

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/308660672>

Эволюция вращательно-колебательных движений твердого тела , близких к случаю Лагранжа

Conference Paper · September 2016

CITATIONS

0

READS

13

4 authors, including:



Dmytro Leshchenko

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

217 PUBLICATIONS **229** CITATIONS

[SEE PROFILE](#)



Leonid D Akulenko

Russian Academy of Sciences

538 PUBLICATIONS **1,165** CITATIONS

[SEE PROFILE](#)

Some of the authors of this publication are also working on these related projects:



Numerical Solution of Eigenproblems and Natural Vibrations of Mechanical Systems [View project](#)



Control Problems for Distributed Parameters Systems [View project](#)

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
НАУЧНЫЙ СОВЕТ ПО ПРОБЛЕМАМ
МАШИНОВЕДЕНИЯ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО НАУЧНЫХ ОРГАНИЗАЦИЙ
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МАШИНОСТРОЕНИЯ РАН
– ФИЛИАЛ ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО НАУЧНОГО
УЧРЕЖДЕНИЯ «ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКИ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК»

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО»

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

ТРУДЫ
X ВСЕРОССИЙСКОЙ НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ
им. Ю.И. Неймарка

Нижний Новгород, 26 – 29 сентября 2016 года

Конференция проводится при финансовой поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований
(проект 16-08-20664-Г)

Нижний Новгород
2016

ЭВОЛЮЦИЯ ВРАЩАТЕЛЬНО-КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА, БЛИЗКИХ К СЛУЧАЮ ЛАГРАНЖА

Л.Д. Акуленко¹, Я.С. Зинкевич², Т.А. Козаченко², Д.Д. Лешенко²

¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН,
119526 Россия, Москва, пр. Вернадского, 101, корп. 1, e-mail: kumak@ipmnet.ru

²Одесская государственная академия строительства и архитектуры,
65029 Украина, Одесса, ул. Дидрихсона, 4,
e-mail: leshchenko_d@ukr.net, kushpil.ru@rambler.ru

Исследуется возмущенное движение относительно неподвижной точки динамически симметричного тяжелого твердого тела в случае возмущающих моментов, зависящих от медленного времени. Приведены условия возможности усреднения уравнений движения по фазе угла нутации, полученная усредненная система уравнений. Построено численное решение усредненной системы уравнений движения твердого тела под действием диссипативных моментов при различных условиях и параметрах задачи.

Ключевые слова: возмущенное движение, усреднение, угол нутации, момент, случай Лагранжа.

Введение. Задача о движении твердого тела относительно неподвижной точки является одной из классических задач механики. Объекты в природе и технике (летательные аппараты, космические и подводные корабли, небесные тела) с учетом действующих возмущений и их внутренней структуры могут быть смоделированы в виде одного твердого тела. При рассмотрении движения этих объектов возникает необходимость исследований вращательных движений твердых тел под действием внешних и внутренних моментов сил.

На протяжении многих лет разработаны различные методики для анализа таких движений. Особенно велика роль асимптотических методов, позволяющих при их корректном применении уже в первом приближении выявить основные особенности движения. Один из таких методов - метод усреднения [1,2]. С помощью этого метода были исследованы движения волчка Лагранжа под действием возмущающих моментов произвольной природы. В [3,4,6-8] описана процедура усреднения для медленных переменных, приведены условия возможности усреднения, получены усредненные системы уравнений в первом и втором приближении.

