

Суханов В.Г. (Одесская Государственная Академия строительства и архитектуры, г. Одесса)

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ ИСТОРИЧЕСКОЙ ЗАСТРОЙКИ НА ОСНОВЕ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ МОДЕЛИ

Предложен общий алгоритм экспериментально-теоретических исследований сложных строительных конструкций зданий и сооружений исторической застройки, результатом которых является построение апостериорной комбинированной модели.

Постановка проблемы. Создание имитационной нелинейной конечно-элементной модели строительной конструкции, механические характеристики элементов которой варьируются в каждой реализации.

Анализ последних исследований. На всех этапах существования конструкции проявляются дефекты, ошибки и недостатки самого различного рода. В том числе это случайные погрешности измерений, ошибки, связанные с исследованием выборок ограниченного (недостаточного) объема или даже единичных образцов конструкции, ошибки допущений, гипотез округлений и т.д.

Наиболее существенны ошибки, вносимые исследователем, относящиеся к категории систематических и способные привести исследование к существенно искаженным результатам. Это - ложные или недостаточно строгие априорные представления об объекте исследований, чрезмерная его упрощенность или идеализация при построении модели, ошибки квантования и интерпретации результатов обследования и эксперимента и т.д.

На последнем этапе исследований решается задача идентификации, формулируемая как построение оптимальной, в некотором смысле, модели по результатам наблюдения за входными и выходными переменными исследуемой системы. В общем случае, в зависимости от априорной информации об объекте исследования, решается задача идентификации в широком и узком смыслах.

Идентификация в широком смысле - это определение по выходному и входному сигналам системы из определенного класса систем, которым эквивалентна испытываемая система. Очевидно, класс

рассматриваемых систем может быть ограничен соответствующей априорной информацией, которая в задачах исследования архитектурно-строительных конструкций достаточно велика. В этих условиях решается задача идентификации в узком смысле – оценивание параметров модели заданной структуры по результатам обследования или наблюдения в эксперименте входных и выходных сигналов объекта исследований, т.е. параметрическая идентификация. Входными сигналами при обследованиях и испытаниях физической модели конструкции являются сведения о воздействии на модель, а выходными – результаты измерений.

В теории идентификации принято различать задачи оценивания собственно параметров модели и оценивания состояний системы. Учитывая, однако, общность используемого аппарата, в настоящей работе к категории параметров отнесены все оцениваемые факторы, независимо от их физической природы.

Методы теории идентификации находят применение в самых различных областях науки и техники, системах управления, ядерной энергетике, авиации и космонавтике, биологии и медицине, социально-экономических системах и т.д. Приложение этих методов к задачам обследования архитектурно-строительных конструкций зданий и сооружений исторической застройки, с целью создания комплексной многокритериальной системы контроля и обеспечения надежности и долговечности представляется актуальным и целесообразным, т.к. комплекс указанных выше проблем и вопросов в настоящее время является практически нерешенным.

В большинстве случаев экспериментальные и теоретические исследования архитектурно-строительной конструкции ведутся по традиционной схеме, при которой эффективность эксперимента невелика, а расчетные модели недостаточно полно учитывают специфику работы конструкции под нагрузкой. При этом, с увеличением сложности рассматриваемой конструкции в условиях ограниченного количества измерений растут потери экспериментальной информации. К особенно сложным объектам могут быть отнесены здания и сооружения исторической застройки, в частности, на просадочных грунтах, что характерно для Одесского региона. При реконструкции и реставрации подобных объектов в соответствии с требованиями норм (РНиП, ДБН, СНиП, ASTM, RILEM и др.) должны быть предусмотрены требования относительно надежности, капитальности, долговечности и заданных условий эксплуатации как всего здания

(сооружения), так и отдельных его элементов, соединений конструкций и оснований. Это достигается выбором материалов и конструкций, специальными защитными мерами по обеспечению огнестойкости, морозостойкости, коррозионной стойкости, защиты от конденсационного увлажнения и гниения, отвода воды, проветривания и т. п.

Постановка задачи. Цель предлагаемой статьи – определение путей реализации аппарата имитационного моделирования строительных конструкций зданий исторической застройки, для достижения которой должны быть решены задачи: оценивание параметров модели по результатам эксперимента (параметрическая идентификация), применение комбинированных моделей строительных конструкций, разработка общего алгоритма экспериментально-теоретических исследований сложных строительных конструкций, построение адекватной апостериорной комбинированной модели.

