

УДК 531.36

© 2006 г. Л.Д. АКУЛЕНКО, Д.Д. ЛЕЩЕНКО, С.Г. СУКСОВА,
И.А. ТИМОШЕНКО

**ЭВОЛЮЦИЯ ВРАЩЕНИЙ ТРЕХОСНОГО СПУТНИКА,
БЛИЗКОГО К ДИНАМИЧЕСКИ-СФЕРИЧЕСКОМУ, ПОД ДЕЙСТВИЕМ
ГРАВИТАЦИОННЫХ И СВЕТОВЫХ МОМЕНТОВ**

Исследуется эволюция вращений твердого тела (спутника Солнца, движущегося по эллиптической орбите с произвольным эксцентриситетом) под действием моментов сил гравитации и светового давления. Тело предполагается близким к динамически-сферическому, а его поверхность является поверхностью вращения, что позволяет аппроксимировать коэффициент момента сил светового давления конечным тригонометрическим полиномом. В первом приближении метода усреднения установлены новые качественные эффекты вращений спутника относительно центра масс.

1. Исходные предположения и постановка задачи. Рассмотрим движение спутника или космического аппарата относительно центра масс под действием совместного влияния моментов сил светового давления и гравитационного притяжения. Вращательные движения рассматриваются в рамках моделей динамики твердых тел, центры масс которых движутся по эллиптическим орбитам вокруг Солнца. Задачи динамики обобщаются и усложняются учетом различных возмущающих факторов и в настоящее время остаются достаточно актуальными. Исследованию вращательных движений тел относительно центра масс под действием возмущающих моментов сил различной природы (гравитационных, светового давления и др.), близкому к проводимому ниже, посвящено много работ, см. [1–10] и библиографию к этим работам.

Введем три правых декартовых системы координат, начало координат совместим с центром инерции спутника [1, 2]. Система координат $OXYZ$ движется поступательно по орбите Солнца вместе со спутником; ось Y параллельна нормали к плоскости орбиты, ось Z – направлению радиус-вектора орбиты в ее перигелии, ось X – направлению вектора скорости центра масс в перигелии.

Положение вектора кинетического момента L в системе координат $OXYZ$ определим углами ρ и σ , как показано в [1–3] (L – кинетический момент тела относительно его центра масс). Для построения системы координат OL_1L_2L , связанной с вектором L , в плоскости OYL проведем ось L_1 , перпендикулярно к вектору L и составляющую тупой угол с осью Y . Ось L_2 дополняет оси L_1 и L до правой системы координат. Оси связанной системы координат $Ox_1x_2x_3$ совместим с главными центральными осями инерции. Взаимное положение главных центральных осей инерции и осей L, L_1, L_2 определим углами Эйлера [1–3]. При этом направляющие косинусы (α_{ij}) осей Ox, Oy, Oz относительно системы OL_1L_2L выражаются через углы Эйлера φ, ψ, θ по известным формулам [1].

Будем пренебрегать моментами всех сил, кроме гравитационных и сил светового давления. В [1] приведена сравнительная оценка гравитационных моментов и моментов сил светового давления для спутника Солнца. Для общей ситуации показано, что момент сил светового давления на несколько порядков больше гравитационного. В рассматриваемой ниже задаче момент сил светового давления предполагается того же порядка

малости ϵ , что и гравитационный момент. Это достигается, например, распределением масс и соответствующей формой тела.

Гравитационный момент, действующий на спутник со стороны Солнца, имеет вид [1, 3]:

$$\mathbf{M}_g = \frac{3\mu}{R^3}((C-B)\gamma'\gamma'', (A-C)\gamma\gamma'', (B-A)\gamma'\gamma''), \quad R = |\mathbf{R}| \quad (1.1)$$

Здесь μ – гравитационный параметр Солнца; $\gamma, \gamma', \gamma''$ – косинусы углов между радиус-вектором \mathbf{R} и осями x, y, z .

