРЕКРИТТЯ – частина споруди, будівлі, яка обмежує приміщення зверху чи знизу або віддаляє поверхи один від одного

ПЕРЕРІЗ – місце перетину, розрізу чого-небудь. Плоска геометрична фігура, утворена в місці перетину якогось тіла площиною

ПЕРЕСІЧКА – перегородка

ПЕРСПЕКТИВА – спосіб зображення (центральна проекція) на площині або на кривій поверхні об’ємних предметів такими, якими ми бачимо їх з певної точки спостереження (точки зору)

ПІДЛОГА – дощане, паркетне і т. ін. покриття у приміщенні, по якому ходять (те саме, що долівка)

ПІРАМІДА – багатогранник, основа якого являє собою багатокутник, а бічні грані - трикутники, що мають спільну вершину

ПЛАНІМЕТРІЯ – розділ елементарної геометрії, який вивчає властивості фігур, що лежать на площині

ПЛАНШЕТ – дошка з натягнутим на неї папером, на який наносять план місцевості під час знімання, картину тощо

ПЛОЩИНА – велика ділянка рівної поверхні землі. Рівна, плоска поверхня без підвищень і заглиблень (двовимірний геометричний образ)

ПОВЕРХНЯ – верхній, зовнішній бік чого-небудь. Межа, що відділяє геометричне тіло від зовнішнього простору або від іншого тіла. Слід руху якої-небудь лінії в просторі (двовимірний геометричний образ)

ПОВНОМАСШТАБНИЙ – виготовлений у масштабі оригіналу

ПОЗНАЧКА – мітка, знак (наприклад, числова позначка)

ПОКРІВЛЯ – те, чим покривається верхня частина будівлі

ПОКРОВ – верхній шар, який покриває що-небудь

ПОЛОЖЕННЯ – місце знаходження чого-, кого-небудь у просторі. Розміщення тіла або його частин (поза)

ПОЛЮС – один із крайніх пунктів, протилежних один одному. Точка перетину уявної осі обертання Землі з її поверхнею

ПОМАЛЮВАТИ – покрити фарбою різних кольорів. Покрити лініями, написами

ПОХИЛИЙ – який відхиляється від вертикального або горизонтального положення

ПРАВИЛЬНИЙ об’єкт – який відповідає дійсності, істинний, який відповідає встановленим правилам, нормам. Який задовольняє правилам пропорції та симетрії (правильний многогранник, правильний многокутник)

ПРИЗМА – багатогранник із двома основами – багатокутниками та бічними гранями (всі твірні – паралельні між собою)

ПРОЕКТИВНА ГЕОМЕТРІЯ – розділ геометрії, в якому вивчаються властивості фігур, що не змінюється при перетвореннях, при яких прямі переходять у прямі тощо

ПРОЕКТНЕ ЗАВДАННЯ – проектно-технічний документ, що є результатом першої стадії проектування споруд

ПРОЕКТУВАТИ – складати, розробляти проект. Зображувати на площині яку-небудь просторову фігуру або технічне завдання

ПРОМІЛЕ – одна тисячна частка числа, десята частка відсотку (проценту)

ПРОМІНЬ – прямі лінії, що розходяться врізнобіч із однієї точки (пучок прямих) – у центральному способі проекціювання; сонячні промені у паралельному способі проекціювання паралельні між собою

ПРОПОРЦІЯ – співвідношення частин цілого між собою

ПРОРІЗ – просвіт, щілина у чому-небудь. Отвір у споруді, призначений для вікон, дверей і т. ін.

ПРЯМОКУТНИК – чотирикутник, у якого всі кути прямі, а сторони попарно паралельні між собою

ПУНКТИР – переривчата лінія, що утворена точками або короткими рисками

ПУСТОТІЛИЙ – який має всередині пустоту, порожнину

Р

РАДІАН – центральний кут, довжина дуги якого дорівнює радіусові цієї дуги

РАДІУС – відрізок прямої, що сполучає будь-яку точку кола або сфери з центром

РАКУРС – кут зору, певний погляд, особливість явища

РЕЙСФЕДЕР – креслярський інструмент для проведення ліній тушшю або чорнилами

РЕЙСШИНА – креслярський інструмент у вигляді великої лінійки з нерухомою і рухомою поперечками для проведення паралельних ліній

РЕЛЬЄФ – сукупність нерівностей на земній поверхні. Скульптурне зображення на площині

