Вращения волчка Лагранжа, близкие к псевдорегулярной прецессии, под действием нестационарного возмущающего момента сил

Dmytro Leshchenko
Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

Leonid D Akulenko
Russian Academy of Sciences

Воронежский государственный университет
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Математический институт имени В. А. Стеклова
Российской академии наук

МАТЕРИАЛЫ МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ «ВОРОНЕЖСКАЯ ЗИМНЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА С. Г. КРЕЙНА – 2016»

Под редакцией В. А. Костина

Воронеж
Издательско-полиграфический центр
«Научная книга»
2016

ликой Октябрьской социалистической революции». Воронеж: Изд-во ВГУ. 1957. С. 58—69.

76. *Шапошников В.А.* Философские взгляды Н. В. Бугаева и русская культура конца XIX — начала XX вв. Историко-матем. исслед. (вторая серия) М.: Янус-К. Вып. 7 (42). 2002. С. 62—91.

77. *Шейнин О.Б.* Публикации А. А. Маркова в газете «День» за 1914–1915 гг. Историко-матем. исслед. М.: Наука. Вып. 34. 1993. С. 194–206.

78. *Шереметевский В.Г.* Математика как наука и ее школьные суррогаты. Русская мысль. 1895.

79. *Шестов А.И.* Научная педагогика и русская школа (под ред. В. Г. Алексеева). Юрьев. 1916.

80. *Юшкевич А.П.* История математики в России до 1917 г. М.: Наука. 1968. 592 с.

81. *Юшкевич А.П.* Советские исследования по истории математики за шестьдесят лет (1917— 1977) // Историко-матем. исслед. М.: Наука. Вып. 24. С. 9—87.

82. *Яблонский Г.С., Быков В.И., Елохин В.И.* Кинетика модельных реакций гетерогенного катализа. Новосибирск: Наука. 1984. 224 с.

83. *Яблонский Г.С., Быков В.И., Горбанъ А.Н.* Кинетические модели каталитических реакций. Новосибирск: Наука. 1983. 254 с.

84. *Alexeev V., Gordan P.* Übereinstimmung der Formeln der Chemie und der Invari-antentheorie. Sitzungsberichte der physical-med. Societet zu Erlangen. 1900. Zeitschrft für phys. Chemie. B. 35.1900.

85. *Alexeev V.* Grafische Aufstellung des Simultanen Systems einer cubischen und einer biquadratischen Form, wodurch die Uebereinstimmung der atomistischen Theorie und der symbolischen Invariantetheorie hergestellt ist.Acta et commentatione. J. Univ. Yurjewensis. 1900.

86. *Alexeev V.* Über das Endlichkeitsproblem in der Chemie // Zeitschrift f ür phys. Chemie. B. 38. 1903. S. 750–753.

87. *Alexeev* V. Die Mathematik als Grundlage der Kritik Wissenschaftlich-philosophischer Weltanschauung // Уч. Записки Импер. Юрьевского университета. 1903.

88. *Alexeev V.* Über das Entwicklung des Begriffes der höheren arithmologischen Gesetzmässigkeit in Natur- und Geisteswissenschaften. 1903.

89. *Alexeev V.* Die arithmologischen und Wahrscheinlichkeits theoretischen Kasuali-täten, als grundlagen der strümpelischen, Klassifikation der Kinderfehler. Langesalza. 1907.

90. *Hilbert D.* Über die Endlichkeit des Invariantensystem f ür binare Grundforme // Math. Ann., 33. 1889. H. 223–226 (русский перевод в кн. Гильберт Д. Избранные труды. Т. 1. С. 13–15. М.: Факториал. 1998. 576 с.).

91. *Hilbert D.* Über die Theortie der algebraischen Formen // Math. Ann., B. 36. 1890. P. 473–534.

92. *Hilbert D.* Über die vollenen Invariantensysteme // Math. Ann., B. 42. 1893. P. 313–373.

93. *Plank M.* Über die Gesetz der Energieverteilung in Normalspectrum. Ann. Phys. 1901, 4. S. 553–563 (русский перевод в кн. Планк М. Избранные труды. М.: Наука. 1975. С. 258—267).

94. *Weil H.* Philosophy of Mathematics and Natural Sciences. Princeton University Press. 1949.