Основные результаты. Рассматривается движение динамически симметричного твердого тела вокруг неподвижной точки O под действием возмущений произвольной природы. Уравнения движения имеют вид:

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - A)qr &= \mu \sin \theta \cos \varphi + \varepsilon M_1, \\ A\dot{q} + (A - C)pr &= -\mu \sin \theta \sin \varphi + \varepsilon M_2, \\ C\dot{r} &= \varepsilon M_3, \quad M_i = M_i(p, q, r, \psi, \theta, \varphi, \tau), \quad i = 1, 2, 3, \\ \dot{\psi} &= (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{cosec} \theta, \quad \tau = \varepsilon t, \\ \dot{\theta} &= p \cos \varphi - q \sin \varphi, \quad \dot{\varphi} = r - (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{ctg} \theta. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь p, q, r – проекции вектора угловой скорости тела на главные оси инерции тела; величины εM_i ($i = 1, 2, 3$) – проекции вектора возмущающего момента на те же оси, они зависят от медленного времени $\tau = \varepsilon t$ ($\varepsilon \ll 1$ – малый параметр, t – время); ψ, θ, φ – углы Эйлера [8,9], A – экваториальный, C – осевой момент инерции тела относительно точки O . Предполагается, что на тело действует восстанавливающий момент, максимальная величина которого равна μ и который создается постоянной по величине и направлению силой, приложенной в некоторой фиксированной точке оси динамической симметрии. В случае тяжелого

волчка имеем $\mu = mgl$, m – масса тела, g – ускорение силы тяжести, l – расстояние от неподвижной точки O до центра тяжести тела.

Ставится задача исследования поведения решений системы (1) при значениях малого параметра ε на интервале времени порядка ε^{-1} . Для решения поставленной задачи применяется процедура усреднения разработанная в [3,8]. Данная методика используется для усреднения системы (1) при возмущениях, зависящих от медленного времени τ и допускающих усреднение по фазе угла нутации θ .

В случае невозмущенного движения, первыми интегралами уравнений для системы (1) при $\varepsilon = 0$ являются

$$\begin{aligned} G_z &= A \sin \theta (p \sin \varphi + q \cos \varphi) + Cr \cos \theta = c_1, \\ H &= \frac{1}{2} [A(p^2 + q^2) + Cr^2] + \mu \cos \theta = c_2, \quad r = c_3. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь G_z – проекция вектора кинетического момента на вертикаль Oz , H – полная энергия тела, r – проекция вектора угловой скорости на ось динамической симметрии, c_i ($i = 1, 2, 3$) – произвольные постоянные ($c_2 \geq -\mu$).

Выражение для угла нутации θ в невозмущённом движении как функции времени t , интегралов движения (2) и произвольной фазовой постоянной β известно [8,9]:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= u_1 + (u_2 - u_1) \operatorname{sn}^2(\alpha t + \beta), \quad -1 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1 \leq u_3 < +\infty, \\ \alpha &= [\mu(u_3 - u_1) / (2A)]^{1/2}, \quad \operatorname{sn}(\alpha t + \beta) = \operatorname{sn} \alpha m(\alpha t + \beta, k), \\ k^2 &= (u_2 - u_1)(u_3 - u_1)^{-1}, \quad 0 \leq k^2 \leq 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь sn – эллиптический синус, k – модуль эллиптических функций, через u_1, u_2, u_3 обозначены вещественные корни кубического многочлена

$$Q(u) = A^{-2} [3H - Cr^2 - 2\mu u] A - (A - Cr u)^2 \quad (4)$$

Соотношения между корнями $Q(u)$ и первыми интегралами (2) записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + u_3 &= \frac{H}{\mu} - \frac{Cr^2}{2\mu} + \frac{C^2 r^2}{2A\mu}, \\ u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3 &= \frac{G_z Cr}{A\mu} - 1, \\ u_1 u_2 u_3 &= -\frac{H}{\mu} + \frac{Cr^2}{2\mu} + \frac{G_z^2}{2A\mu}. \end{aligned} \quad (5)$$

Приведём уравнения возмущенного движения (1) к виду, допускающему применение метода усреднения [1,2]. Выделим быстрые и медленные переменные, при этом первые интегралы (2) для возмущенного движения (1) являются медленными переменными. Быстрыми переменными являются угол собственного вращения φ , угол прецессии ψ и угол нутации θ .

