Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

МАТЕМАТИКА В СУЧАСНОМУ ТЕХНІЧНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ

Матеріали VII Міжнародної науково-практичної конференції

Київ, 27—28 грудня 2018 року

Київ
2019

Квазиоптимальное торможение вращений гиростата с внутренней степенью свободы в среде с сопротивлением

Л. Д. Акуленко[1], Т. А. Козаченко[2], Д. Д. Лещенко[2]

[1] Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

[2]Одесская государственная академия строительства и архитектуры, Одесса, Украина

gavrikov@ipmnet.ru, kushpil.t.a@gmail.com, leshchenko_d@ukr.net

Аналитически и численно исследована задача квазиоптимального по быстродействию торможения вращений динамически симметричного твердого тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью, и с вязкоупругим элементом в среде с сопротивлением. Исследована усредненная система уравнений.

Ключевые слова: твердое тело, момент, квазиоптимальное торможение.

Анализ объектов, содержащих элементы с распределенными и сосредоточенными параметрами, представляет интерес в теоретическом и прикладном аспектах. Получены результаты для систем, содержащих квазитвердые тела. Эти модели предполагают, что их движение близко движению абсолютно твердых тел. Влияние неидеальностей определяется на основе асимптотических методов нелинейной механики. Оно сводится к наличию дополнительных возмущающих моментов в уравнениях углового движения Эйлера некоторого фиктивного твердого тела.

Рассматриваются управляемые вращательные движения динамически симметричного твердого тела со сферической полостью, заполненной жидкостью большой вязкости (Черноусько, 1968; Черноусько, 1973). Кроме того, к телу, находящемуся в среде с сопротивлением, прикреплена с помощью вязкоупругого демпфера подвижная масса.

На основании подхода (Акуленко, 1987) приближенные уравнения Эйлера управляемых вращений в связанной с телом системе координат записываются в виде

$$\dot{\mathbf{G}} + \omega \times \mathbf{G} = \mathbf{M}^{\mathbf{u}} + \mathbf{M}^{\mathbf{p}} + \mathbf{M}^{\mathbf{n}} + \mathbf{M}^{\mathbf{r}}. \qquad (1)$$

Здесь $\mathbf{M}^{\mathbf{u}}$ — вектор управляющего внешнего момента, $\mathbf{M}^{\mathbf{p}}$ — вектор внутреннего возмущающего момента сил, обусловленный наличием вязкой жидкости в полости, $\mathbf{M}^{\nu}$ — вектор внутреннего возмущающего момента сил, обусловленный вязкоупругим элементом, $\mathbf{M}^{\mathbf{r}}$ — момент сил сопротивления среды (Кошляков, 1985; Chernousko, Akulenko, & Leshchenko, 2017). Вектор $\mathbf{G} = \mathbf{J}\omega$ — кинетический момент тела, где $\mathbf{J} = \mathrm{diag}(A_1, A_1, A_3)$ — симметричный тензор инерции невозмущенного тела ($A_1 \neq A_3$), $\omega = (p,\ q,\ r)$ — вектор угловой скорости, определяемый проекциями на связанные оси координат.

Величина управляющего момента сил $\mathbf{M}^{\mathbf{u}}$ предполагается малой порядка ε. Компоненты управляющих моментов представлены в виде произведений постоянных b_i, имеющих размерность момента сил, на малый числовой параметр ε и безразмерные управляющие функции, подлежащие определению (Черноусько, Акуленко, & Соколов, 1980; Акуленко, 1987):

$$M_i^u = \varepsilon b_i u_i,\ u_i = -G_i G^{-1}, i = 1,2,3, \left|\mathbf{u}\right| \le 1. \qquad (2)$$

Произведения $\varepsilon b_i, i = 1,2,3$ характеризуют эффективность системы управления по соответствующей оси связанной системы координат.

В работе предполагается, что момент сил сопротивления среды пропорционален кинетическому моменту тела (Chernousko, Akulenko, & Leshchenko, 2017)

$$\mathbf{M}^r = -\varepsilon\,\lambda\mathbf{J}\omega, \qquad (3)$$

где λ — постоянный коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств среды и формы тела.