Допустим, что поверхность аппарата представляет собой поверхность вращения, причем единичный орт оси симметрии \mathbf{k} направлен по оси Oz . Как показано в [1, 4, 5], в этом случае для момента сил светового давления \mathbf{M}_c , действующего на спутник, имеет место формула

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_c &= (a_c(\epsilon_s)R_0^2/R^2)\mathbf{e}_r \times \mathbf{k} \\ a_c(\epsilon_s)\frac{R_0^2}{R^2} &= p_c S(\epsilon_s)Z'_0(\epsilon_s), \quad p_c = \frac{E_0}{c}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь \mathbf{e}_r – единичный вектор по направлению радиус-вектора орбиты; ϵ_s – угол между направлениями \mathbf{e}_r и \mathbf{k} , так, что $|\mathbf{e}_r \times \mathbf{k}| = \sin\epsilon_s$; R – текущее расстояние от центра Солнца до центра масс спутника; R_0 – фиксированное значение R , например, в начальный момент времени; $a_c(\epsilon_s)$ – коэффициент момента сил светового давления, определяемый свойствами поверхности; S – площадь “тени” на плоскости, нормальной к потоку; Z'_0 – расстояние от центра масс до центра давления; p_c – величина светового давления на расстоянии R от центра Солнца; c – скорость света; E_0 – величина потока энергии светового давления на расстоянии R_0 от центра Солнца. Если R_0 – радиус орбиты Земли, тогда $p_{c0} = 4.64 \cdot 10^{-6}$ Па.

Далее полагаем [1], что функция $a_c = a_c(\cos\epsilon_s)$ и аппроксимируем ее полиномами по степеням $\cos\epsilon_s$. Момент сил светового давления имеет силовую функцию, зависящую только от положения оси симметрии тела в пространстве [1]. Представим функцию $a_c(\cos\epsilon_s)$ в виде [9]:

$$a_c = a_{0c} + a_{1c}\cos\epsilon_s + \dots + a_N\cos^N\epsilon_s \quad (1.3)$$

Уравнения возмущенного движения спутника при наличии силовой функции в переменных $L, p, \sigma, \varphi, \psi, \theta$ имеют вид [3]

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= (L\sin\rho)^{-1}\frac{\partial U}{\partial p}, \quad \dot{p} = -(L\sin\rho)^{-1}\frac{\partial U}{\partial \sigma} + \operatorname{ctg}\rho L^{-1}\frac{\partial U}{\partial \psi} \\ \dot{L} &= \partial U/\partial \psi \\ \dot{\theta} &= L\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi(A^{-1} - B^{-1}) - (L\sin\theta)^{-1}\frac{\partial U}{\partial \varphi} + \operatorname{ctg}\theta L^{-1}\frac{\partial U}{\partial \psi} \\ \dot{\varphi} &= L\cos\theta(C^{-1} - A^{-1}\sin^2\varphi - B^{-1}\cos^2\varphi) + (L\sin\theta)^{-1}\frac{\partial U}{\partial \theta} \\ \dot{\psi} &= -L(A^{-1}\sin^2\varphi + B^{-1}\cos^2\varphi) - L^{-1}\left(\frac{\partial U}{\partial p}\operatorname{ctg}\rho + \frac{\partial U}{\partial \theta}\operatorname{ctg}\theta\right) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Силловая функция U зависит от времени t через истинную аномалию $v(t)$ и от направляющих косинусов оси Oz относительно системы координат $OXYZ$, она имеет вид $U = U(v(t), \alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$.

К системе уравнений (1.4) необходимо присоединить уравнение, описывающее изменение истинной аномалии со временем

$$\begin{aligned} dv/dt &= \omega_0(1 - e^2)^{-3/2}(1 + e \cos v)^2 \\ \omega_0 &= 2\pi/T_0 = [\kappa(1 - e^2)^3 P^{-3}]^{1/2} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь ω_0 – средняя угловая скорость движения центра масс по эллиптической орбите, T_0 – период обращения спутника, e и P – эксцентриситет и фокальный параметр орбиты соответственно, κ – произведение постоянной всемирного тяготения на массу Солнца.

Считаем силловую функцию состоящей из двух слагаемых, обусловленных влиянием гравитационного момента и момента сил светового давления $U = U_g + U_c$. Силловая функция, обусловленная влиянием гравитационного момента, записывается следующим образом [3]:

$$U_g = \frac{3\mu}{2R^3} [(A - B)\gamma'^2 + (A - C)\gamma''^2] \quad (1.6)$$

$$\gamma' = \alpha_2 \sin v + \gamma_2 \cos v, \quad \gamma'' = \alpha_3 \sin v + \gamma_3 \cos v$$

Момент сил светового давления (1.2) соответствует силловой функции

$$U_c(\cos \epsilon_s) = -R_0^2 R^{-2} \int a_c(\cos \epsilon_s) d(\cos \epsilon_s)$$

Рассмотрим вначале случай “тригонометрического монома”

$$a_c(\cos \epsilon_s) = a_n \cos^n \epsilon_s \quad (1.7)$$

Силловая функция U_c в этом случае имеет вид

$$U_c = -\frac{a_n R_0^2}{(n+1)R^2} \cos^{n+1} \epsilon_s \quad (1.8)$$

$$\cos \epsilon_s = \gamma_3 \cos v + \alpha_3 \sin v$$

Направляющие косинусы α_3, γ_3 выражаются через $\rho, \sigma, \theta, \psi$ по известным формулам [1]. Предположим, что угловая скорость движения спутника относительно центра масс существенно больше угловой скорости орбитального движения ω_0 , т.е. будем считать, что $\epsilon = \omega_0/\omega \sim A\omega_0/G \ll 1$.