С помощью ряда преобразований приведём первые три уравнения (1) к виду:

$$\begin{aligned} \dot{G}_z &= \varepsilon [(M_1 \sin \varphi + M_2 \cos \varphi) \sin \theta + M_3 \cos \theta], \\ \dot{H} &= \varepsilon (M_1 p + M_2 q + M_3 r), \\ \dot{r} &= \varepsilon C^{-1} M_3, \quad M_i = M_i(p, q, r, \psi, \theta, \varphi, \tau), \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь и в трёх последних уравнениях (1) подразумевается, что переменные p, q, r при помощи (2) выражены как функции $G_z, H, r, \psi, \theta, \varphi$ и подставлены в (1), (6). Начальные значения медленных переменных G_z, H, r могут быть вычислены при помощи (2).

Однако правые части (6) содержат три быстрые переменные ψ, θ, φ , что представляет трудность для применения метода усреднения. Для исключения этой трудности потребуем, чтобы выражения, стоящие в правых частях (6), могли быть представлены как функции от медленных переменных и от угла нутации, периодические по фазе переменной θ с периодом 2π , и имели следующие структурные свойства возмущающего момента сил

$$\begin{aligned} M_1 \sin \varphi + M_2 \cos \varphi &= M_1^*(G_z, H, r, \tau, \theta), \\ M_1 p + M_2 q &= M_2^*(G_z, H, r, \tau, \theta), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} M_3 &= M_3^*(G_z, H, r, \tau, \theta), \\ M_1 &= pf, \quad M_1 = qf, \quad M_3 = M_3^*, \quad f = f(G_z, H, r, \theta, \tau) \end{aligned} \quad (8)$$

В дальнейшем предполагаются выполненными необходимые и достаточные условия (7) или, в частности, достаточные условия (8), которые обеспечивают справедливость соотношений (7). Система (6) тогда может быть представлена в форме

$$\begin{aligned} \dot{G}_z &= \varepsilon F_1(G_z, H, r, \tau, \theta), \quad F_1 = M_1^* \sin \theta + M_3^* \cos \theta, \\ \dot{H} &= \varepsilon F_2(G_z, H, r, \tau, \theta), \quad F_2 = M_2^* + M_3^* r, \\ \dot{r} &= \varepsilon F_3(G_z, H, r, \tau, \theta), \quad F_3 = C^{-1} M_3^*. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь F_1, F_2, F_3 – 2π -периодические функции по фазе угла нутации θ .

Исследование возмущенного движения предполагается проводить для медленных переменных $u_i, i=1,2,3$. Медленные переменные G_z, H, r удастся выразить через u_i из (5) следующим образом [3,8]

$$\begin{aligned} G_z &= \delta_2 (A\mu)^{1/2} (u_1 + u_2 + u_3 + u_1 u_2 u_3 + \delta_1 R)^{1/2} \operatorname{sign}(1 + u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3), \\ H &= \frac{1}{2} \mu \left[(u_1 + u_2 + u_3)(1 + AC^{-1}) + (\delta_1 R - u_1 u_2 u_3)(1 - AC^{-1}) \right], \\ r &= \delta_2 C^{-1} (A\mu)^{1/2} (u_1 + u_2 + u_3 + u_1 u_2 u_3 - \delta_1 R)^{1/2}, \\ R &= \left[(1 - u_1^2)(1 - u_2^2)(u_3^2 - 1) \right]^{1/2}, \quad \delta_1 = \operatorname{sign}(G_z^2 - C^2 r^2), \quad \delta_2 = \operatorname{sign} r. \end{aligned} \quad (10)$$

Величины δ_1, δ_2 в начальный момент определяются по начальным условиям для G_z, r . Если в процессе движения одна или обе величины $G_z^2 - C^2 r^2, r$ проходят через нуль, то возможна смена знаков δ_1, δ_2 , для определения которых можно воспользоваться исходной системой (9).