С учетом (2), (3) уравнения управляемого движения (1) в проекциях на главные оси инерции тела имеют вид

$$\begin{aligned}
&A_1\dot{p} + \left(A_3 - A_1\right)qr = -\varepsilon b_1 A_1 p G^{-1} + Lpr^2 + FG^2 qr + Dr^4 p - \varepsilon\lambda A_1 p,\\
&A_1\dot{q} + \left(A_1 - A_3\right)pr = -\varepsilon b_2 A_1 q G^{-1} + Lqr^2 - FG^2 pr + Dr^4 q - \varepsilon\lambda A_1 q,\\
&A_3\dot{r} = -\varepsilon b_3 A_3 r G^{-1} + H\left(p^2 + q^2\right)r - A_1 A_3^{-1} D r^3\left(p^2 + q^2\right) - \varepsilon\lambda A_3 r,\\
&F = m\rho^2\Omega^{-2}A_1^{-3}A_3,\ D = m\rho^2\Lambda\Omega^{-4}A_3^3\left(A_1 - A_3\right)A_1^{-4},\\
&H = \beta P\nu^{-1}A_1^{-1}\left(A_3 - A_1\right),\ L = \beta P\nu^{-1}A_1^{-2}A_3\left(A_1 - A_3\right),\\
&0 < A_3 \le 2A_1,\ A_3 \ne A_1.
\end{aligned} \qquad (4)$$

Здесь коэффициенты F, D в (4) характеризуют моменты сил, вызываемые вязкоупругим элементом, m — масса точки, ρ — расстояние от центра масс недеформированной системы до точки крепления на теле. Частота колебаний и скорость их затухания имеют вид

$$\Omega^2 = \frac{c}{m},\ \Lambda = \frac{\delta}{m},$$

здесь c — жесткость, δ — коэффициент вязкости.

Коэффициенты $L,\ H$ в (4) характеризуют момент сил, обусловленный вязкой жидкостью в полости тела, β — объемная плотность, ν — кинематический коэффициент вязкости, P — коэффициент, определяемый формой полости; для сферической полости радиуса a_0 он равен $P = 8\pi a_0^7 / 525$. Основным допущением в данной задаче является предположение о малости числа Re.

В случае

$$b_1 = b_2 = b_3 = b \quad (b > 0),$$

где параметр b может быть функцией времени, управление является оптимальным для любых значений ε. Если величины b_i близки, то указанное управление можно считать квазиоптимальным (Черноусько и др., 1980; Акуленко, 1987).

Рассматривается случай, когда выполняются неравенства

$$\Omega^2 \gg \Lambda\omega_0 \gg \omega_0^2,$$

где ω_0 — величина начального значения вектора угловой скорости. Данное неравенство позволяет ввести малый параметр в (4) и считать возмущающие моменты малыми для применения метода усреднения вне возможного начального переходного процесса.

Для решения задачи квазиоптимального управления обезразмерим задачу. В качестве характерных параметров задачи возьмем момент инерции твердого тела относительно оси x_1 — $A_1 = A_2$ и величину ω_0 порядка начальной скорости. Вводятся безразмерные коэффициенты инерции $\tilde{A}_i = A_i / A_1$ и $\tau = \omega_0 t$ — безразмерное время.

Тогда система (4) примет вид

$$\begin{aligned}
&\frac{d\tilde{p}}{d\tau} = -\left(\tilde{A}_3 - 1\right)\tilde{q}\tilde{r} - \varepsilon\tilde{b}_1\tilde{p}\tilde{G}^{-1} + \varepsilon\tilde{L}\tilde{p}\tilde{r}^2 + \varepsilon\tilde{F}\tilde{G}^2\tilde{q}\tilde{r} + \varepsilon\tilde{D}\tilde{p}\tilde{r}^4 - \varepsilon\tilde{\lambda}\tilde{p},\\
&\frac{d\tilde{q}}{d\tau} = -\left(1 - \tilde{A}_3\right)\tilde{p}\tilde{r} - \varepsilon\tilde{b}_2\tilde{q}\tilde{G}^{-1} + \varepsilon\tilde{L}\tilde{q}\tilde{r}^2 - \varepsilon\tilde{F}\tilde{G}^2\tilde{p}\tilde{r} + \varepsilon\tilde{D}\tilde{q}\tilde{r}^4 - \varepsilon\tilde{\lambda}\tilde{q},\\
&\frac{d\tilde{r}}{d\tau} = -\varepsilon\tilde{b}_3\tilde{r}\tilde{G}^{-1} + \varepsilon\tilde{H}\left(\tilde{p}^2 + \tilde{q}^2\right)\tilde{r} - \varepsilon\tilde{A}_3^{-2}\tilde{D}\tilde{r}^3\left(\tilde{p}^2 + \tilde{q}^2\right) - \varepsilon\tilde{\lambda}\tilde{r},\\
&\varepsilon\tilde{F} = m\rho^2\Omega^{-2}A_1^{-1}\tilde{A}_3\omega_0^2,\ \varepsilon\tilde{D} = m\rho^2\Lambda\Omega^{-4}(1 - \tilde{A}_3)A_1^{-1}\tilde{A}_3^3\omega_0^3,\\
&\varepsilon\tilde{L} = \beta P\nu^{-1}A_1^{-1}\tilde{A}_3(1 - \tilde{A}_3)\omega_0, \varepsilon\tilde{H} = \beta P\nu^{-1}A_3^{-1}(\tilde{A}_3 - 1)\omega_0,\\
&\varepsilon\tilde{b}_i = b_i / A_1\omega_0^2, \varepsilon\tilde{\lambda} = \lambda / \omega_0, \tilde{G} = G / A_1\omega_0, \tilde{A}_1 = \tilde{A}_2 = 1.
\end{aligned} \tag{5}$$