Основная часть. При разработке проектов реконструкции и реставрации зданий должны предусматриваться соответственно требованиям норм меры по уменьшению отрицательного влияния факторов, обусловленных производством работ, например концентрации напряжения в местах резкого изменения характеристик материалов стен, перекрытий, грунтов основания, динамических, вибрационных нагрузок и т. п.

Требования норм сводятся к тому, чтобы величины усилий, напряжений, деформаций, перемещений, раскрытия трещин, а также величины усилий от других факторов и воздействий не превышали предельных значений, установленных этими нормами. При этом, в расчетах должны учитываться вероятные неблагоприятные характеристики материалов и возможные невыгодные величины и сочетания нагрузок при воздействиях, а также условия эксплуатации и особенности работы конструкций и оснований. Должны быть соблюдены все требования нормативных документов, стандартов, технических условий, предъявляемые к качеству материалов, изделий, производству работ, а также к эксплуатации зданий и сооружений.

Достижение конструкциями предельных состояний, установленных нормами, не представляет опасности для людей, но служит пределом, по достижении которого здание (сооружение) не может больше использоваться по своему назначению без проведения специальных восстановительных работ. Чтобы полнее учесть особенности действительной работы материалов, элементов и соединений конструкций и оснований, а также зданий (сооружений) в целом, при

расчетах вводится коэффициент условий работы. Для компенсации недостаточной изученности работы и предельных состояний отдельных видов конструкций и оснований, вводятся коэффициенты надежности, коэффициент неблагоприятных сочетаний нагрузок и воздействий и др., численные значения которых установлены нормативными документами по проектированию конструкций, оснований, зданий и сооружений.

В соответствии с правилами учета степени ответственности зданий и сооружений при проектировании строительных конструкций определяется размер материального и социального ущерба, возможного при достижении конструкциями предельных состояний. Этот параметр – степень ответственности зданий и сооружений учитывается при помощи коэффициента надежности, определенного еще согласно СТ СЭВ 384-76. На этот коэффициент надежности по назначению γ_n следует делить предельные значения несущей способности, расчетные значения сопротивлений, предельные значения деформаций и раскрытия трещин или умножать расчетные значения нагрузок, усилий или иных воздействий. Значения коэффициента надежности по назначению γ_n устанавливаются в зависимости от класса ответственности зданий и сооружений по специальной таблице (приложение к постановлению Госстроя СССР от 29 июля 1982 г. № 196). В соответствии с этой таблицей здания и сооружения исторической застройки как объекты, имеющие социальное значение, относятся к классу I и к ним применяется коэффициент надежности по назначению 1,0.

Учет всех упомянутых факторов сопряжен с многими трудностями, частными задачами объективной оценки местных условий; именно вследствие этого возникают дефекты в проектах и при производстве работ, что в конечном итоге приводит к ускоренному разрушению зданий и сооружений.

В литературе [1] дана классификация и анализируются причины отказов строительных конструкции и возникновения дефектов на стадиях проекта реконструкции, реставрации, проведения реставрационно-ремонтных работ и в процессе эксплуатации. Причин этих множество: отсутствие надежных архивных материалов, ошибки при проведении предыдущих реставрационных работ, несовершенство применяемых новых конструкций и норм проектирования, неправильное конструирование, недостаточный учет специфики

последующего использования зданий исторической застройки, применение несоответствующих материалов.

При разработке проектов реконструкции и реставрации зданий в недостаточной степени изучаются, разрабатываются и учитываются эксплуатационные требования к ним.

Вследствие множества факторов, воздействующих на сооружения, а также множества их комбинаций в реальных условиях службы зданий и сооружений неизбежны отдельные отказы, которые должны быть своевременно выявлены и устранены в процессе эксплуатации.