ВРАЩЕНИЯ ВОЛЧКА ЛАГРАНЖА, БЛИЗКИЕ К ПСЕВДОРЕГУЛЯРНОЙ ПРЕЦЕССИИ, ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕСТАЦИОНАРНОГО ВОЗМУЩАЮЩЕГО МОМЕНТА СИЛ

© 2016 *Л.Д. Акуленко*[1], *Д.Д. Лещенко*[2], *Т.А. Козаченко*[2]
[1](Москва, ИПМехРАН; *kumak@ipmnet.ru*)
[2](Одесса; *leshchenko_d@ukr.net*, *kushpil.ru@rambler.ru*)

Рассматриваются возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к псевдорегулярной прецессии, под действием возмущающего момента сил, медленно изменяющегося во времени. Уравнения движения имеют вид:

$$
\begin{gathered}
A\dot{p}+(C-A)\,qr=\mu\sin\theta\cos\varphi+\varepsilon M_1,\\
A\dot{q}+(A-C)\,pr=-\mu\sin\theta\sin\varphi+\varepsilon M_2,\\
C\dot{r}=\varepsilon M_3,\ M_i=M_i(p,\,q,\,r,\,\psi,\,\theta,\,\varphi,\,\tau),\ \ i=1,2,3,\\
\dot{\psi}=(p\sin\varphi+q\cos\varphi)\operatorname{cosec}\theta,\quad \tau=\varepsilon t,\\
\dot{\theta}=p\cos\varphi-q\sin\varphi,\quad \dot{\varphi}=r-(p\sin\varphi+q\cos\varphi)\mathrm{ctg}\theta.
\end{gathered}
\tag{1}
$$

Здесь p,q,r – проекции вектора угловой скорости тела на главные оси инерции тела; величины $M_i, i=1,2,3$ – проекции вектора возмущающего момента на те же оси, они зависят от медленного времени $\tau=\varepsilon t$ ($\varepsilon\ll 1$ – малый параметр, t – время); ψ,θ,φ – углы Эйлера; A – экваториальный, C – осевой момент инерции тела относительно точки O. Предполагается, что на тело действует восстанавливающий момент μ, величина которого постоянна.

Ставится задача исследования поведения решения системы (1) при значениях ε , отличных от нуля, на достаточно большом промежутке времени $t\sim\varepsilon^{-1}$ с помощью метода усреднения [1]. Приведем необходимые соотношения для невозмущенного движения. Первыми интегралами уравнений для системы (1) при $\varepsilon=0$ являются

$$
\begin{gathered}
G_z=A\sin\theta\,(p\sin\varphi+q\cos\varphi)+Cr\cos\theta=c_1,\\
H=\tfrac{1}{2}\left[A\left(p^2+q^2\right)+Cr^2\right]+\mu\cos\theta=c_2,\ \ r=c_3\,.
\end{gathered}
\tag{2}
$$

Здесь G_z – проекция вектора кинетического момента на вертикаль Oz , H – полная энергия тела, r – проекция вектора угловой скорости на ось динамической симметрии, $c_i, i=1,2,3$ – произвольные постоянные, $c_2\geq-\mu$.

Известны [2] приближенные выражения для угла нутации θ и корней $u_i, i=1,2,3$ кубического многочлена в невозмущенном движении

$$
\begin{gathered}
u=\cos\theta\approx u_0-\tfrac{1-u_0^2}{2d}\cos^2(\alpha t+\beta),\quad u_1\approx u_0-\tfrac{1-u_0^2}{2d},\\
k^2=(u_2-u_1)\,(u_3-u_1)^{-1}\ll 1,\ \alpha=\left[\mu\,(u_3-u_1)\,/\,(2A)\right]^{1/2},\\
2d=\tfrac{C^2r_0^2}{2A\mu}>>1,\quad u_2=u_0,\quad u_3\approx 2d,\quad u_1<<u_3.
\end{gathered}
\tag{3}
$$

Здесь $u_0=\cos\theta_0$, θ_0 – начальный угол отклонения, r_0 – большая начальная скорость вращения тела вокруг своей оси, k – модуль эллиптических функций.

