Министерство общего и профессионального
образования Российской Федерации

Таганрогский государственный педагогический
институт

ТРУДЫ

Международной конференции
"Математика в индустрии"

29 июня – 3 июля 1998 года

Издательство Таганрогского государственного
педагогического института.

Таганрог – 1998

$$X_3^C = -\mu(A-B)sl\Omega^2[\frac{\sin\Omega t}{P(\Omega)} + \sum_{j=1}^{4}\frac{1}{\kappa_j P'(\sigma_j)}e^{-\nu\lambda_j t}\sin\sigma_j t].$$

Предельную конфигурацию системы тело-подвес характеризует положение цен[illegible] подвеса по отношению к вертикали. Определяет эту конфигурацию разность

$$\Delta = [(X_2^0)^2 + (X_3^0)^2] - [(X_2^C)^2 + (X_3^C)^2] = \mu^2(A-B)s^2l^2\Omega^4(\Omega^4-1)/P^2(\Omega),$$

или, в размерных величинах,

$$\Delta = (A_2-A_1)^2a_2^2\Omega^4(\Omega^4 - g^2/l^2)/P^2(\Omega).$$

Этот результат полностью объясняет наблюдаемые в экспериментах эффекты [[illegible] $\Omega < \sqrt{g/l}$ наблюдается движение, показанное на рис. 3 б [3, с.92], когда центр масс [illegible] к вертикали находится дальше точки подвеса, и при $\Omega > \sqrt{g/l}$ имеем стациона[illegible] показанные на рис. 3 в (центр масс тела ближе к вертикали, чем точка подвеса).

Литература

1. Харламов П.В. К постановке задачи о движении тела на подвесе. См. настоящий сбор[illegible]
2. Ишлинский А.Ю. Механика: идеи, задачи, приложения. М.: Наука, 1985. - 624 с.
3. Ишлинский А.Ю. Прикладные задачи механики. Кн.2. Механика упругих и абсолют[illegible] М.: Наука, 1986. - 416 с.
4. Лесина М.Е., Харламов А.П. Новый подход к построению аксоидов в задаче о движен[illegible] связанных тел // Механика твердого тела. - 1993. - Вып. 25. - С. 30-42.

Донецкий Государственный Технический Университет
ул. Артема,50; Донецк, 340000, Украина,
Институт прикладной математики и механики
ул. Розы Люксембург, 74; Донецк, 340114, Украина

Эволюция вращений твердого тела, близких к псевдорегул[illegible] прецессии.

Д.Д.Лещенко

Рассматривается возмущенное движение относительно неподвижной точки O дин[illegible] метричного тяжелого твердого тела в случае возмущений произвольной природы. У[illegible] жения имеют вид [1]

$$\begin{aligned}
&A\dot{p} + (C-A)qr = mgl\sin\theta\cos\varphi + \varepsilon M_1\\
&A\dot{q} + (A-C)pr = -mgl\sin\theta\sin\varphi + \varepsilon M_2\\
&C\dot{r} = \varepsilon M_3, \quad M_i = M_i(p,q,r,\psi,\theta,\varphi), \quad i=1,2,3\\
&\dot{\psi} = (p\sin\varphi + q\cos\varphi)\csc\theta, \quad \dot{\theta} = p\cos\varphi - q\sin\varphi\\
&\dot{\varphi} = r - (p\sin\varphi + q\cos\varphi)\cot\theta.
\end{aligned}$$

Первыми интегралами уравнений невозмущенной системы (1), когда малый параметр $\varepsilon =$ [illegible] Лагранжа) являются [2]

$$\begin{aligned}
&G_z = A\sin\theta(p\sin\varphi + q\cos\varphi) + Cr\cos\theta = C_1\\
&H = \tfrac{1}{2}[A(p^2+q^2) + Cr^2] + mgl\cos\theta = C_2, \quad r = C_3.
\end{aligned}$$

Через u_1, u_2, u_3 обозначены вещественные корни кубического многочлена

$$Q(u) = A^{-2}\left[(2H - Cr^2 - 2mglu)(1-u^2)A - (G_z - Cru)^2\right], \quad -1 \le u_1 \le u_2 \le 1 < u_3 < \dots$$

лагается, что угловая скорость достаточно велика, так что кинетическая энергия тела много е потенциальной энергии $\frac{Cr^2}{2} \gg mgl$.

вестны [2] приближенные выражения для угла нутации θ и корней u_i $(i = 1, 2, 3)$ в невозму- ном движении (псевдорегулярная прецессия)

$$
\begin{array}{l}
u \approx u_0 - \frac{1-u_0^2}{2d}\cos^2\tau \quad u_1 \approx u_0 - \frac{1-u_0^2}{2d}, \quad u_2 = u_0, \quad u_3 \approx 2d \\
k^2 = (u_2 - u_1)(u_3 - u_1)^{-1} \ll 1, \quad u_1 \ll u_3.
\end{array}
\tag{4}
$$

где $u_0 = \cos\theta_0$, θ_0 – начальный угол отклонения; $2d = \frac{C^2 r_0^2}{2Amgl} \gg 1$, $\tau = \alpha t + \beta$, $\alpha = \left[mgl\frac{(u_3-u_1)}{2A}\right]^{1/2}$, дуль эллиптических функций.

При этом корни кубического многочлена u_1, u_2 выражаются через первые интегралы уравнений движения невозмущенной системы следующим образом

$$
\begin{array}{l}
u_1 = S \mp \sqrt{S^2 - n}, \quad u_2 = S \pm \sqrt{S^2 - n} \\
S = (4Amgl)^{-1}\left[2AH + C(C-A)r^2 - C^2 t_0^2\right], \\
n = C^{-2} r_0^{-2}(-2AH + ACr^2 + G_z^2).
\end{array}
\tag{5}
$$

сматриваемой задаче параметр ε характеризует малость возмущений. Можно положить, что $\delta \ll 1$.