Пусть главные центральные моменты инерции спутника близки друг к другу и представимы в виде

$$A = J_0 + \epsilon A_1, \quad B = J_0 + \epsilon B_1, \quad C = J_0 + \epsilon C_1 \quad (1.9)$$

где $0 < \epsilon \ll 1$ – малый параметр. Предположим также, что $a_0 \sim \epsilon, a_1 \sim \epsilon, \dots, a_N \sim \epsilon$, т.е. моменты сил светового давления имеют тот же порядок величины ϵ , что и гравитационные, а также гироскопические моменты. Из (1.7) следует, что $U_c \sim \epsilon$. Кроме того, для силловой функции гироскопического момента $U_g \sim \epsilon$, т.к. $A - C = (A_1 - C_1)\epsilon, A - B = (A_1 - B_1)\epsilon$.

Исследуем решение системы (1.4), (1.5) при малом ϵ на большом промежутке времени $t \sim \epsilon^{-1}$. Погрешность усредненного решения для медленных переменных составляет

гравитационную

величину $O(\epsilon)$ на интервале времени, за который тело совершит порядка ϵ^{-1} оборотов. Независимое усреднение по ψ , ν проводим как для нерезонансных случаев [2].

2. Преобразование выражения силовой функции, процедура усреднения и построение системы первого приближения. Рассмотрим невозмущенное движение ($\epsilon = 0$), когда уравнения (1.4), (1.5) описывают движение сферически симметричного тела и гравитационные (1.1), а также световые и гироскопические моменты (1.2) равны нулю. Из системы (1.4) получим, что ρ , σ , L , θ , и φ постоянны, а

$$\psi = LJ_0^{-1}t + \psi_0, \quad \psi_0 = \text{const} \quad (2.1)$$

что соответствует равномерному вращению спутника вокруг вектора кинетического момента L , который движется поступательно. При малом $\epsilon \neq 0$ в системе семи уравнений (1.4), (1.5) с учетом (1.9) медленными переменными являются величины ρ , σ , L , θ , φ , а быстрыми – ψ и ν . Для получения решения в первом приближении достаточно усреднить правые части уравнений (1.4), подставив в них ν из решения уравнения (1.5) и ψ из (2.1). Предполагаем, что для частот ω_0 и LJ_0^{-1} не выполняются резонансные соотношения $m_1\omega_0 + n_1LJ_0^{-1} \neq 0$, где m_1 и n_1 – любые целые числа.

Тогда усреднение по времени силовых функций можно заменить независимым усреднением по переменным ψ и $\nu(t)$:

$$\bar{U} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} U d\psi dt = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} U d\psi \right) \frac{dt}{d\nu} d\nu = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} U d\psi \right) \frac{(1-e^2)^{3/2}}{(1+e\cos\nu)^2} d\nu \quad (2.2)$$

Здесь учитывается, что

$$\frac{dt}{d\nu} = \frac{(1-e^2)^{3/2}}{(1+e\cos\nu)^2 \omega_0}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}, \quad \omega_0 \approx 1, \quad T_0 = 2\pi$$

В (2.2) через \bar{U} обозначена усредненная функция. Таким образом, усреднение по времени функций, зависящих от ν , сводится к усреднению по ν следующим образом:

$$M_t\{f(\nu)\} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(\nu) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1-e^2)^{3/2} f(\nu) d\nu}{(1+e\cos\nu)^2} = (1-e^2)^{3/2} M_\nu \left\{ \frac{f(\nu)}{(1+e\cos\nu)^2} \right\} \quad (2.3)$$