В данной работе методика усреднения, разработанная в [3], используется для усреднения системы (1) при возмущениях, зависящих от медленного времени τ и допускающих усреднение по углу нутации θ. Первые три уравнения (1) приведем с помощью ряда преобразований к виду [3]:

$$
\begin{gathered}
\dot{G}_z=\varepsilon\left[(M_1\sin\varphi+M_2\cos\varphi)\sin\theta+M_3\cos\theta\right],\\
\dot{H}=\varepsilon\,(M_1p+M_2q+M_3r)\,,\\
\dot{r}=\varepsilon C^{-1}M_3,\ \ M_i=M_i\,(p,q,r,\psi,\theta,\varphi,\tau)\,,\ \ i=1,2,3\,.
\end{gathered}
\tag{4}
$$

Потребуем, чтобы правые части уравнений (4) для медленных переменных зависели лишь от угла нутации θ и были бы периодическими функциями времени с периодом 2π. Далее подставим в правые части системы (4) быструю переменную θ из выражения (3) для невозмущенного движения

$$
\theta=\arccos\left[u_0-\tfrac{1-u_0^2}{2d}\cos^2(\alpha t+\beta)\right],\ \ \theta_1\leq\theta\leq\theta_2.
\tag{5}
$$

Усредняя правые части полученной системы по t, получим с учетом (3) усреднённую систему первого приближения

$$
\begin{gathered}
\dot{G}_z=\varepsilon V_1\,(G_z,H,r,\tau)\,,\quad \dot{H}=\varepsilon V_2\,(G_z,H,r,\tau)\,,\\
\dot{r}=\ \varepsilon V_3\,(G_z,H,r,\tau)\,,\quad i=1,2,3,\\
V_i\,(G_z,H,r,\tau)=\tfrac{\alpha}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi/\alpha}F_i\,(G_z,H,r,\,\tau,\theta\,(t))\,dt.
\end{gathered}
\tag{6}
$$

Полученная усредненная система уравнений значительно проще исходной, так как автономна и не содержит быстрых осцилляций.

Исследуем возмущенное движение, близкое к псевдорегулярной прецессии в случае Лагранжа, с учетом линейно - диссипативных моментов сил, медленно изменяющихся во времени:

$$
\begin{gathered}
M_1=-a(\tau)p,\quad M_2=-a(\tau)q,\\
M_3=-b(\tau)r,\quad a(\tau),b(\tau)\neq 0,\ \ \tau=\varepsilon t.
\end{gathered}
\tag{7}
$$

Здесь $a(\tau), b(\tau)$ – интегрируемые функции, зависящие от свойств среды и формы тела.

Система (4) для моментов указанного вида записывается следующим образом:

$$\begin{gathered}\dot{G}_z = -\varepsilon\left\{A^{-1}G_z a(\tau) - A^{-1}Cra(\tau)\cos\theta + rb(\tau)\cos\theta\right\}, \\ \dot{H} = -\varepsilon\{2A^{-1}Ha(\tau) - 2A^{-1}\mu a(\tau)\cos\theta - \\ -r^2\left[A^{-1}Ca(\tau) - b(\tau)\right]\}, \quad \dot{r} = -\varepsilon C^{-1}b(\tau)r.\end{gathered} \tag{8}$$

Рассмотрим случай, когда $a(\tau), b(\tau)$ имеют вид:

$$a(\tau) = a_0 + a_1\tau, \;\; b(\tau) = b_0 + b_1\tau, \;\; a_0, a_1, b_0, b_1 - const$$

Проинтегрировав третье уравнение (8), получим:

$$r = r_0 \exp\left(-\varepsilon b_0 C^{-1} t\right) \tag{9}$$

После ряда преобразований решение усредненной системы уравнений (8) первого приближения записывается следующим образом:

