МВ ССО УССР

ОДЕССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им.И.И.МЕЧНИКОВА

№ II24-74 Деп.

УДК 531.I

Д.Д.Лещенко

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОДВИЖНОЙ ТОЧЕЧНОЙ МАССОЙ

Одесса - I974

I. Рассмотрим движение динамически несимметричного твердого тела вокруг центра инерции, к которому в точке O_1, расположенной на одной из главных осей инерции, прикреплена при помощи упругой связи точка P массы m.

Начало декартовой системы координат, связанной с твердым телом, располагается в центре инерции C тела G^* с подвижной массой, а орты этой системы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ направлены так, что орт $\bar{e}_3$ совпадает с осью, на которой расположена точка O_1. Тогда радиус - вектор точки O_1 $\bar{\rho}=\rho\bar{e}_3$ причем, не нарушая общности, примем $\rho > 0$.

Уравнение движения твердого тела с подвижной массой в общем виде получено в [1] / см. (3.11) /:

$$\bar{J}_c^*\cdot\bar{\omega}' + (\bar{\omega}\times\bar{J}_c^*\cdot\bar{\omega}) = \bar{\Phi}(\bar{\omega}) + O(\Omega^{-4}, \lambda^2\Omega^{-6}) \quad (1.1)$$

После вычисления вектор-функции $\bar{\Phi}$ для нашей задчи уравнение (1.1) в проекциях на оси $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ записывается в виде:

$$J_1\omega_1' + (J_3 - J_2)\omega_2\omega_3 = -\rho^2 m\Big\{\Omega^{-2}\omega_2\omega_3(A_1\omega_1^2 + B_1\omega_2^2 + C_1\omega_3^2) + \lambda\Omega^{-4}\big[\omega_1\omega_2^2(L_1\omega_1^2 + M_1\omega_2^2 + N_1\omega_3^2) + \omega_1\omega_3^2(R_1\omega_1^2 + S_1\omega_3^2)\big]\Big\}$$

$$J_2\omega_2' + (J_1 - J_3)\omega_3\omega_1 = -\rho^2 m\Big\{\Omega^{-2}\omega_3\omega_1(A_2\omega_2^2 + C_2\omega_3^2 + B_2\omega_1^2) + \lambda\Omega^{-4}\big[\omega_2\omega_3^2(L_2\omega_2^2 + M_2\omega_3^2 + N_2\omega_1^2) + \omega_2\omega_1^2(R_2\omega_2^2 + S_2\omega_1^2)\big]\Big\}$$

$$J_3\omega_3' + (J_2 - J_1)\omega_1\omega_2 = -\rho^2 m\lambda\Omega^{-4}\omega_3^3\left(1 + \frac{J_3 - J_2}{J_1}\right)\times \left(1 - \frac{J_1 - J_3}{J_2}\right)\left(\frac{J_1 - J_3}{J_2}\omega_1^2 - \frac{J_3 - J_2}{J_1}\omega_2^2\right) \quad (1.2)$$

здесь J_i $(i=1,2,3)$ - главные моменты инерции твердого тела G^*. Коэффициенты $A_i, B_i, \ldots$ в правых частях системы (1.2) представляют из себя определенные выражения, составленные из J_i. Ввиду громоздкости этих выражений, в статье они не приводятся. Заметим, что при $J_1 = J_2$ система (1.2) сводится к системе (5.5) в [1], полученной для динамически симметричного тела с подвижной массой на оси симметрии.

c - жесткость упругой связи соединения подвижной точки с точкой O_1 твердого тела, δ - коэффициент вязкого трения.

$$\Omega^2 = \frac{c}{m}, \quad \lambda = \frac{\delta}{m} \tag{1.3}$$

Если при исследовании эволюции движения твердого тела ограничиться условиями, при которых можно учитывать лишь вынужденные движения точки P относительно тела, пренебрегая ее свободными колебаниями, то [1]:

$$\Omega^2 \gg \lambda \gg 1 \tag{1.4}$$

Таким образом, в уравнениях движения (1.2) $\Omega^{-2}, \lambda\Omega^{-4}$ - малые параметры. Предполагаем, что они одного порядка ε.

