Эволюция быстрого вращения спутника под действием момента сил светового давления в среде с сопротивлением

2 authors, including:

Dmytro Leshchenko
Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ДИНАМИКИ СИСТЕМ И ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

ТРУДЫ

IX Международной Четаевской конференции
«АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА, УСТОЙЧИВОСТЬ И УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ»
посвященной 105-летию Н.Г. ЧЕТАЕВА

Том 5

Механика космического полета
Колебания и волны
Гибридные системы

Иркутск
2007

Эволюция быстрого вращения спутника под действием момента сил светового давления в среде с сопротивлением

Д.Д. Лещенко (leshchenko_d@ukr.net), А.Л. Рачинская (rachinskaya@onu.edu.ua)
Одесская государственная академия строительства и архитектуры, Одесса

Аннотация. Исследуется быстрое вращательное движение относительно центра масс спутника под действием моментов сил светового давления и сопротивления. Тело предполагается несимметричным, а его поверхность является поверхностью вращения. Орбитальные движения с произвольным эксцентриситетом предполагаются заданными. Момент сил сопротивления полагается линейной функцией угловой скорости. Анализируется система, полученная после усреднения по движению Эйлера–Пуансо. Установлены эффекты убывания модуля кинетического момента и кинетической энергии. Определена ориентация вектора кинетического момента в орбитальной системе координат. Проведены численный анализ в общем случае и аналитическое исследование в окрестности осевого вращения и для случая малой диссипации.

Ключевые слова: спутник, световое давление, сопротивление, усреднение.

1. Постановка задачи

Рассмотрим движение спутника относительно центра масс под действием совместного влияния моментов сил светового давления и сопротивления. Вращательные движения рассматриваются в рамках модели динамики твердого тела, центр масс которого движется по эллиптической орбите вокруг Солнца. Задачи динамики обобщаются и осложняются учетом различных возмущающих факторов, и в настоящее время остаются достаточно актуальными. Исследованию вращательных движений тел относительно неподвижной точки под действием возмущающих моментов сил различной природы (гравитационных, аэродинамических, светового давления и др.), близкому к приводимому ниже, посвящены работы [1–17].

Введем три правых декартовых системы координат, начало которых совместим с центром инерции спутника [1, 2]. Система координат Ox_i $(i = 1, 2, 3)$ движется поступательно по орбите Солнца вместе со спутником; ось Ox_1 параллельна радиусу-вектору орбиты в ее перигелии, ось Ox_2 — направлению вектора скорости центра масс спутника в перигелии, ось Ox_3 — нормали к плоскости орбиты.

Система координат Oy_i $(i = 1, 2, 3)$ связана со спутником и ориентирована по вектору кинетического момента $\mathbf{G}$. Ось Oy_3 направлена по вектору кинетического момента $\mathbf{G}$, ось Oy_2 лежит в плоскости орбиты (т.е. в плоскости Ox_1x_2), ось Oy_1 лежит в плоскости Ox_3y_3 и направлена так, что векторы $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$, $\mathbf{y}_3$ образуют правую тройку [1–3]. Оси системы координат Oz_i $(i = 1, 2, 3)$ связаны с главными центральными осями инерции твердого тела. Взаимное положение главных центральных осей инерции и осей Oy_i определим углами Эйлера. При этом направляющие косинусы α_{ij} осей Oz_i относительно системы Oy_i выражаются через углы Эйлера φ, ψ, θ по известным формулам [1]. Положение вектора кинетического момента $\mathbf{G}$ относительно его центра масс в системе координат Ox_i определяется углами λ и δ, как показано в [1–3].

Уравнения движения тела относительно центра масс запишем в форме [2]

$$\begin{aligned}
&\frac{dG}{dt} = L_3, \quad \frac{d\delta}{dt} = \frac{L_1}{G}, \quad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{L_2}{G\sin\delta},\\
&\frac{d\theta}{dt} = G\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2}\right) + \frac{L_2\cos\psi - L_1\sin\psi}{G},\\
&\frac{d\varphi}{dt} = G\cos\theta\left(\frac{1}{A_3} - \frac{\sin^2\varphi}{A_1} - \frac{\cos^2\varphi}{A_2}\right) + \frac{L_1\cos\psi + L_2\sin\psi}{G\sin\theta},\\
&\frac{d\psi}{dt} = G\left(\frac{\sin^2\varphi}{A_1} + \frac{\cos^2\varphi}{A_2}\right) - \frac{L_1\cos\psi + L_2\sin\psi}{G}\operatorname{ctg}\theta - \frac{L_2}{G}\operatorname{ctg}\delta.
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь L_i — моменты внешних сил относительно осей Oy_i, G — величина кинетического момента, A_i $(i = 1, 2, 3)$ — главные центральные моменты инерции относительно осей Oz_i.