РІВЕНЬ – умовна горизонтальна лінія або площина, що служить межею висоти, яку має або на якій міститься що -, хто-небудь

РІВНОБЕДРЕНИЙ (рівнобічний) трикутник – який має рівні бокові сторони

РІВНОКУТНИЙ трикутник – у якого рівні кути

РОЗГОРТКА – це фігура на площині, у яку розгортається поверхня будь-якої геометричної фігури за допомогою розрізу уздовж її твірної лінії

С

СЕКТОР – частина круга, обмежена дугою і двома радіусами. Частина певної площі, ділянки, району

СИНУСОЇДА – хвиляста крива лінія, що графічно зображає зміни синуса залежно від зміни кута

СІЧНА – пряма, яка перетинає криву в двох чи більше точках

СМУГА – видовжена, обмежена чим-небудь частина будь-якої поверхні, простору

СТАЛИЙ – який не змінюється, зберігає той сам склад, розмір, форму, величину і т. ін., тобто незмінний

СТРОФОЇДА – плоска крива третього порядку

СФЕРА – замкнута поверхня, всі точки якої рівновіддалені від центра, предмет, що має форму кулі

СФЕРОЇД – поверхня, що утворюється при обертанні еліпса навколо його малої осі (сплющена куля, поверхня такої кулі)

Т

ТАНГЕНС – одна з тригонометричних функцій гострого кута, що дорівнює в прямокутному трикутникові відношенню катета, протилежного даному кутові, до катета, прилежного до нього

ТАНГЕНСОЇДА – крива лінія, що графічно відображає зміни тангенса залежно від зміни кута

ТІЛО – матерія, речовина, що так чи інакше обмежена в просторі. Окремий предмет у просторі. Частина простору, обмежена з усіх сторін. Те, що має довжину, ширину, висоту

ТІНЬ – темний відбиток на чому-небудь від предмета, освітленого з протилежного боку

ТРАЄКТОРІЯ – безперервна лінія, яку описує тіло або його точка під час руху

ТРИСЕКЦІЯ – поділ на три частини. Трисекція кута. Задача на поділ довільного кута на три рівні частини (кути) циркулем і лінійкою

У

УБІЧ – грань, косогір

УРІЗОК – частина чого-небудь (відрізок)

УХИЛ (похил) – взагалі похила частина шляху

Ф

ФАСАД головний – зовнішній, лицьовий бік будівлі, що звичайно виходить на вулицю

ФІГУРА – частина площини, обмежена замкненою лінією, а також сукупність певним чином розташованих точок, ліній, поверхонь і т. ін.

ФОРМА – обриси, контури, зовнішні межі предмета, що визначають його зовнішній вигляд

ФОРМАТ – розмір аркуша, газети, книги, ілюстрації (розмір чого-небудь)

ФОРМУЛА – загальне коротке визначення будь-якого положення, відношення, закону і т. ін., яке можна застосувати до відповідного конкретного випадку

ФРОНТАЛЬ – пряма, що паралельна до фронтальної площини проекцій

ФУНДАМЕНТ – основа, звичайно підземна або підвідна, з каміння, бетону і т. ін., на якій встановлюють будинки, конструкції, машини

Х

ХОРДА – пряма, що сполучає дві будь-які точки кривої лінії (кола) або поверхні

ХРАМ – будівля, де відбувається богослужіння, релігійні обряди

Ц

ЦЕНТР – точка перетину уявних осей, ліній у фігурі

ЦЕНТР ОБЕРТАННЯ – точка, довкола якої обертаються усі інші точки тіла або системи, що беруть участь в обертальному русі або русі по колу

ЦИКЛОЇДА – крива лінія, яка описана точкою кола, що котиться без ковзання по прямій лінії

ЦИЛІНДР обертання – геометричне тіло, що утворюється обертанням прямокутника навколо одного з його боків

ЦИЛІНДРОЇД – тіло, обмежене циліндричною поверхнею, перпендикулярною до неї площиною і поверхнею, яку кожний перпендикуляр до основи циліндроїда перетинає в одній точці; одна з трьох поверхонь Е.Каталана, у якої обидві напрямні є криві лінії

ЦИРКУЛЬ – креслярський інструмент, що складається з двох ніжок, з’єднаних на одному кінці шарніром для роз'єму їх на потрібну відстань, використовується для викреслювання кіл і вимірювання довжини ліній