Далее, используя выражения направляющих косинусов $\alpha_2, \gamma_2, \alpha_3, \gamma_3$ через углы $\rho, \sigma, \theta, \psi$ получим среднее по ψ значение силовой функции U_g :

$$\langle U_g \rangle_\psi = \frac{3\omega_0^2}{8(1-e^2)^3} (1+e\cos\nu)^3 \{ (A-C)[(3\cos^2\theta-1)\sin^2\rho \times$$

$$\times (1+\cos 2(\nu-\sigma)) + 2\sin^2\theta] + (A-B)[2(1-\sin^2\theta\cos^2\varphi) +$$

$$+ \sin^2\rho(3\sin^2\theta\cos^2\varphi-1)(1+\cos 2(\nu-\sigma))] \}$$

После усреднения по ν согласно (2.3) получим

$$\bar{U}_g = \frac{3\omega_0^2}{8(1-e^2)^{3/2}} \{ (A-C)[2\sin^2\theta + (3\cos^2\theta-1)\sin^2\rho] +$$

$$+ (A-B)[2(1-\sin^2\theta\cos^2\varphi) + (3\sin^2\theta\cos^2\varphi-1)\sin^2\rho] \}$$

Вычисляя частные производные от усредненной функции \tilde{U}_g , находим

$$\partial \tilde{U}_g / \partial \psi = \partial \tilde{U}_g / \partial \sigma = 0$$

$$\frac{\partial \tilde{U}_g}{\partial \theta} = \frac{3\omega_0^2}{4(1-e^2)^{3/2}} \sin \theta \cos \theta (2 - 3 \sin^2 \rho) [-(A-B) \cos^2 \varphi + (A-C)] \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \tilde{U}_g}{\partial \rho} = \frac{3\omega_0^2}{4(1-e^2)^{3/2}} \sin \rho \cos \rho \{ (A-B)(-1 + 3 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi) + (A-C)(-1 + 3 \cos^2 \theta) \}$$

$$\frac{\partial \tilde{U}_g}{\partial \varphi} = \frac{3\omega_0^2}{4(1-e^2)^{3/2}} \sin \varphi \cos \varphi \sin^2 \theta (A-B)(2 - 3 \sin^2 \rho)$$

Аналогичным образом проводим усреднение функции U_c . Согласно обозначениям, принятым в [9]:

$$\cos^{n+1} \varepsilon_s = (d + g \cos v)^{n+1}$$

$$d = \cos \theta \sin \rho \cos(\sigma - v), \quad v = \psi - \chi$$

$$g = \{ \sin^2 \theta [\sin^2(\sigma - v) \sin^2 \rho + \cos^2 \rho] \}^{1/2} \quad (2.7)$$

$$\cos \chi = \sin \theta \sin(\sigma - v) \{ \sin^2 \theta [\sin^2(\sigma - v) \sin^2 \rho + \cos^2 \rho] \}^{-1/2}$$

$$\sin \chi = \sin \theta \cos \rho \cos(\sigma - v) \{ \sin^2 \theta [\sin^2(\sigma - v) \sin^2 \rho + \cos^2 \rho] \}^{-1/2}$$

Применяя формулу бинома Ньютона, выразим правую часть (2.7) следующим образом:

$$(d + g \cos v)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k \cos^k v (g^k d^{n+1-k}) \quad (2.8)$$

Далее, используя выражения для направляющих косинусов α_3, γ_3 оси Oz относительно системы координат $OXYZ$ через $\rho, \sigma, \theta, \psi$ [1], получим среднее по ψ значение силовой функции U_c :

$$\langle U_c \rangle_\psi = \frac{a_n R_0^2}{(n+1)R^2} \sum_{m=0}^{E(\frac{n+1}{2})} C_{n+1}^{2m} g^m d^{n+1-2m} \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \quad (2.9)$$

Функция $E(z)$ означает целую часть числа z . При получении выражения (2.9) учитывалось, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (d + g \cos v)^{n+1} dv = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k g^k d^{n+1-k} I_k$$

$$I_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^k v dv, \quad I_{2m+1} = 0, \quad I_{2m} = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}$$

Проведем теперь усреднение по v . Обозначим $u = \sigma - v$, тогда $d = h \cos u$, где $h = \cos \theta \sin \rho$. Выражение g^{2m} из (2.9) представим в виде

$$g^{2m} = \{ \sin^2 \theta [\sin^2 (\sigma - v) \sin^2 \rho + \cos^2 \rho] \}^m = (b + q \sin^2 u)^m$$

$$b = \sin^2 \theta \cos^2 \rho, \quad q = \sin^2 \theta \sin^2 \rho$$

Еще раз применяя формулу бинома Ньютона, получим

$$(b + q \sin^2 u)^m = \sum_{k=0}^m C_k^m (q^k b^{m-k}) \sin^{2k} u$$

Таким образом, в результате замены $u = \sigma - v$, второе усреднение силовой функции U_c будем проводить по u . Для этого необходимо рассмотреть интеграл

