Тезисы докладов

Всероссийской конференции с международным участием «Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем»

18-22 апреля 2011 года

Москва
Российский университет дружбы народов
2011

ОПТИМАЛЬНОЕ ТОРМОЖЕНИЕ ВРАЩЕНИЙ НЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕЛА В СРЕДЕ С СОПРОТИВЛЕНИЕМ

Д.Д. Лещенко [1], Л.Д. Акуленко [2], Я.С. Зинкевич[1], А.Л. Рачинская [3], Т.А. Козаченко [1]

[1]Одесская государственная академия строительства и архитектуры, Одесса, Украина

[2]Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

[3]Одесский национальный университет им. И.И.Мечникова, Одесса, Украина

e-mail: leshchenkodmytro@gmail.com, gavrikov@ipmnet.ru, yaninaz@mail.ru, rachinskaya@onu.edu.ua

Исследована задача об оптимального по быстродействию торможении вращений несимметричного твердого тела. На твердое тело действует тормозящий момент сил вязкого трения. Определены оптимальный закон управления для торможения вращений твердого тела в форме синтеза, время быстродействия и фазовые траектории.

Ключевые слова - оптимальное торможение, твердое тело, вращение, среда с сопротивлением

1. Постановка задачи оптимального управления

Уравнения управляемых вращений в проекциях на оси связанной с фиксированным твердым телом системы координат записываются в виде [1,2]

$$J\dot{\boldsymbol{\omega}} + [\boldsymbol{\omega} \times J\boldsymbol{\omega}] = \mathbf{M} - \lambda J\boldsymbol{\omega}. \quad (1)$$

Здесь $\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)$ – вектор абсолютной угловой скорости, $J = \mathrm{diag}(A_1, A_2, A_3)$ - тензор инерции невозмущенного тела, $\mathbf{M}$ - вектор управляющего момента, кинетический момент тела $\mathbf{G} = J\boldsymbol{\omega}$.

Полагаем

$$\mathbf{M} = b\mathbf{u},\ |\mathbf{u}| \le 1,\ b = b(t, \mathbf{G}),\ 0 < b_* \le b < b^* < \infty, \quad (2)$$

где b - скалярная функция, ограниченная в рассматриваемой области изменения аргументов $t, \mathbf{G}$ согласно уравнениям (2).

Ставится задача оптимального по быстродействию торможения вращений

$$\boldsymbol{\omega}(T_0) = \boldsymbol{\omega}^0,\ \boldsymbol{\omega}(T) = 0,\ T \to \min_{\mathbf{u}},\ |\mathbf{u}| \le 1. \quad (3)$$

2. Решение задачи оптимального торможения

Синтез оптимального по быстродействию управления имеет вид [1]:

$$M_p = -b\frac{A_1 p}{G},\ M_q = -b\frac{A_2 q}{G},\ M_r = -b\frac{A_3 r}{G}. \quad (4)$$

Здесь для упрощения полагаем $b = b(t, G)$, $0 < b_1 \le b < b_2 < \infty$. При $b = \mathrm{const}$ получим $G(t) = \lambda^{-1}\left[\left(G^0\lambda + b\right)\exp(-\lambda t) - b\right]$, $T = \lambda^{-1}\ln\left(G^0\lambda b^{-1} + 1\right)$, $t_0 = 0$. Здесь t – текущее время процесса торможения, T – время быстродействия.

Примем для определенности, что $A_1 > A_2 > A_3$. Рассмотрим движение при условии $2HA_1 \ge G^2 > 2HA_2$, где H - кинетическая энергия. Введем функцию k, имеющую смысл модуля эллиптических функций [3]

$$k^2 = \frac{(A_2 - A_3)(2HA_1 - G^2)}{(A_1 - A_2)(G^2 - 2HA_3)} \qquad (0 \le k^2 \le 1). \tag{5}$$

При помощи формул (5), (1), (4) получим выражение для производной k^2

$$\frac{dk^2}{dt} = \frac{2(G^0\lambda + b)\exp(-\lambda t)}{\sigma[(G^0\lambda + b)\exp(-\lambda t) - b]}(\alpha + \delta k^2 + \gamma k^4), \qquad k^2(0) = (k^0)^2 \tag{6}$$

где $\sigma, \alpha, \delta, \gamma$ зависят от моментов инерции, коэффициента сопротивления λ и начальных значений H^0 и G^0.