После ряда преобразований искомая система уравнений для медленных переменных $u_i, i=1,2,3$ принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{du_i}{dt} &= \varepsilon V_i(u_1, u_2, u_3, \tau, \theta), \quad u_i(0) = u_i^0, \quad i=1,2,3 \\ V_i &= V_{i1} F_1^* + V_{i2} F_2^* + V_{i3} F_3^*, \quad V_{ij} = V_{ij}(u_1, u_2, u_3), \quad j=1,2,3 \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} V_{11} &= \frac{G_z - Cru_1}{A\mu(u_1 - u_2)(u_1 - u_3)}, \\ V_{12} &= \frac{u_1^2 - 1}{\mu(u_1 - u_2)(u_1 - u_3)}, \\ V_{13} &= \frac{C}{\mu(u_1 - u_2)(u_1 - u_3)} \left[(CA^{-1} - 1)ru_1^2 - G_z A^{-1}u_1 + r \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь функции $V_{2j}, V_{3j}, j=1,2,3$ получаются из соответствующих выражений (12) для того же значения j путём циклической перестановки индексов у величины u_i . Функции F_i^* получаются подстановкой в F_i из (9) выражений (10). Начальные значения для переменных u_i вычисляются по начальным данным G_z^0, H^0, r^0 при помощи соотношений (5).

Подставим в правые части системы (11) быструю переменную θ из выражения (3) для невозмущенного движения. Тогда правые части системы (11) будут периодическими функциями t с периодом $2K(k)/\alpha$, где k, α определены соотношениями (3). Усредняя правые части полученной системы по фазе угла нутации, получим усреднённую систему первого приближения ($\tau = \varepsilon t$):

$$\begin{aligned} \frac{du_i}{d\tau} &= U_i(u_1, u_2, u_3, \tau), \quad u_i(0) = u_i^0, \quad i=1,2,3, \\ U_i(u_1, u_2, u_3, \tau) &= \frac{\alpha}{2K(k)} \int_0^{2K/\alpha} V_i(u_1, u_2, u_3, \tau, \theta(t)) dt. \end{aligned} \quad (13)$$

После исследования и решения системы (13) для u_i исходные переменные G_z, H, r восстанавливаются по формулам (10). Медленные переменные u_i и G_z, H, r определяются с погрешностью порядка ε .

Рассмотрим возмущенное движение, близкое к случаю Лагранжа, под действием внешней среды. Примером может служить внешняя среда, медленно изменяющая свойства вязкости вследствие изменения плотности, температуры, состава среды. Возмущающие моменты $\varepsilon M_i (i=1,2,3)$ имеют вид:

$$M_1 = -a(\tau)p, \quad M_2 = -a(\tau)q, \quad M_3 = -b(\tau)r, \quad a(\tau), b(\tau) > 0, \quad \tau = \varepsilon t. \quad (14)$$

Здесь $a(\tau), b(\tau)$ – интегрируемые функции, зависящие от свойств среды и формы тела.

Моменты (14) удовлетворяют условиям (7), что дает возможность усреднения по фазе угла нутации θ . При данных возмущениях система (6) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{G}_z &= -\varepsilon \left[(a(\tau)p \sin \varphi + a(\tau)q \cos \varphi) \sin \theta + b(\tau)r \cos \theta \right], \\ \dot{H} &= -\varepsilon \left[a(\tau)(p^2 + q^2) + b(\tau)r^2 \right], \\ \dot{r} &= -\varepsilon C^{-1} b(\tau)r. \end{aligned} \quad (15)$$

Третье уравнение (15) может быть проинтегрировано:

$$r = r^0 \exp\left(-\varepsilon C^{-1} \int_0^t b(\varepsilon t) dt\right). \quad (16)$$

Рассмотрим случай, когда $a(\tau), b(\tau)$ имеют вид:

$$a(\tau) = a_0 + a_1 \tau, \quad b(\tau) = b_0 + b_1 \tau, \quad a_0, a_1, b_0, b_1 = \text{const}. \quad (17)$$