Приведем уравнения возмущенного движения к виду, допускающему применение метода усреднения [3]. При $\varepsilon < \delta$ и $\varepsilon \sim \delta$ усреднение оправдано. первые интегралы (2) и угол ψ для возмущенного движения, близкого к псевдорегулярной прецессии, – медленные переменные, а углы φ и θ – быстрые переменные.

Приведем первые три уравнения (1) к виду

$$
\begin{array}{l}
\dot{G}_z = \varepsilon\left[(M_1\sin\varphi + M_2\cos\varphi)\sin\theta + M_3\cos\theta\right] \\
\dot{H} = \varepsilon(M_1 p + M_2 q + M_3 r) \\
\dot{r} = \varepsilon C^{-1} M_3, \quad M_i = M_i(p, q, r, \psi, \theta, \varphi), \quad i = 1, 2, 3.
\end{array}
\tag{6}
$$

Потребуем, чтобы комбинации $M_1\sin\varphi + M_2\cos\varphi$, $M_1 p + M_2 q$, M_3, входящие в правые части (6), могли быть представлены как функции от G_z, H, r, θ, периодические по θ с периодом 2π. Это возможно, если возмущающие моменты M_i удовлетворяют условиям

$$
M_1 = pf, \quad M_2 = qf, \quad M_3 = M_3^* \tag{7}
$$

или

$$
M_1 = F\sin\varphi, \quad M_2 = F\cos\varphi, \quad M_3 = M_3^* \tag{8}
$$

где $f = f(G_z, H, r, \theta)$, $F = F(G_z, H, r, \theta)$, $M_3^* = M_3^*(G_z, H, r, \theta)$.

После ряда преобразований получим усредненную систему первого приближения

$$
\dot{G}_z = \varepsilon V_1(G_z, H, r) \;\; \dot{H} = \varepsilon V_2(G_z, H, r) \;\; \dot{r} = \varepsilon V_3(G_z, H, r) \tag{9}
$$

где

$$
V_i(G_z, H, r) = \frac{\alpha}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi/\alpha} F_i(G_z, H, r, \theta(t))dt
$$

Решив система (9) для G_z, H, r, медленные переменные u_1, u_2 определим по формулам (5).

Исследуем движение, близкое к псевдорегулярной прецессии в случае Лагранжа, в сопротивляющейся среде. Возмущающие моменты M_i $(i = 1, 2, 3)$ имеют вид [4]

$$
M_1 = -ap, \quad M_2 = -aq, \quad M_3 = -br, \quad a, b > 0. \tag{10}
$$

Система (6) для моментов указанного вида записывается следующим образом

$$\dot{G}_z = -\varepsilon\left[aA^{-1}(G_z - Cr\cos\theta) + br\cos\theta\right]$$
$$\dot{H} = -\varepsilon\{aA^{-1}[2(H - mgl\cos\theta) - Cr^2] + br^2\}$$
$$\dot{r} = -\varepsilon bC^{-1}r.i = 1, 2, 3.$$

Проинтегрировав третье уравнение (11), находим

$$r = r_0 e^{-bC^{-1}\xi}$$

Здесь $\xi = \varepsilon t$ – медленное время.

Получена усредненная система первого приближения для G_z, H, решение котор

для полной энергии H имеет вид

$$H = \frac{(aC^2 + ACa - 2bA^2)Cr_0^2}{2A(aC - 2bA)} e^{-2bC^{-1}\xi} - \frac{C^2r_0^2}{2A} + \left(H_0 - \frac{Cr_0^2}{2} - \frac{C^2r_0^2 b}{aC - 2bA}\right) e^{-}$$

Здесь H_0, r_0 – произвольные начальные значения соответствующих переменных.

Отметим некоторые качественные особенности движения в данном случае. Мо

рости вращения r монотонно уменьшается по экспоненте согласно (12). Полная

тонно убывает, асимптотически приближаясь к значению $H = -\frac{C^2r_0^2}{2A}$. Из (13), (5)

выражения для G_z следует, что величины u_1, u_2 монотонно убывают и стремятся к

$$u_1 = -\frac{C^2r_0^2}{Amgl} \mp \sqrt{\left(\frac{C^2r_0^2}{Amgl}\right)^2 - 1}, \quad u_2 = -\frac{C^2r_0^2}{Amgl} \pm \sqrt{\left(\frac{C^2r_0^2}{Amgl}\right)^2 - 1}$$

Литература.

1.Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноусько Ф.Л. *Возмущенные движения твердого тела,* *Лагранжа* // ПММ.- 1979.- Т.43, 5.- с.771-778.

2.Магнус К. *Гироскоп. Теория и применение.* - М.: Мир, 1974. - 626с.

3.Волосов В.М., Моргунов Б.И. *Метод осреднения в теории нелинейных колебательных* МГУ, 1971. - 507с.

4.Кошляков В.Н. *Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов: Анал* - М.: Наука, 1985. - 288с.

Одесская государственная академия холода, ул. Дворянская, 1/3, Одесса, 270026, Укр

Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся

Б.Я.Локшин, Ю.М.Окунев, В.А.Самсонов

Обсуждается комплекс имитационного моделирования серии задач о движени

или в потоке среды.

Доклад содержит демонстрацию фрагментов этого комплекса, используемых в

терного сопровождения лекций одноименного спецкурса.

Работа выполнялась при поддержке РФФИ-97-01-01087.

Институт механики МГУ

Мичуринский пр., 1, Москва, 117192, Россия