Усилия реставраторов, проектировщиков, строителей и эксплуатационников постоянно должны быть направлены на всестороннее и рациональное обеспечение главных четырех групп качеств любого сооружения:

архитектурных — здания должны наилучшим образом отвечать положению в застройке как объект обзора их людьми, поэтому внешний их вид должен быть всегда соответствующим назначению, расположению в застройке и т. п.;

функциональных — здания и сооружения должны наилучшим образом отвечать своему назначению, а поэтому периодически нужно производить их перепланировку, модернизацию и реконструкцию с учетом архитектурно-эстетических требований;

технических — здания и сооружения должны успешно противостоять внешним и внутренним воздействиям, быть ремонтно-пригодными; поэтому необходимо следить за техническим состоянием конструкций, производить их защиту, усиление, а при необходимости — замену;

экономических — реконструкция, реставрация и эксплуатация зданий должны осуществляться с оптимальными затратами сил и средств.

Исходя из опыта идентификации строительных объектов и разработки корректных моделей существования конструкции в реальном средовом пространстве, представляется целесообразным определять величину коэффициента корреляции с учетом ограничений, полученных неким обобщенным критерием (на основе многокритериального анализа), который обеспечивает дополнительную определенность корреляционных матриц и работоспособность алгоритма.

В имитационной модели может рассматриваться нелинейная конечно-элементная модель строительной конструкции (с учетом

метода суперэлементов), механические характеристики элементов которой варьируются в каждой реализации.

Аппарат имитационного моделирования строительных конструкций зданий исторической застройки, которые находятся в напряженном состоянии, может быть реализован в различных программах (LIRA, SCAD, РАПСОДИЯ и др.). Имитационное моделирование такого типа позволяет не только подробно изучать поведение конструкции под нагрузкой, но в ряде случаев отказаться от физического эксперимента, заменяя его численными исследованиями на ЭВМ. В то же время, для исследования сложных систем, в имитационных моделях которых неминуема идеализация предельных условий, нагрузок, условий взаимодействия элементов системы и др., целесообразно использование комбинированных моделей, которые построены на синтезе теоретической и экспериментальной информации об объекте исследований.

Кроме того, целесообразно провести оценивание параметров модели по результатам эксперимента – так называемая параметрическая идентификация. Параметрической идентификации посвящены работы международной организации по автоматическому управлению ИФАК (Работы Л.Загде, П. Ейкхофа и др.). Учитывая аппарат, который используется к оцениванию, следует указать и работы, в которых разработана проблема получения статистических оценок параметров модели, работы А. Альберта, Н. Дрейпера, Г. Смита, Ю.В. Линника, Ф. Мостеллера, Дж. Тьюки, Дж. Себера, В. Стрейча, Р. Фишера, Я.З. Щепкина, Г. Шеф, А.А. Дыховичного и др.

При реконструкции и реставрации строительных конструкций исторических зданий и сооружений в условиях, когда информация об объекте ограничена, а испытание часто сводится к исследованию единичной экспериментальной реализации (выемка кернов, имитационные модели и т.п.), оптимальными являются предложенный К. Гауссом метод наименьших квадратов (МНК) или обобщенный метод наименьших квадратов (УМНК) – оценки Гаусса-Маркова. Могут быть применены общие принципы МНК и УМНК и их модификации, в том числе при наличии так называемых идентифицирующих ограничений, в виде которых может быть учтена дополнительная априорная информация (данные архивных материалов, предварительные ориентационные статистические расчеты). Оценка МНК при разнородных измерениях может быть построена на предшествующей обработке результатов однородных измерений (архивные данные о предыдущих реставрациях и реконструкциях) и

введении на следующем этапе в объединенную систему условных уравнений нормируемой ковариационной матрицы:

$$K = \text{diag} \{ \hat{\sigma}_i^2 \}.$$

Элементами такой матрицы являются оценки дисперсий шума $\hat{\sigma}_i^2$ в каждой группе измерений, которые найдены на первом этапе оценивания (результаты оценивания должны быть получены из многокритериального анализа по предлагаемой методике). Численная реализация МНК осложняется недостаточной обусловленностью матриц систем нормальных уравнений. Проблеме получения стойких решений посвящены работы И. Лоусона, Р. Херсона, А.М. Тихонова, В.Я. Арсеньева, Дж. Райса, А.А. Дыховичного и др. В качестве основного аппарата получения оценок МНК может быть рекомендовано ортогональное преобразование Хаусхольдера, которое сводит задачу $A X = Y$ к системе

$$R X = Q Y,$$

где R – верхняя треугольная матрица,

Q – ортогональная матрица, такая, что $Q A = R$.