Будем использовать безразмерные переменные, опуская ~.

Общее порождающее решение системы (5) при $\varepsilon = 0$ имеет вид:

$$p = a\cos\psi,\ \ q = a\sin\psi,\ \ a > 0,\ \ r = \mathrm{const} \neq 0,\ \ \psi = \left(A_3 - 1\right)r\tau + \psi_0.$$

После ряда преобразований и усреднения по фазе для переменных a и r, получим

$$\begin{aligned}
&a' = -\frac{a}{2}\left[G^{-1}\left(b_1 + b_2\right) - 2Lr^2 - 2Dr^4 + 2\lambda\right], \quad \theta = \varepsilon\tau,\\
&r' = -r\left(b_3G^{-1} - Ha^2 + A_3^{-2}Dr^2a^2 + \lambda\right), \quad ' = \frac{d}{d\theta}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Среднее выражений, содержащих множитель F, равно нулю. При $b_1 = b_2 = b_3 = b$ уравнения для a и r интегрируются полностью и задача оптимального управления решена аналитически в Акуленко, Лещенко, Рачинская, и Зинкевич (2013).

Для решения системы (6) были проведены численные исследования при разных начальных условиях и параметрах задачи в случае, когда

$$0.5(b_1 + b_2) \neq b_3 .$$

Расчеты проведены при следующих перенормированных значениях: коэффициентов управляющего момента $b_1 = 1.625$, $b_2 = 1$, $b_3 = 1.25$; коэффициента сопротивления $\lambda = 1.2;\ 1.8$; момента инерции $A_3 = 1.2$; коэффициентов $D = -0.05;\ \ -0.5$; $H = 1.0;\ \ 3.0$. Рассмотрено два случая, соответствующие начальным данным: $a_{01} = 0.35$, $a_{02} = 0.626$. В начальный момент r_0 находим по формуле

$$r_0 = \sqrt{1 - a_0^2} ,$$

а величину кинетического момента из выражения

$$G = \left|\mathbf{G}\right| = \sqrt{a^2 + A_3^2 r^2} .$$

Параметры выбраны так, чтобы выполнялись условия:

$$A_3 \leq 2 ,\ a_0 < r_0 .$$

Численный анализ показывает, что функции a, r, G монотонно убывают, а увеличение коэффициента момента сил вязкой жидкости в полости приводит к изменению характера убывания $a(\theta)$. В случае $\lambda = 1.2$ и $a_{01} = 0.35$ время торможения при различных значениях коэффициентов D и H равно $T \simeq 0.63$. При значении $\lambda = 1.8$ и $a_{02} = 0.626$ время торможения составляет $T \simeq 0.53$. Следовательно, при увеличении коэффициента сопротивления λ торможение твердого тела происходит быстрее. Также время торможения зависит от начальных значений a и r. Таким образом, задача квазиоптимального быстродействия решена.

Список литературы

Chernousko, F. L., Akulenko, L. D., & Leshchenko, D. D. (2017). *Evolution of motions of a rigid body about its center of mass.* Cham: Springer.

Акуленко, Л. Д. (1987). *Асимптотические методы оптимального управления.* Москва: Наука.

Акуленко, Л. Д., Лещенко, Д. Д., Рачинская, А. Л., & Зинкевич, Я. С. (2013). *Возмущенные и управляемые вращения твердого тела.* Одесса: ОНУ.

Кошляков, В. Н. (1985). *Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов: Аналитические методы.* Москва: Наука.

Черноусько, Ф. Л. (1968). *Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость.* Москва: Издательство ВЦ АН СССР.

Черноусько, Ф. Л. (1973). О движении твердого тела с подвижными внутренними массами. *Известия АН СССР. Механика твердого тела,* (4), 33—44.

Черноусько, Ф. Л., Акуленко, Л. Д., & Соколов, Б. Н. (1980). *Управление колебаниями.* Москва: Наука.