Для решения задачи воспользуемся методом осреднения [3] в форме, предложенной в работе Ф.Л.Черноусько [2]. Погрешность осредненного решения для медленных переменных составляет величину порядка ε на интервале времени, за который тело совершит $\sim \varepsilon^{-1}$ оборотов.

Примем, не нарушая общности, $J_1 > J_2 > J_3$. Рассмотрим движение при условии $2HJ_1 \geqslant \Gamma^2 \geqslant 2HJ_2$, соответствующем траекториям вектора кинетического момента, отвечающим ось связанной системы координат Oz_1.

$$H=\frac{1}{2}\left(J_1\omega_1^2+J_2\omega_2^2+J_3\omega_3^2\right) - \qquad (1.5)$$

кинетическая энергия тела,

$$\Gamma^2=J_1^2\omega_1^2+J_2^2\omega_2^2+J_3^2\omega_3^2 - \qquad (1.6)$$

квадрат величины кинетического момента.

Введем функцию

$$k^2=\frac{(J_2-J_3)(2HJ_1-\Gamma^2)}{(J_1-J_2)(\Gamma^2-2HJ_3)} \quad (0\le k\le 1) \qquad (1.7)$$

Используя $(1.2),(1.5),(1.6),(1.7)$ производные $\frac{d\Gamma^2}{dt}, \frac{dk^2}{dt}$ выражаются через $\omega_1,\omega_2,\omega_3,\Gamma,H$. Затем функции ω_1,ω_3 из $(1.5),(1.6)$ записываются через Γ,H,ω_2; H - через Γ и k^2 с помощью (1.7). После этих преобразований получим систему вида:

$$\frac{d\Gamma^2}{dt}=\varepsilon f_1(\Gamma,k^2,\omega_2)$$
$$\frac{dk^2}{dt}=\varepsilon f_2(\Gamma,k^2,\omega_2) \qquad (1.8)$$

где функции f_1, f_2 - многочлены шестой степени относительно ω_2.

Заметим, что функция k^2 так же, как Γ^2 и H, является медленно меняющейся переменной. Поэтому, следуя методу осреднения, в первом приближении в (1.8) подставляем функцию $\omega_2(t)$ из невозмущенного движения Эйлера [4]:

$$\omega_2=\sqrt{\frac{2HJ_1-\Gamma^2}{J_2(J_1-J_2)}}\, sn\left[\frac{t-t_0}{\tau}\cdot 4K(k),k\right] \qquad (1.9)$$

Здесь τ - период движения.

После исключения H в (1.9) при помощи (1.7), правые части (1.8) осредняются по периоду τ движения Эйлера.

Используя формулы для интегралов от эллиптических функций $[5]$, получим систему осредненных уравнений в виде:

$$\frac{d\Gamma^2}{dt} = -\frac{2\rho^2 m\lambda\Omega^{-4}\Gamma^6}{\left[J_1(J_2-J_3)+J_3(J_1-J_2)k^2\right]^3}\Big[a+bk^2+dk^4-$$

$$-\frac{E(k)}{K(k)}\left(a+gk^2+hk^4\right)\Big] \qquad (1.10)$$

$$\frac{dk^2}{dt} = -\frac{2\rho^2 m\lambda\Omega^{-4}\Gamma^4}{\left[J_1(J_2-J_3)+J_3(J_1-J_2)k^2\right]^2}\Big[l+nk^2+pk^4+$$

$$+zk^6-\frac{E(k)}{K(k)}\left(l+sk^2+uk^4+vk^6\right)\Big]$$

где $a, b, \ldots$ вполне определенные выражения, содержащие J_i. $K(k), E(k)$ - полные эллиптические интегралы соответственно первого и второго рода.