Рядом авторов рассмотрены комбинированные модели строительных конструкций, которые образованы путем введения в априорную детерминированную модель оценок ряда параметров, которые получены МНК или УМНК по результатам эксперимента (здесь особенно следует обратить внимание на неразрушающие методы контроля и испытания строительных конструкций и материалов, что нередко является единственно возможным экспериментальным способом для зданий и сооружений исторической застройки). Эти параметры прежде всего позволяют согласовать результаты архивных данных, расчета и эксперимента, обнаружить и оценить факторы, которые привели к их расхождению, устранить систематические ошибки модели. Ко второй категории параметров, которые подлежат оцениванию, относятся факторы, которые не могут быть непосредственно измерены в процессе эксперимента.

Векторы экспериментальных данных распределены на последовательность Y_0 , которая используется для оценивания

параметров модели, и проверочную – Y_n , которая используется для проверки качества (адекватность) модели.

Априорная детерминированная модель разрешает в границах линейной постановки задачи выразить отклик конструкции на внешние силовые действия P (например, перемещение Y_p , соответствующие найденным в эксперименте Y):

$$Y_p = A P,$$

где A – матрица влияния.

При этом $Y_p \neq Y$, или

$$Y = Y_p + \varepsilon,$$

где ε – вектор ошибок.

Если $E(\varepsilon) = 0$ ($\varepsilon \approx N(0, 1\sigma^2)$), вектор ε представляет собой шум, флуктуации эксперимента, ошибки измерений и др. и сомнений в априорной детерминированной модели не возникает. Но, если $E(\varepsilon) \neq 0$ (ошибки имеют смещение), необходимо признать априорную модель неадекватной. Причину расхождения можно искать прежде всего в наличии силовых факторов (параметры состояния), которые не были учтены в априорной модели, в ошибочном определении жесткости элементов системы (собственные параметры модели), недостаточно корректном выборе конечных элементов [8]. При этом задача принимает вид:

$$Y = Y_p + BX + \varepsilon,$$

где: X – вектор неизвестных сил,

B – матрица влияния, которую можно построить с помощью априорной модели. Для решения такой задачи можно применить методы параметрической идентификации (МНК, УМНК и др.).

Сформированы условные уравнения для получения оценок силовых параметров X

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} \vdots 0 & X & Y_0 & W_{p1} & \\ \hline W \vdots \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \hline \vdots -1 & X_n & 0_1 & W_{p2} & \end{array} = \dots$$

где $W = \begin{pmatrix} W_1 \\ \dots \\ W_2 \end{pmatrix}$ — $m \times n$ - матрица перемещений в направления

- измерений Y_i от сил X_{j-1} ,
- W_1 и W_2 — $z \times n$ - и $(m-z) \times n$ -блоки матрицы W ,
- W_{p1} и W_{p2} — z - и $(m-z)$ - векторы тех же самых перемещений от внешних нагрузок,
- X — n -вектор неизвестных сил X_j ,
- X_n — $(m-z)$ - вектор расчетных аналогов измерений проверочной последовательности Y_n ,
- Y_0 — z -вектор измерений, которые вошли в обучающую последовательность,
- 0 — нулевая $z \times (m-z)$ -матрица,
- I — единичная $(m-z) \times (m-z)$ -матрица,
- 0_1 — нулевой $(m-z)$ -вектор.

Структура условных уравнений, которые включают большой нулевой блок 0 , определяет последовательность получения решения. Прежде всего находятся МНК оценки X :

$$\hat{X} = (W_1^T K_0^{-1} W_1)^{-1} K_0^{-1} W_1^T (K_0 W_p)$$

и

$$\text{cov } X = (W_1^T K_0^{-1} W_1)^{-1}$$

затем

$$\hat{K}_n = W_{p2} + W_2 X$$

и

$$\text{cov } \hat{X}_n = W_2 (W_1^T K_0^{-1} W_1)^{-1} W_2^T,$$

где K_0 – ковариационная матрица вектора Y_0 .

На качество оценок существенно влияет дополнительная априорная информация (результаты обмеров, статических испытаний, обследований, предшествующих ремонтов, реставраций и реконструкций), учитываемая в идентифицирующих ограничениях, которыми могут быть дополнены системы условных уравнений.