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (b + q \sin^2 u)^m (h \cos u)^{n-2m+1} du &= \sum_{k=0}^m C_k^m (q^k b^{m-k}) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^{2k} u (h \cos u)^{n+1-2m} du = \\ &= \sum_{k=0}^m h^{n+1-2m} C_k^m (q^k b^{m-k}) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^{2k} u (\cos u)^{n+1-2m} du \end{aligned}$$

Полученный интеграл вычисляется в явном виде [9, 11]:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^{2k} u (\cos u)^{n+1-2m} du = \begin{cases} 0, & n = 2l \\ \frac{(2k-1)!! [2(k+1-m)-1]!!}{[2(k+l+1-m)]!!}, & n = 2l+1, \quad l \in Z \end{cases}$$

Тогда, после усреднения (2.9) по u получим

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{2l+1} &= -\delta_l \sum_{m=0}^{l+1} \sum_{k=0}^m A_{lmk} (\cos \theta)^{2(l+1-m)} \sin^{2m} \theta (\sin \rho)^{2(l+1-m+k)} (\cos \rho)^{2(m-k)} \\ \delta_l &= \frac{a_{2l+1} R_0^2 (1-e^2)^{3/2}}{2(l+1)P^2} \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$A_{lmk} = C_{2(l+1)}^{2m} C_m^k \frac{(2m-1)!! (2k-1)!! [2(l+1-m)-1]!!}{(2m)!! [2(k+l+1-m)]!!}$$

Силовая функция для коэффициента момента сил светового давления вида (1.3) записывается следующим образом:

$$\tilde{U}_c(\theta, \rho) = \sum_{l=0}^Q U_{2l+1}(\theta, \rho), \quad Q = E \left(\frac{N-1}{2} \right) \quad (2.11)$$

Вычисляя частные производные от функции (2.11) с учетом (2.10) находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{U}_c}{\partial \sigma} &= \frac{\partial \tilde{U}_c}{\partial \psi} = \frac{\partial \tilde{U}_c}{\partial \phi} = 0 \\ \frac{\partial \tilde{U}_c}{\partial \rho} &= -2 \sum_{l=0}^Q \sum_{m=0}^{l+1} \sum_{k=0}^m \delta_l A_{lmk} (\cos \theta)^{2(l+1-m)} (\sin \theta)^{2m} (\sin \rho)^{2(l-m+k)+1} (\cos \rho)^{2(m-k)-1} \times \end{aligned}$$

$$\times [(l+1)\cos^2 \rho + k - m]$$

$$\frac{\partial \tilde{U}_c}{\partial \theta} = -2 \sum_{l=0}^Q \sum_{m=0}^{l+1} \sum_{k=0}^m \delta_l A_{lmk} (\cos \rho)^{2(l+1-m+k)} (\sin \rho)^{2(m-k)} (\sin \rho)^{2l-2m+1} (\cos \theta)^{2l-2m+1} \times$$

$$\times (\sin \theta)^{2m-1} [m - (l+1)\sin^2 \theta]$$

Коэффициенты δ_l и A_{lmk} определены в (2.10). Заметим, что коэффициенты a_{2l} в разложении (1.3) при усреднении исчезают.

Итак, усредненная система первого приближения принимает вид

$$\dot{\rho} = 0, \quad \dot{L} = 0, \quad \dot{\sigma} = (L_0 \sin \rho_0)^{-1} \partial U / \partial \rho$$

$$\dot{\theta} = L_0 \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi (A^{-1} - B^{-1}) + (L_0)^{-1} \frac{3\omega_0^2}{2(1-e^2)^{3/2}} \times$$

$$\times \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \rho_0\right) (B - A) \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi$$

$$\dot{\varphi} = L_0 \cos \theta (C^{-1} - A^{-1} \sin^2 \varphi - B^{-1} \cos^2 \varphi) -$$

$$- 2(L_0 \sin \theta)^{-1} \sum_{l=0}^Q \sum_{m=0}^{l+1} \sum_{k=0}^m \delta_l A_{lmk} (\sin \rho_0)^{2(l+1-m+k)} \times \quad (2.13)$$

$$\times (\cos \rho_0)^{2(m-k)} (\cos \theta)^{2l-2m+1} (\sin \theta)^{2m-1} [m - (l+1)\sin^2 \theta] +$$

$$+ \frac{3\omega_0^2}{2(1-e^2)^{3/2}} L_0^{-1} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \rho_0\right) \cos \theta [(A - C) + (B - A) \cos^2 \varphi]$$

$$\delta_l = \frac{a_{2l+1} R_0^2 (1-e^2)^{3/2}}{2(l+1)P^2}$$

где L_0, ρ_0 – значения L и ρ в начальный момент времени. Исследуем систему (2.13). Вектор кинетического момента остается постоянным по величине и постоянно наклоненным к нормали к плоскости орбиты. Рассмотрим уравнения для определения углов нутации θ и собственного вращения φ (2.13). Они описывают движение вектора кинетического момента L относительно связанной с телом системы координат.