Правые части (1.10) можно упростить, используя разложения полных эллиптических интегралов в ряды по k^2 /см. [5]/ и ограничиваясь членами порядка k^2, в результате чего получается следующая система уравнений:

$$\frac{d\Gamma^2}{dt} = -2\rho^2 m\lambda\Omega^{-4}\Gamma^6\alpha k^2$$

$$\frac{dk^2}{dt} = -2\rho^2 m\lambda\Omega^{-4}\Gamma^4\beta k^2 \qquad (1.11)$$

где α, β - вполне определенные выражения, содержащие J_i.

Из этих уравнений непосредственно следует:

$$\Gamma^2 = C_1 \exp\left(\frac{\alpha}{\beta}k^2\right) \qquad (1.12)$$

после чего из второго уравнения (1.11) получается для [illegible] k^2 :

$$k^2 = C_2^2 \exp\left(-2\rho^2 m\lambda\Omega^{-4}C_1^2\beta t\right) \qquad (1.13)$$

Следовательно k^2 убывает при $\beta > 0$ и возрастает при $\beta < 0$.

Согласно (1.12) в пределах сделанных ограничений для k^2 :

$$\Gamma = C_3 \exp\left(-\rho^2 m\lambda\Omega^{-4}C_1'^2\alpha t\right) \qquad (1.14)$$

Для $\alpha > 0$ Γ убывает. Если же $\alpha < 0$, то Γ возрастает.

Эволюция величины кинетического момента является отличительной особенностью нашей задачи, в то время, как в случае динамически симметричного тела с подвижной точечной массой, прикрепленной на оси симметрии, $\Gamma = const$ [1]

Из (1.7) с учетом (1.13), (1.14) находится также эволюция кинетической энергии:

$$H = \frac{C_3^2 \exp\left(-2\rho^2 m\lambda\Omega^{-4}C_1'^2\alpha t\right)}{2J_1}\left[1 + \frac{(J_1-J_2)(J_1-J_3)}{J_1(J_2-J_3)} \times C_2^2 \exp\left(-2\rho^2 m\lambda\Omega^{-4}C_1^2\beta t\right)\right] \qquad (1.15)$$

Решение для угловых скоростей в данном приближении определяется формулами движения Эйлера типа (1.9) /см. [4]/, в которые нужно подставить найденные медленно меняющиеся функции. Так, например:

$$\omega_2=\sqrt{\frac{J_1-J_3}{J_1J_2(J_2-J_3)}}\;C_2\exp(-\rho^2 m\lambda\Omega^{-4}C_1^2\beta t)\,sn\left[\frac{t-t_0}{\tau}4K(k),k\right] \qquad (1.16)$$

где k претерпевает эволюцию в соответствии с (1.13).

2. В качестве частного случая рассмотрим движение вокруг центра инерции тела, обладающего динамической симметрией и несущего подвижную точку P, которая соединена упругой связью с точкой O_1, расположенной, в отличие от $[1]$, не на оси динамической симметрии, а в экваториальной плоскости центрального эллипсоида инерции. Орт $\bar{e}_1$ декартовой системы координат, связанной с твердым телом, совпадает с осью, на которой расположена точка прикрепления подвижной массы.

Уравнение для вектора $\bar{\omega}$ в проекциях на оси $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ может быть получено, следуя $[1]$ или из (1.2) циклической перестановкой $J_1, J_2, J_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3$, полагая при этом $J_1=J_2=J$, $J_3=J_*$.