После ряда преобразований усредненная система (13) с учетом возмущающих моментов (14) примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{d\tau} &= \frac{-1}{A\mu(u_1 - u_2)(u_1 - u_3)} \left\{ a(\tau) \left[A^{-1}(G_z - Cru_1)(G_z - Crv) + (u_1^2 - 1)(2H - Cr^2 - 2\mu v) \right] + \right. \\ &\quad \left. + b(\tau)r(G_z - Cru_1)(v - u_1) \right\}, \\ \frac{du_2}{d\tau} &= \frac{-1}{A\mu(u_2 - u_3)(u_2 - u_1)} \left\{ a(\tau) \left[A^{-1}(G_z - Cru_2)(G_z - Crv) + (u_2^2 - 1)(2H - Cr^2 - 2\mu v) \right] + \right. \\ &\quad \left. + b(\tau)r(G_z - Cru_2)(v - u_2) \right\}, \\ \frac{du_3}{d\tau} &= \frac{-1}{A\mu(u_3 - u_2)(u_3 - u_1)} \left\{ a(\tau) \left[A^{-1}(G_z - Cru_3)(G_z - Crv) + (u_3^2 - 1)(2H - Cr^2 - 2\mu v) \right] + \right. \\ &\quad \left. + b(\tau)r(G_z - Cru_3)(v - u_3) \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь $v = u_3 - (u_3 - u_1)E(k)/K(k)$, $K(k)$, $E(k)$ – эллиптические интегралы первого и второго рода, вместо G_z , H , r , k подставляются их выражения из (3), (10).

Усреднённая система (18) проинтегрирована численно при разных начальных условиях и параметрах задачи. Рассмотрим три случая, соответствующие следующим начальным данным:

$$\text{а) } u_1^0 = 0.913, u_2^0 = 0.996, u_3^0 = 1.087, \theta^0 = 5^\circ; \quad (19)$$

$$\text{б) } u_1^0 = 0, u_2^0 = 0.5, u_3^0 = 2, \theta^0 = 60^\circ; \quad (20)$$

$$\text{в) } u_1^0 = -0.932, u_2^0 = -0.866, u_3^0 = 2.932, \theta^0 = 150^\circ. \quad (21)$$

Предполагается, что в начальный момент волчок Лагранжа получил угловую скорость вращения относительно оси динамической симметрии, равную $r^0 = \sqrt{3}$, кроме того $A=1.5$, $C=1$, $\mu=0.5$, $a_0=0.125$, $b_0=0.1$, $a_1=b_1=1$. В начальный момент угол отклонения оси динамической симметрии от вертикали θ^0 . На рисунке 1-3 изображены графики функций G_z , H , r , u_i , $i=1,2,3$ для указанных случаев (19)-(21). При $\varepsilon=0$ система (18) упрощается и соответствует случаю линейной диссипации с постоянными коэффициентами [3,8].

В случае начальных значений (19) результат численного интегрирования системы (18) изображен на рис. 1. Полная энергия тела, проекция вектора кинетического момента на вертикаль, угловая скорость вращения относительно оси динамической симметрии убывают. Величина u_3 достаточно быстро стремится к 1. Переменные u_1 и u_2 стремятся к -1.