3. Эволюция углов нутации и собственного вращения. Заметим, что

$$B - A \sim J_0^2 \frac{B - A}{AB}, \quad A - C \sim J_0^2 \frac{A - C}{AC} \quad (3.1)$$

Подставим в (2.13) выражение (3.1) и обозначим

$$D_0 = \frac{3\omega_0^2}{2\omega^2(1-e^2)^{3/2}} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \rho_0\right), \quad \omega = \frac{L_0}{J_0}$$

где ω – угловая скорость прецессии.

Переходом в (2.13) к медленному времени $\tau = L_0 \beta t$, где $\beta = A^{-1} - B^{-1}$, получим

$$\theta' = \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi (1 + D_0)$$

$$\begin{aligned} \checkmark \quad \varphi' &= \cos \theta (\mu - \sin^2 \varphi) (1 + D_0) - 2\beta^{-1} L_0^{-2} (\sin \theta)^{-1} \times \\ &\times \sum_{l=0}^Q \sum_{m=0}^{l+1} \sum_{k=0}^m \delta_l A_{lmk} (\sin \rho)^{2(l+1-m+k)} (\cos \rho)^{2m-2k} (\cos \theta)^{2l-2m+1} (\sin \theta)^{2m-1} \times \\ &\times [m - (l+1) \sin^2 \theta] \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\mu = -\gamma/\beta, \quad \gamma = B^{-1} - C^{-1}, \quad \beta = A^{-1} - B^{-1}, \quad (\dots)' = d/d\tau$$

С учетом предположения $a_{2l+1} \sim \varepsilon$ ($l = 0, \dots, Q$) и соотношения (3.1) получим, что $\beta, \gamma, \delta_l \sim \varepsilon$. Для системы (3.2) имеет место первый интеграл

$$\begin{aligned} c &= \sin^2 \theta (\mu - \sin^2 \varphi) - 2\beta^{-1} L_0^{-2} (1 + D_0)^{-1} \times \\ &\times \sum_{l=0}^Q \sum_{m=0}^{l+1} \sum_{k=0}^m \delta_l A_{lmk} (\cos \theta)^{2(l-m+1)} (\sin \theta)^{2m} (\cos \rho_0)^{2(m-k)} (\sin \rho_0)^{2(l+1-m+k)} = \text{const} \end{aligned} \quad (3.3)$$

При отсутствии влияния момента сил светового давления, т.е. при $a_{2l+1} = 0$ ($l = 0, \dots, Q$) система (3.3) имеет вид

$$\begin{aligned} \theta' &= \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi (1 + D_0) \\ \varphi' &= \cos \theta (\mu - \sin^2 \varphi) (1 + D_0) \end{aligned} \quad (3.4)$$

и имеет первый интеграл

$$c_1 = \sin^2 \theta (\mu - \sin^2 \varphi) = \text{const} \quad (3.5)$$

Для случая $n = 1$ ($l = 0$) $a_c = a_{0c} + a_{1c} \cos \varepsilon_s$, уравнения для определения θ и φ согласно (3.2) в медленном времени записываются следующим образом

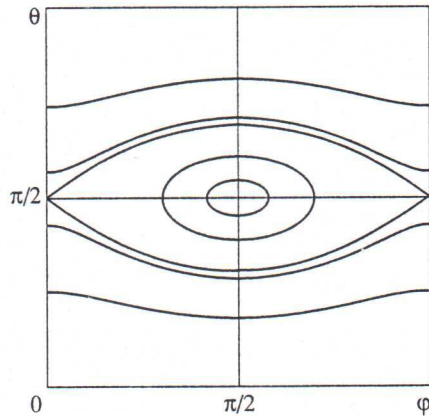
$$\begin{aligned} \theta' &= (1 + D_0) \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi \\ \varphi' &= (1 + D_0) \cos \theta (\mu_1 - \sin^2 \varphi) \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\mu_1 = \frac{\alpha - \gamma}{\beta}, \quad \alpha = -\frac{1}{2} L_0^{-2} (1 + D_0)^{-1} (1 - e^2)^{3/2} a_{1c} R_0^2 P^{-2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \rho_0\right)$$