Изменение основной системы формально не влияет на величины оценок, однако, изменяются размеры матриц и их обусловленность, которая существенно влияет на трудоемкость обсчета и, как следствие, на точность решения. Таким путем можно получить условные уравнения для оценок параметров жесткости элементов системы. В этом случае, оцениваемые параметры входят в состав элементов матриц A и B , задача существенно усложняется и в этом случае решается двумя этапами, на первом из которых находятся оценки перемещений узлов, которые расположены на контакте системы с областью, жесткость которой оценивается. На втором этапе оцениваются обусловленные коэффициенты пропорциональности к базовым значениям жесткости области. Тем не менее, можно показать, что некорректность задачи, вероятность возникновения существенных ошибок и трудоемкость получения решений делают этот подход нерациональным для практического использования. Целесообразно искать оценки силовых факторов, которые характеризуют взаимодействие системы с зоной напряжений и деформаций, а потом подробно анализировать напряженное и деформированное состояние этой зоны. При проверке адекватности полученной комбинированной модели решаются две задачи: проверяются априорные предпосылки относительно распределения помех (ошибок) и их среднее значение; сравниваются оценки элементов проверочной последовательности X_n с результатами эксперимента Y_n .

С учетом структуры условных уравнений условие $\hat{X}_n = Y_n$ в случае адекватной модели приводит к системе равенств:

$$W_2 \hat{X} = Y_n - Wp_2,$$

которые можно рассматривать как линейные идентифицирующие ограничения в системе условных уравнений. Тогда задача проверки адекватности модели получает вид - проверить гипотезу:

$$H: W_2 \hat{X} = Y_n - Wp_2$$

для модели

$$W_1 X = Y_0 - Wp_1 + e,$$

где e – вектор невязок.

Решая задачу без учета идентифицирующих ограничений, которыми является вторая группа условных уравнений, и с их учетом, и получая соответствующие оценки \hat{X} и \hat{X}_H , можно найти суммы квадратов невязок (окончательные суммы квадратов):

$$RSS = (Y_1 - W_1 \hat{X})^T (Y_1 - W_1 \hat{X})$$

и

$$RSS_H = (Y_1 - W_1 \hat{X}_H)^T (Y_1 - W_1 \hat{X}_H)$$

и определить по Дж. Себеру статистику

$$F = \frac{RSS_H - RSS}{RSS} \cdot \frac{z - n}{m - z},$$

которая имеет F -распределение Фишера-Снедекора с $m-z$ и $z-n$ степенями свободы.

Если гипотеза H верная, расчетное значение F должно быть меньше меньше, чем $F\alpha(k_1, k_2)$ для соответствующего уровня значимости α и степеней свободы k_1 и k_2 и предположение об адекватности модели не может быть отброшено. Аналогичный критерий адекватности может быть построен для общего случая разнородных измерений.

Таким путем может быть предложен общий алгоритм экспериментально-теоретических исследований сложных строительно-конструктивных конструкций, результатом которых является построение адекватной апостериорной комбинированной модели.

Необходимо также произвести оценивание параметров взаимодействия сооружения с неравномерно деформируемым основанием по результатам экспериментальных наблюдений за деформациями зданий и сооружений исторической застройки в Одесском регионе. Подобная задача возникает при натуральных исследованиях зданий и сооружений на действие неравномерных деформаций оснований, если реактивное сопротивление этих оснований, которое полностью определяет напряженное состояние сооружения, не может быть с необходимой точностью измерено экспериментально.

Для уменьшения количества параметров, которые должны быть оценены, реактивное сопротивление оснований может быть определено как сумма априорных значений (в отдельных случаях нулевых) с учетом неравномерных деформаций основания во время исследования или эксперимента. Увеличение деформаций может быть аппроксимировано в направлении продольной оси фундамента полиномами вида:

$$\sum X_k a \zeta^b \exp(-10\zeta),$$

где ζ – относительная ордината точки подошвы фундамента,

a и b – коэффициенты,

X_k – параметр эпюры оцениваемого сопротивления.

Условные уравнения связывают искомые параметры с результатами экспериментальных измерений. Расчет выполняется для основной системы, которая создается путем устройства на уровне подошвы фундаментов закреплений, которые противодействуют перемещениям сооружения как жесткого тела. Поскольку искомые добавки реактивного сопротивления должны быть самоуравновешенными, система условных уравнений дополняется соответствующими идентифицирующими ограничениями.