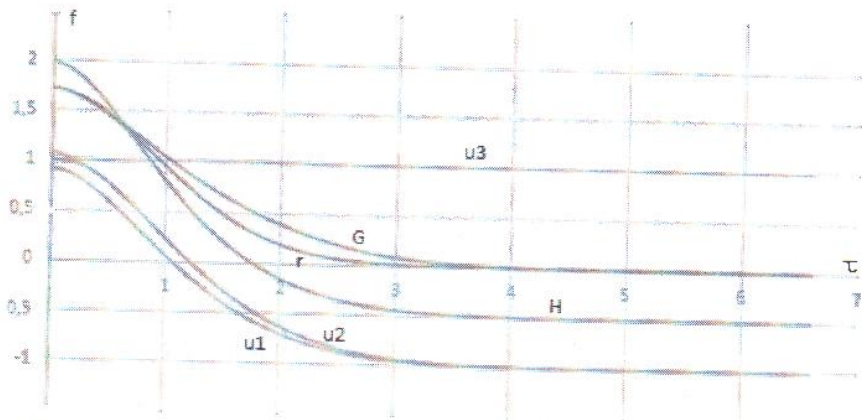


Рис. 1. Графики функций G_z , H , r , u_i , $i=1,2,3$ при начальных условиях (19)

На рис.2 приведен результат численного интегрирования системы (18) при начальных условиях (20). Как и на рис. 1, переменная u_3 стремится к единице, однако интервал монотонного убывания в данном случае увеличился. Проекция вектора кинетического момента G_z и r монотонно убывают к нулю. Полная энергия H монотонно убывает, приближаясь к значению $H = -0.5$.

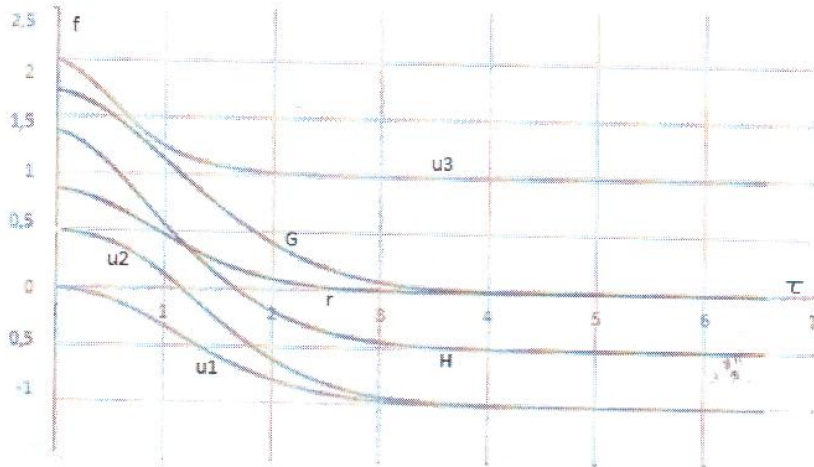


Рис. 2. Графики функций $G_z, H, r, u_i, i=1,2,3$ при начальных условиях (20)

На рис.3 представлены графики функций $G_z, H, r, u_i, i=1,2,3$ полученные при численном интегрировании системы (18) для начальных данных (21). Проекция вектора кинетического момента на вертикаль G_z стремится к нулю, однако в отличие от случаев (19) и (20) монотонно возрастает. Полная энергия тела H достаточно быстро стремится к -0.5 . Величины r и u_3 монотонно убывают. Графики функций u_1 и u_2 на рис.3 совпадают. Однако при построении графиков в меньшем масштабе по оси ординат (рис.4) видно, что на промежутке $(0; 4)$ функции u_1 и u_2 монотонно убывают.