$$\begin{gathered}G_z = \left\{\lambda - \tfrac{\zeta C^2 r}{2\mu A b_0}\left[\eta_1 + \eta_{11}\left(\tau + Cb_0^{-1}\right)\right]\right\}\exp\left(-a_0A^{-1}\tau\right) + \\ +\tfrac{Cr^3}{4\mu\eta_2\eta_3}\left\{C\left(1 + CA^{-1}\right)\left[\eta_1 a_3 + \xi_3\left(\eta_1 a_1 + \eta_{11}a_3\right)\right] - \right. \\ \left. -2A\left[\eta_1 b_3 + \xi_3\left(\eta_1 b_1 + \eta_{11} b_3\right)\right]\right\} - \tfrac{C^3 r_0^2 A r}{4\mu\eta_1}\left\{\eta_1\left(1 + A^2 a_4 a_0^{-1}\right) + \right. \\ \left. +\xi_1\left[1 + A^2 a_0^{-1}\left(\eta_1 a_1 + \eta_{11}a_4\right)\right]\right\} - \tfrac{C^2 r^2\left(1 - CA^{-1}\right)}{4\mu\eta_2}\left[\eta_1 + \xi_2\eta_{11}\right],\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}H = \zeta\exp\left(-aA^{-1}\tau\right) - \tfrac{C^2 r_0^2}{2Aa_0}\left(a_4 + a_1\tau\right) + \\ +\tfrac{r^2}{2\eta_2}\left[C\left(1 + CA^{-1}\right)\left(a_3 + a_1\tau\right) - 2A\left(b_3 + b_1\tau\right)\right],\end{gathered} \tag{10}$$

$$\begin{gathered}\eta_i = a_0 - ib_0AC^{-1}, \; \xi_i = \tau - A\eta_i^{-1}, \; \eta_{11} = a_1 - b_1AC^{-1}, \\ a_3 = a_0 - a_1A\eta_2^{-1}, \; a_4 = a_0 - a_1Aa_0^{-1}, \; b_3 = b_0 - b_1A\eta_2^{-1}, \\ i = 1, 2, 3,\end{gathered}$$

$$\zeta = H_0 + \tfrac{C^2 r_0^2 a_4}{2Aa_0} - \tfrac{r_0^2}{2\eta_2}\left[C\left(1 + CA^{-1}\right)a_3 - 2Ab_3\right],$$

$$\begin{gathered}\lambda = G_{z0} + \tfrac{C^2 r^2\left(1 - CA^{-1}\right)}{4\mu\eta_2}\left(\eta_1 - \eta_{11}A\eta_2^{-1}\right) - \\ -\tfrac{Cr_0^3}{4\mu\eta_2\eta_3}\left\{C\left(1 + CA^{-1}\right)\left[\eta_1 a_3 - A\eta_3^{-1}\left(\eta_1 a_1 + \eta_{11}a_3\right)\right] - \right. \\ \left. -2A\left[\eta_1 b_3 - A\eta_3^{-1}\left(\eta_1 b_1 + \eta_{11}b_3\right)\right]\right\} + \tfrac{C^3 r_0^3 A}{4\mu\eta_1}\left\{\eta_1\left(1 + A^2 a_4 a_0^{-1}\right) - \right. \\ \left. -A\eta_1^{-1}\left[1 + A^2 a_0^{-1}\left(\eta_1 a_1 + \eta_{11}a_4\right)\right]\right\} + \tfrac{\zeta C^2 r_0}{2\mu A b_0}\left(\eta_1 + \eta_{11}Cb_0^{-1}\right).\end{gathered}$$

Здесь H_0, G_{z0} – начальные значения полной энергии тела и проекции вектора кинетического момента на вертикаль Oz.

Модуль осевой скорости вращения r и проекция G_z вектора кинетического момента монотонно уменьшаются по экспонентам согласно (9), (10). Полная энергия H монотонно убывает, асимптотически приближаясь к значению $H = -C^2r_0^2/2A$.

Литература

1. *Волосов В.М., Моргунов Б.И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971 – 507с.

2. *Магнус К.* Гироскоп. Теория и применение. М.: Мир, 1974 - 526с.

3. *Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноусько Ф.Л.* Возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа // Прикладная математика и механика. - 1979. - Т.43, №5. - С.771-778.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА В КВАЗИСОБОЛЕВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

© 2016 *Дж.К. Аль Исави*

(Челябинск, ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет»(НИУ); *jtahir71@gmail.com*)

1. Голоморфные вырожденные полугруппы операторов

Пусть здесь и далее $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$ – монотонная последовательность такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty$. *Квазисоболевым* называется квазибанахово пространство