УДК 515.2

К АНАЛИТИПЧЕСКОМУ ОПИСАНИЮ СОПРЯЖЕНИЯ ДВУХОКРУЖНОСТЕЙ

***Згонников К.С.**, **Згонников С.С.** ПГС*-153.
Научные руководители – к.т.н. проф. ***Калинин А.А.**, **Ковалева Г.В.***

При построении сопряженных кривых в некоторых случаях возникает необходимость точного графического построения, которая продиктована условиями производства работ (например, стыковка железнодорожных путей). В работе [1] было дано графическое и аналитическое решение задачи о внешнем сопряжении двух окружностей без заданного радиуса сопряжения по заданной точке сопряжения на одной из окружностей.Очевидно, что не для всех точек окружности такая задача может быть решена. В настоящей работе найдены условия, которым должна удовлетворять точка, чтобы указанное сопряжение было возможно, а также рассмотрено геометрическое место центров сопрягающих окружностей.

Пусть даны окружности радиусовr_1 и r_2соответственно с центрами O_1 и O_2, сопряженные окружностью радиуса R с центром D(рис. 1),

$$O_1O_2 = l. \tag{1}$$

Согласно результатам работы [1], внешнее сопряжение с точкой сопряженияAвозможно только в том случае, когда прямая AO_1 пересекает серединный перпендикуляр CDк отрезку MO_2, где M – точка на радиусе AO_1 такая, что $AM = r_2$(рис.2).На рисунке 2 изображен случай, когда AO_1параллельнаCD.

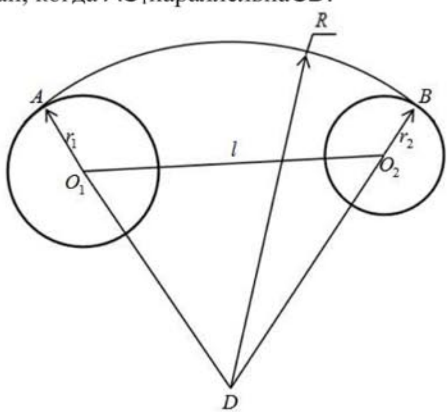


Рисунок 1

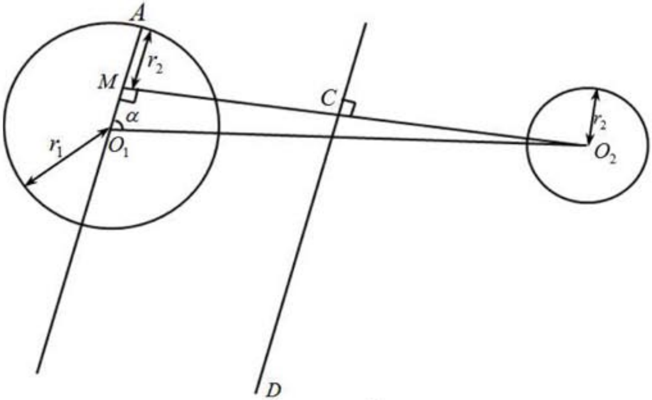


Рисунок 2

Очевидно, что AO1 пересечёт CD, если угол $\alpha = \angle AO_1O_2$ будет больше, чем изображённый на рис.2. Найдём угол α, соответствующий ситуации на рис.2:

$$\cos\alpha = \frac{O_1M}{O_1O_2} = \frac{r_1 - r_2}{l} \qquad (2)$$

Таким образом, внешнее сопряжение окружностей с точкой сопряжения *A* возможно только в том случае, когда

$$\cos\angle AO_1O_2 < \frac{r_1 - r_2}{l} \qquad (3)$$

Рассмотрим теперь вопрос о геометрическом месте центров сопряжения. Согласно рис. 1 $AD = BD$, значит,

$$r_1 + O_1D = r_2 + O_2D \Rightarrow O_2D - O_1D = r_1 - r_2 \qquad (4)$$

Разность расстояний от центра сопряжения до центров окружностей постоянная, следовательно, любой центр сопряжения лежит на гиперболе, а центры окружностей O_1 и O_2 являются её фокусами. Тогда параметры a и b в уравнении гиперболы находятся следующим образом:

$$2a = r_1 - r_2; \quad 2c = l \qquad (5)$$

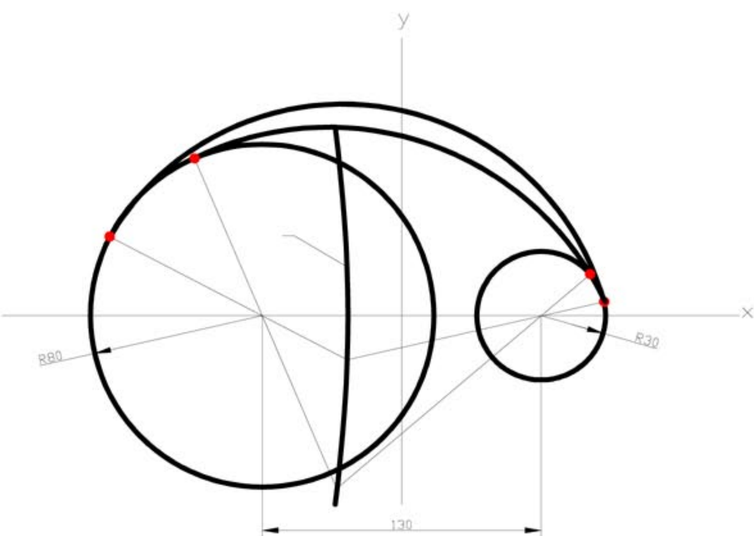
Отсюда:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{\frac{l^2}{4} - \frac{(r_1 - r_2)^2}{4}} \qquad (6)$$

Поскольку по смыслу задачи O_2D всегда больше O_1D, то центры сопряжения расположены только на левой ветви этой гиперболы. Если начало координат поместить посередине между O_1 и O_2, а ось Ox направить по прямой O_1O_2, то уравнение гиперболы будет иметь вид:

$$\frac{4x^2}{(r_1-r_2)^2}-\frac{4y^2}{l^2-(r_1-r_2)^2}=1 \qquad (7)$$

На рис.3 показано построение сопряжений по заданным на окружности точкамА и В с использованием кривой центровсопряжений.



1. Кривая центров сопряжения (гипербола)

Рисунок 3

Литература

1. О.А. Нікітенко, О.О. Калінін, Т.О. Калініна.Деякізадачі для спряженихкривих другого порядку // Науковінотатки, вип. № 22, Луцьк, 2008.