В [2] впервые предложена процедура усреднения для исследования движения спутника, близкого к динамически-сферическому, под действием гравитационных моментов. В [2] исследована эволюция вращений спутника с близкими значениями трех главных моментов инерции под действием момента сил светового давления. Сравнивая систему (3.6) с соответствующей системой [10] для случая $a_c = a_{0c} + a_{1c} \cos \varepsilon_s$, заметим, что влияние гравитационного момента находится в множителях $1 + D_0$ в дифференциальных уравнениях для θ и φ в медленном времени. Выражения μ_1 с точностью до множителя $1/2(1 + D_0)^{-1}$ совпадает с аналогичным выражением в [10]. Наличие этого множителя обусловлено влиянием гравитационных сил. Для рассматриваемого случая первый интеграл (3.3) записывается следующим образом:

$$c_2 = \sin^2 \theta (\mu_1 - \sin^2 \varphi) = \text{const} \quad (3.7)$$

где μ_1 выражается как в (3.5). Первый интеграл (3.7) совпадает с соответствующим выражением из [10].



Фиг. 1

Исследование системы (3.5) аналогично исследованию соответствующей системы в [10]. Здесь переменные изменяются в пределах $0 \leq \theta < \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, а параметр μ может принимать различные значения $-\infty < \mu < +\infty$. Область допустимых значений параметров (c_2, μ_1) представима в виде $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, где каждая подобласть характеризуется свойствами: D_1 определяется неравенствами $\mu_1 \geq c_2 \geq 0$ ($\mu_1 \geq 1$), подобласть D_2 – соотношениями $\mu_1 \geq c_2 \geq \mu_1 - 1$ ($0 \leq \mu_1 \leq 1$) и подобласть D_3 – $0 \geq c_2 \geq \mu_1 - 1$ ($\mu_1 \leq 0$). Особыми подмножествами системы (3.5) являются границы подобластей D_1, D_2, D_3 . В областях D_1 и D_3 движение представляет собой колебания по θ и колебания или вращения по φ . В области D_2 имеют место колебания по θ и по φ .

Рассматриваются 11 различных характерных случаев выбора параметра μ_1 , см. [1]. Так, например, при $\mu_1 = 1.7$ графические зависимости θ от φ , полученные численно из первого интеграла (3.5), представлены на фиг. 1. Эти графики соответствуют только колебаниям по θ . По φ – колебания внутри сепаратрисы $\sin^2 \theta = \mu_1 (\mu_1 - \sin^2 \varphi)^{-1}$ и вращения вне сепаратрисы.

4. Частный случай выражения коэффициента формы. Пусть

$$a_c(\cos \varepsilon_s) = \sum_{k=0}^Q a_{2k} \cos^{2k} \varepsilon_s + a_3 \cos^3 \varepsilon_s \quad (4.1)$$

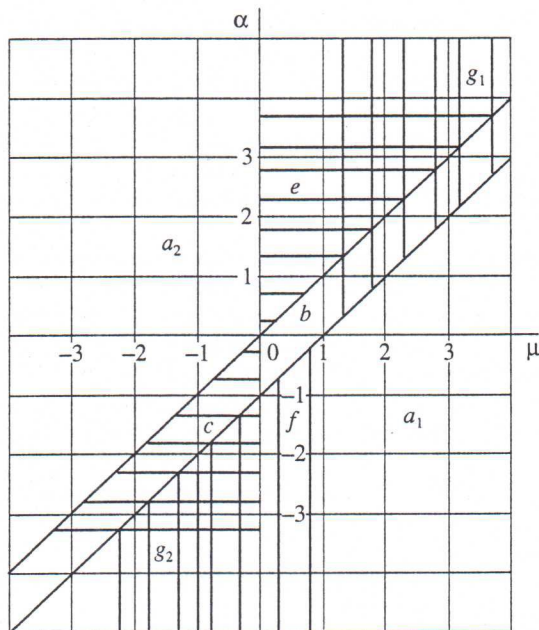
В этом случае уравнения для определения θ и φ принимают вид

$$\begin{aligned} \theta' &= (1 + D_0) \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi \\ \varphi' &= (1 + D_0) \cos \theta (\mu_3 - \sin^2 \varphi - \alpha_2 \sin^2 \theta) \\ \mu_3 &= -\gamma/\beta - \alpha_1 \beta s \end{aligned} \quad (4.2)$$