Разделяя переменные и интегрируя уравнение (6), получим неявную зависимость k^2 от времени t

$$\frac{\delta + 2\gamma k^2 - \sqrt{-\Delta}}{\delta + 2\gamma k^2 + \sqrt{-\Delta}} = \exp(4\lambda t)[(G^0\lambda + b)\exp(-\lambda t) - b]^{4\lambda t}, \tag{7}$$

где $\Delta = -(A_1 - A_2)^2(A_2 - A_3)^2(A_1 - A_3)^2$.

3. Построение оптимального управляемого движения

Приведем решение системы (1) другим способом. Система (1) в векторном виде записывается следующим образом

$$\dot{\mathbf{L}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = \mathbf{M} - \lambda \mathbf{L}, \quad \mathbf{L} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}. \tag{8}$$

Здесь $\mathbf{L}$ - вектор кинетического момента, $\boldsymbol{\omega}$ - вектор угловой скорости, $J = \mathrm{diag}(A_1, A_2, A_3)$ - тензор инерции тела. Обозначим проекции вектора $\mathbf{L}$ на оси связанной системы координат $Oxyz$

$$L_x = A_1 p, \; L_y = A_2 q, \; L_z = A_3 r. \tag{9}$$

Проведем замену $\mathbf{L} = G\mathbf{l}$, где G - величина кинетического момента, $\mathbf{l}$ - орт вектора $\mathbf{L}$. Введем обозначения $\mathrm{K} = J^{-1}\mathrm{l}$. После ряда преобразований получим систему уравнений в случае Эйлера для свободного твердого тела:

$$J\mathbf{K}' + [\mathbf{K} \times J\mathbf{K}] = 0. \tag{10}$$

Получим выражение, аналогичное выражению для кинетической энергии $H_k = 0.5(\mathbf{K}, J\mathbf{K}) = const$ и соотношение $(J\mathbf{K}, J\mathbf{K}) = G_k^2 = 1$, где G_k - величина вектора $\mathbf{l}$ кинетического момента.

Рассмотрим случай $2H_k A_1 \ge G_k^2 > 2H_k A_2$.

Введем положительный параметр $0 \le k^2 < 1$ согласно формуле, аналогичной формуле (5).

Решение уравнений Эйлера (8) в рассматриваемом случае записывается через эллиптические функции Якоби dn,sn,cn в виде:

$$\sin\theta \sin\varphi = \sqrt{A_1(A_1 - A_3)^{-1}(G_k^2 - 2H_k A_3)}\,\mathrm{dn}(\tau'; \mathrm{k}), \tag{13}$$

$$\tau' = \sqrt{(A_1 A_2 A_3)^{-1}(A_1 - A_2)(G_k^2 - 2H_k A_3)}\,t,$$

здесь θ и φ - сферические углы, характеризующие проекции вектора кинетического момента $\mathbf{L}$ на оси системы координат, связанные с телом. Выражения для $\sin\theta\cos\varphi$ и $\cos\theta$ записываются аналогично.

4. Выводы

Исследована задача синтеза оптимального по быстродействию торможения вращений несимметричного тела в сопротивляющейся среде. Определены управление и время быстродействия (функция Беллмана). Управляемое движение представляет собой движение типа Эйлера – Пуансо с изменяющейся по времени величиной кинетического момента тела G_k. Отметим, что изложенный выше подход был развит в [1].

Литература

1. *Акуленко Л.Д.* Асимптотические методы оптимального управления. - М.: Наука, 1987. – 368 с.

2. *Кошляков В.Н.* Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов: Аналитические методы. - М.: Наука, 1985. – 288 с.

OPTIMAL DECELERATION OF ROTATION OF AN ASYMMETRIC BODY IN A RESISTIVE MEDIUM

D.D. Leshchenko[1], L.D. Akulenko[2], Ya.S. Zinkevich[1], A.L. Rachinskaya[3], and T.A. Kozachenko[1]

[1]Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine

[2]Institute for Problems in Mechanics Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

[3]I.I.Mechnikov Odessa National University, Odessa, Ukraine

A minimum-time problem on deceleration of rotation of an asymmetric body is studied. The body is subject to a retarding torque of viscous friction. An optimal control law for deceleration of rotation of the body is synthesized, and the corresponding time and phase trajectories are determined.

Key words – Optimal deceleration, rigid body, rotation, resistive medium.