Использование комбинированной основной системы позволяет улучшить обусловленность матриц и таким образом улучшить решение.

Таким образом, с использованием идентификационных моделей, построенных на основе многокритериального оценочного анализа, может быть решена научно-техническая проблема синтеза экспериментальной и теоретической информации и построения на его основе адекватных моделей сложных строительных конструкций зданий и сооружений исторической застройки. Универсальность предлагаемого подхода, который не связан с конкретным видом исследуемых конструкций и структурой априорных моделей, базируется на широком применении современных методов многокритериального анализа, строительной механики и средств вычислительной техники. Метод оценивания параметров комбинированных моделей сложных строительных конструкций позволяет повысить эффективность эксперимента, уменьшить влияние систематических ошибок, систематизировать процесс интерпретации его результатов, обеспечить получение в результате исследований адекватной математической модели – носителя наиболее полной информации об объекте исследований.

Экспериментальные исследования, которые являются необходимым источником информации при изучении сложных строительных конструкций, а во многих случаях и главным критерием достоверности теоретических положений, полностью базируются на априорных моделях объекта исследований.

Эффективная детерминированная модель поведения строительной конструкции на всех стадиях её существования (вплоть до разрушения) может быть построена на упруго-пластической схеме деформирования материала с ограничением величины деформаций ползучести с учетом деградации материала под действием условий внешней среды.

При создании моделей зданий и сооружений исторической застройки, которые возведены в сложных инженерно-геологических условиях и испытывающих воздействие неравномерных деформаций основания, вызванных просадкой или выработками, целесообразно распределить задачу на два этапа: построение конечноэлементной модели здания, как многоуровневой иерархической системы суперэлементов; решение существенно нелинейной задачи о взаимодействии здания, модель которой представлена его матрицей жесткости, с неравномерно деформируемым основанием.

Выводы

1. Эффективным средством исследования сложных строительных конструкций зданий исторической застройки может являться аппарат имитационного моделирования, применение которого основано на сочетании алгоритмов детерминированного моделирования строительных конструкций и методов моделирования случайных полей, позволяющих воссоздать (или создать) на ЭВМ случайный характер результатов эксперимента.
2. Проверка качества (адекватности) полученной комбинированной апостериорной модели выполняется путем анализа вектора отклонений и остаточных сумм квадратов, найденных с учетом идентифицирующих ограничений в виде условий равенства измерений, включенных в проверочную последовательность, и оценок их расчетных аналогов.
3. Предложенный подход может быть эффективно применен к решению задачи о взаимодействии сооружения с основанием для оценивания параметров реактивного отпора основания по результатам наблюдений за деформациями наземной части сооружения.
4. Достоверность предлагаемых подходов подтверждается использованием общепринятых теоретических предпосылок и допущений при формировании моделей и не опровергается результатами известных экспериментальных исследований зданий и сооружений исторической застройки.

Литература

1. Азгальдов Г.Г. Квалиметрия в архитектурно-строительном проектировании. – М.: Стройиздат, 1989. – 272 с.
2. Барлоу Р., Прошан Ф. Статистическая теория надежности и испытания на безотказность: пер. с англ. И.А.Ушакова. – М.: Наука, 1985.
3. Белов Ю.А., Донченко В.С. и др. Проверка адекватности математической модели реальному объекту по корреляционным функциям выходных количественных параметров. – К.: Издв-во КГУ, 1979. – 20 с.
4. Гаврилова Т.А. Червинская К.Р. Извлечение и структурирование знаний для экспертных систем. – М.: Радио и связь, 1992. – 176 с.
5. Е.Переверзев, А. Алпатов, Ю.Даниев, И.Новак. Надёжность технических систем. – Днепропетровск, 2002. – 396 с.
6. Нейлор К. Как построить свою экспертную систему: Пер. с англ. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 286 с.
7. Саванов В.А. Параметрическая идентификация характеристик случайных процессов и полей //Вопросы кибернетики. – 1981. - № 84. – С.90-123.
8. Соболев Д.Н., Ким В.Е. Вероятностный расчет конструкций методом конечного элемента //Строительная механика и расчет сооружений. – 1986. - № 1. – С. 34-37.