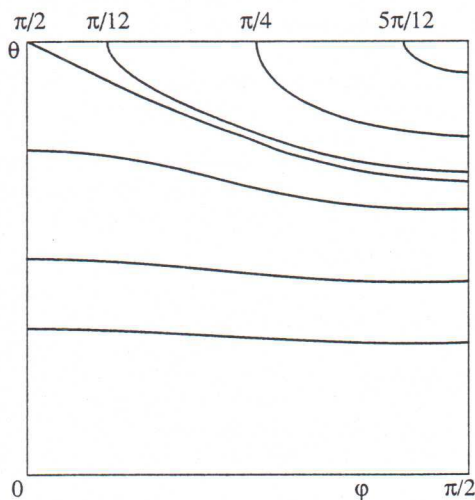
$$\alpha_1 = (1 + D_0)^{-1} \frac{3a_3 R_0^2}{64 L_0^2 P^2} (1 - e^2)^{3/2} (8 - 40 \sin^2 \rho_0 + 35 \sin^4 \rho_0)$$

$$s = \frac{4 \sin^2 \rho_0 (4 - 5 \sin^2 \rho_0)}{8 - 40 \sin^2 \rho_0 + 35 \sin^4 \rho_0}$$

Отметим, что при усреднении члены, содержащие четные степени a_{2k} , исчезают.



Фиг. 2



Фиг. 3

С учетом предположения $a_3 \sim \epsilon$, а также, учитывая соотношение (1.9), получим, что β , α , γ – величины порядка ϵ .

Для системы (4.2) имеет место первый интеграл

$$c_2 = \sin^2 \theta (\mu_2 - \sin^2 \varphi - 1/2 \alpha \sin^2 \theta) = \text{const} \quad (4.3)$$

В [9] было исследовано движение трехосного спутника, близкого к динамически-сферическому, под действием момента сил светового давления, где коэффициент момента

сил светового давления имеет вид (4.1), причем относительно коэффициента a_c выдвигаются те же предположения, что и в нашей задаче.

Сравнивая систему уравнений для θ и φ (4.2) с соответствующей системой [9] заметим, что влияние гравитационного момента заключается в множителе $(1 + D_0)$. Первые интегралы сравниваемых систем совпадают также с точностью до множителя $(1 + D_0)^{-1}$.

В системе (4.2) переменные θ , φ изменяются в пределах $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$; параметр μ может принимать произвольные значения $-\infty < \mu < +\infty$. Область допустимых значений (α, μ) приведена на фиг. 2.

Рассматриваются 9 различных характерных случаев выбора параметров (μ, α) , соответствующие каждой из указанных на фиг. 2 областей (см. [9]). Так, например, семейство фазовых траекторий усредненной системы в плоскости θ, φ при $\mu = -5$, $\alpha = -2$ (случай a_2) представлен на фиг. 3. Эти графики соответствуют колебаниям по углу θ , а по φ происходят либо колебания (внутри сепаратрисы), либо вращения (вне сепаратрисы): стационарные точки $(\pi/2, \pi/2)$ типа центр и $(\pi/2, 0)$ – типа седло. Аналогичный характер зависимости θ от φ будет и в случае (a_1) . Исследование других областей зависимостей (μ, α) аналогично рассмотренным в [9].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 05-01-00043, 05-01-00563) и программы НШ 1627.2003.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
2. Черноусько Ф.Л. О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 3. С. 474–483.
3. Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ, 1975. 308 с.
4. Карымов А.А. Устойчивость вращательного движения геометрически симметричного искусственного спутника Солнца в поле сил светового давления // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 5. С. 923–930.
5. Абалакин В.К., Аксенов Е.П., Гребеников Е.А., Демин В.Г., Рябов Ю.А. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М.: Наука, 1976. 862 с.
6. Поляхова Е.Н. Космический полет с солнечным парусом: проблемы и перспективы. М.: Наука, 1986. 304 с.
7. Сидоренко В.В. О вращательном движении космического аппарата с солнечным стабилизатором // Космич. исслед. 1992. Т. 30. Вып. 6. С. 780–790.
8. Сазонов В.В. Движение астероида относительно центра масс под действием момента сил светового давления // Астрон. вестник. 1994. Т. 28. № 2. С. 95–107.
9. Леценко Д.Д. Эволюция вращений трехосного тела под действием момента сил светового давления // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 6. С. 17–26.
10. Акуленко Л.Д., Леценко Д.Д. Эволюция вращений трехосного спутника, близкого к динамически-сферическому, под действием моментов сил светового давления // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 2. С. 3–12.
11. Тимофеев А.Ф. Интегрирование функций. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 432 с.

Москва

Поступила в редакцию
19.01.2004