ЦОКОЛЬ – нижня частина зовнішньої стіни будь - якої будови, що безпосередньо лежить на фундаменті і дещо виступає вперед порівняно з частиною, розташованою вище

Ш

ШЕСТИГРАННИК – геометричне тіло, яке має шість граней

ШИРИНА – протяжність чого-небудь у поперечнику

ШРИФТ – графічний рисунок креслення літер і знаків, що складають єдину стилістичну і композиційну систему (відбитки рукописних або друкарських літер)

ШТАНГЕНЦИРКУЛЬ – інструмент для лінійних вимірювань будь - яких невеликих деталей, виробів

ШТРИХОВИЙ рисунок – виконаний окремими лініями – штрихами

Я

ЯРУС – однотипна частина будівлі, предмета або пристрою, яка повторюється по вертикалі

Примітка: *надані тлумачення термінів, головним чином, скорочені та стосуються інженерної графіки, математики та галузі будівництва і деяких геометричних понять*

Навчальне видання

Перпері Алла Олександрівна
Бредньова Віра Петрівна
Думанська Вероніка Валентинівна
Марченко Валентин Сергійович

ІНЖЕНЕРНА ГРАФІКА
Навчальний посібник з курсу нарисної геометрії

Підписано до друку
Формат 60x84/8 Папір офсетний Гарнітура Times
Друк-різографія Ум.-друк.арк.
Наклад 50 прим.

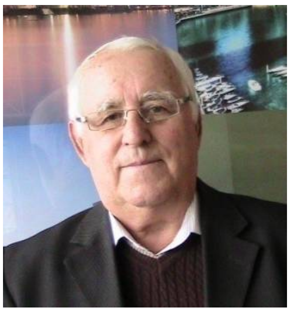
Видавець і виготовлювач:
Одеська державна академія будівництва та архітектури
Свідоцтво ДК №4515 від 01.04.2013 р.
Україна, 65029, м. Одеса, вул.. Дідріхсона, 4
Тел.: (048) 729-85-34, e-mail: rio@ogasa.org.ua

Надруковано з готового оригінал-макету
В редакційно-видавничому відділі ОДАБА

Перпері Алла Олександрівна, кандидат технічних наук, завідувач кафедри нарисної геометрії та інженерної графіки ОДАБА, викладає графічні дисципліни в ОДАБА з 2006 р., в цілому має понад 100 наукових та науково-методичних робіт. Сучасний напрям наукових досліджень полягає у вдосконаленні методології та методики викладання графічних дисциплін для студентів будівельних та архітектурних спеціальностей на основі компетентісного підходу та в математичному моделюванні та еволюційній оптимізації технологічних процесів із зв'язаними операціями в САПР

Бредньова Віра Петрівна, кандидат технічних наук, професор кафедри нарисної геометрії та інженерної графіки ОДАБА, викладає графічні дисципліни в ОДАБА з 1983 р., в цілому має понад 180 наукових та науково-методичних робіт. Сучасний напрям наукових досліджень полягає в удосконаленні методології та методики викладання графічних дисциплін для студентів будівельних та архітектурних спеціальностей на основі компетентісного підходу

Думанська Вероніка Валентинівна, кандидат технічних наук, доцент кафедри нарисної геометрії та інженерної графіки ОДАБА, викладає графічні дисципліни в ОДАБА з 2003 р., в цілому має понад 40 наукових та науково-методичних робіт. Основний сучасний напрям наукових досліджень полягає в дослідженні ефективності впливу використання наочних дидактичних матеріалів на успішність студентів на заняттях з нарисної геометрії та інженерної графіки та розробці і дослідженні нових конструктивно-технологічних рішень покриттів з фігурних елементів мостіння зі зміненою геометричною формою основи



Марченко Валентин Сергійович, кандидат технічних наук, професор кафедри нарисної геометрії та інженерної графіки ОДАБА, викладає графічні дисципліни в ОДАБА з 1975 р., в цілому має понад 115 наукових та науково-методичних робіт. Основний сучасний напрям наукових досліджень полягає в удосконаленні методології викладання графічних дисциплін для студентів будівельних спеціальностей на базі компетентісного підходу та дослідженні нових конструктивно-технологічних рішень покриттів з фігурних елементів мостіння зі зміненою геометричною формою основи