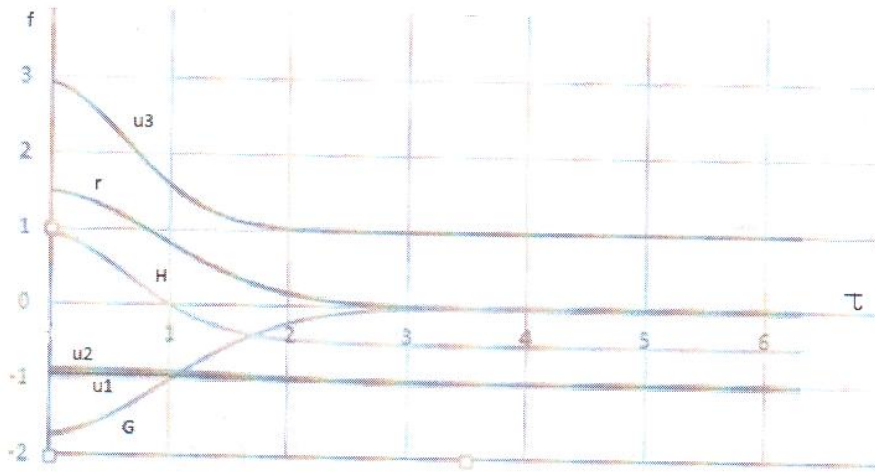


Рис. 3. Графики функций $G_z, H, r, u_i, i=1,2,3$ при начальных условиях (21)

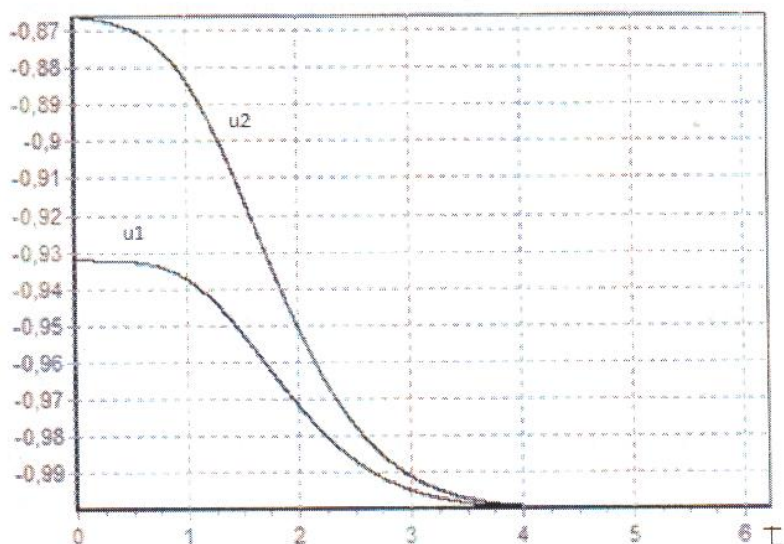


Рис. 4. Графики функций u_1 и u_2 при начальных условиях (21)

Выводы. При сравнении полученных результатов с результатами [3,8] можно отметить, что зависимость возмущающего момента от медленного времени приводит к появлению в усредненной системе уравнений первого приближения для медленных переменных функций $a(\tau)$ и $b(\tau)$, зависящих от медленного времени, которые при численном интегрировании сглаживают поведение u_i , $i=1,2,3$, G_z , H . Под действием возмущающего момента (14) твердое тело стремится к устойчивому нижнему положению равновесия быстрее, чем в [3,8], что следует из задания коэффициентов (17).

Правильность счёта контролировалась тем, что полученные по численным данным и формулам (10) значения для r практически совпадают с точным решением (16).

Список литературы

1. Волосов В.М., Моргунов Б.И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507с.
2. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503с.
3. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноусько Ф.Л. Возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа // Прикладная математика и механика. 1979. Т.43. Вып.5. С. 771-778.
4. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноусько Ф.Л. Возмущенные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1986. Вып.5. С.3-10.
5. Simpson H.C. and Gunzburger M.D. A two scale analysis of gyroscopic motion with friction // Journal of Applied Mathematics and Physics. 1986. Vol. 37. № 6. P. 867-894.
6. Sidorenko V.V. Capture and escape from resonance in the dynamics of the rigid body in viscous medium // J. Nonlinear Sci. 1994. Vol.4. P. 35-57.
7. Акуленко Л.Д., Козаченко Т.А., Лещенко Д.Д. Эволюция вращений твёрдого тела под действием восстанавливающего и управляющего моментов // Известия РАН. Теория и системы управления. 2002. № 6. С. 32 – 38.
8. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д. Эволюция движений твердого тела относительно центра масс. М.-Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2015. 308с.
9. Суслов Г.К. Теоретическая механика. М.: Гостехиздат, 1946. 655с.