В результате, используя все допущения п.1, уравнение запишется следующим образом:

$$J\omega_1' + (J_*-J)\omega_2\omega_3=-\rho^2 m\lambda\Omega^{-4}(1-J_*J^{-1})\times$$
$$\times(J_*J^{-1}-2)\,\omega_1^3\omega_3^2$$

$$J\omega_2' + (J-J_*)\omega_3\omega_1=-\rho^2 m\{\Omega^{-2}\omega_1\omega_3[(-4+3J_*J^{-1})\times$$
$$\times(\omega_1^2+\omega_2^2)+(-4+6J_*J^{-1}-4J_*^2J^{-2}+J_*^3J^{-3})\omega_3^2]+$$
$$+\lambda\Omega^{-4}(1-J_*J^{-1})\omega_2\omega_3^2[-2J_*J^{-1}\omega_1^2+(2-3J_*J^{-1})\omega_2^2-$$

$$- J_* J^{-1}(2 - J_* J^{-1})^2 \omega_3^2]\} \qquad (2.1)$$

$$J_* \omega_3' = -\rho^2 m \{ \Omega^{-2} \omega_2 \omega_1 [\omega_2^2 + (6 - 12 J_* J^{-1} + 7 J_*^2 J^{-2}) \omega_3^2 + \omega_1^2] + \lambda \Omega^{-4} (1 - J_* J^{-1}) [\omega_3 \omega_1^2 (2\omega_2^2 + 2(2 - 3J_* J^{-1})(1 - J_* J^{-1}) \omega_3^2 + \omega_1^2) + \omega_3 \omega_2^2 (\omega_2^2 + J_* J^{-1}(6 - 5 J_* J^{-1}) \omega_3^2)]\}$$

Задача решается методом осреднения [3]. Первые интегралы невозмущенной системы $(\varepsilon = 0)$ будут являться медленными переменными в рассматриваемой задаче.

Выполняя процедуру осреднения по периоду движения Эйлера в случае динамической симметрии [4], для производных по времени от медленных переменных получим с учетом (2.1):

$$\omega_3' = -\rho^2 m \lambda \Omega^{-4} \frac{J - J_*}{J J_*} \omega_3 \left[1 + \frac{1}{2} \omega_3^2 (2 - J_* J^{-1})^2\right]$$
$$\Gamma^{2\prime} = 0 \qquad (2.2)$$
$$H' = -\rho^2 m \lambda \Omega^{-4} (1 - J_* J^{-1})^2 \omega_3^2 \left[1 + \frac{1}{2} \omega_3^2 (4 - 7 J_* J^{-1} + J_*^2 J^{-2})\right]$$

Обратим внимание на то, что в первом приближении для рассматриваемого тела $\Gamma^2 = const$.

Интегрирование первого уравнения (2.2) дает

$$\omega_3^2 = \frac{2C_1 \exp\left(-2\rho^2 m \lambda \Omega^{-4} \frac{J - J_*}{J J_*} t\right)}{(2 - J_* J^{-1})^2 \left[1 - C_1 \exp\left(-2\rho^2 m \lambda \Omega^{-4} \frac{J - J_*}{J J_*} t\right)\right]} \qquad (2.3)$$

Из (2.3) видно, что при $J > J_*$ с ростом t ω_3^2 убывает.

Если же $J < J_*$, то ω_3^2 возрастает.

В случае полной симметрии тела при $J = J_*$

$$\omega_3^2 = const$$

Зависимость H от времени определяется квадратурой из третьего уравнения (2.2).

Пользуюсь случаем выразить глубокую благодарность Ф.Л.Черноусько за постановку задачи и ценные советы, А.А.Каспарьянцу - за полезные обсуждения.

БИБЛИОГРАФИЯ:

1. Черноусько Ф.Л. О движении твердого тела с подвижными внутренними массами. Изв.АН СССР, МТТ, 1973, № 4, с.33-44.
2. Черноусько Ф.Л. Движение твердого тела с полостями, заполненными вязкой жидкостью, при малых числах Рейнольдса. Ж.вычисл.матем. и матем.физ. 1965, т.5, № 6, с.1049-1070.
3. Волосов В.М., Моргунов Б.И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М., Изд-во МГУ, 1971.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, т.1, М., Изд-во "Наука", 1973.
5. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядо[в] и произведений. М., Изд-во "Наука, 1971.