Проекции L_i момента внешних сил, складываются из момента сил светового давления L_i^c и момента сил внешнего сопротивления L_i^r.

Допустим, что поверхность космического аппарата представляет собой поверхность вращения, причем единичный орт оси симметрии $\mathbf{k}$ направлен вдоль оси Oz_3. Как показано в [1, 8, 9], в этом случае для момента сил светового давления L_i^c, действующего на спутник, имеет место формула

$$\begin{aligned}
&\mathbf{L}^c = \left(a_c\left(\varepsilon_s\right) R_0^2/R^2\right)\mathbf{e}_r \times \mathbf{k},\\
&a_c\left(\varepsilon_s\right)\frac{R_0^2}{R^2} = p_c S\left(\varepsilon_s\right) Z_0'\left(\varepsilon_s\right), \quad p_c = \frac{E_0}{c}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2.
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{e}_r$ — единичный вектор по направлению радиус-вектора орбиты; ε_s — угол между направлениями $\mathbf{e}_r$ и $\mathbf{k}$ такой, что $|\mathbf{e}_r \times \mathbf{k}| = \sin\varepsilon_s$; R — текущее расстояние от центра Солнца до центра масс спутника; R_0 — фиксированное значение R, например, в начальный момент времени; $a_c(\varepsilon_s)$ — коэффициент момента сил светового давления, определяемый свойствами поверхности; S — площадь "тени" на плоскости, нормальной к потоку; Z_0' — расстояние от центра масс до центра давления; p_c — величина светового давления на расстоянии R от центра Солнца; c — скорость света; E_0 — величина потока энергии светового давления на расстоянии R_0 от центра Солнца. Если R_0 — радиус орбиты Земли, тогда $p_{c0} = 4.64 \cdot 10^{-6}$ Па.

В работе предполагается, что момент сопротивления $\mathbf{L}^r$ может быть представлен в виде $\mathbf{L}^r = I\omega$, где тензор I имеет постоянные компоненты I_{ij} в системе Oz_i, связанной с телом [1, 5].

В некоторых случаях удобно наряду с переменной θ использовать в качестве дополнительной переменной важную характеристику — кинетическую энергию T, производная которой имеет вид

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{dt} = \frac{2T}{G}L_3 + G\sin\theta\Bigg[&\cos\theta\left(\frac{\sin^2\varphi}{A_1} + \frac{\cos^2\varphi}{A_2} - \frac{1}{A_3}\right)\left(L_2\cos\psi - L_1\sin\psi\right) +\\
&+ \sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2}\right)\left(L_1\cos\psi + L_2\sin\psi\right)\Bigg].
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Центр масс спутника движется по кеплеровскому эллипсу с эксцентриситетом e и периодом обращения Q. Зависимость истинной аномалии ν от времени t дается соотношением

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{\omega_0(1+e\cos\nu)^2}{(1-e^2)^{3/2}}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{Q}. \tag{1.4}$$

Здесь ω_0 — средняя угловая скорость движения центра масс по эллиптической орбите, Q — период обращения спутника, e — эксцентриситет орбиты.

Рассматривается динамически несимметричный спутник, моменты инерции которого для определенности удовлетворяют неравенству $A_1 > A_2 > A_3$ в предположении, что угловая скорость ω движения спутника относительно центра масс существенно больше угловой скорости орбитального движения ω_0, т.е. $\varepsilon = \omega_0/\omega \sim A_1\omega_0/G_0 \ll 1$, где G_0 — кинетический момент спутника в начальный момент времени. В этом случае кинетическая энергия вращения тела велика по сравнению с моментами возмущающих сил.

Сопротивление среды предполагаем слабым, порядка малости ε^2: $\|I\|/G_0 \sim \varepsilon^2 \ll 1$, где $\|I\|$ — норма матрицы коэффициентов сопротивления.

Полагаем [1] $a_c = a_c(\cos\varepsilon_s)$ и аппроксимируем ее полиномами по степеням $\cos\varepsilon_s$. Представим функцию $a_c(\cos\varepsilon_s)$ в виде

$$a_c = a_0 + a_1\cos\varepsilon_s + \ldots$$

Далее рассмотрим только второй член разложения. Предположим также, что $a_1 \sim \varepsilon$.

Ставится задача: поставить и исследовать решение системы (1.3), (1.4) при малом ε на большом промежутке времени $t \sim \varepsilon^{-2}$. Для решения задачи будем применять метод усреднения [18]. Усреднение по движению Эйлера–Пуансо проводится по методике работы [2] для нерезонансных случаев.

2. Решение задачи в общем виде

Рассмотрим движение при условии $2TA_1 \geq G^2 \geq 2TA_2$, соответствующем траекториям вектора кинетического момента, охватывающим ось максимального момента инерции Oz_1 [19]. Введем величину

$$k^2 = \frac{(A_2-A_3)(2TA_1-G^2)}{(A_1-A_2)(G^2-2TA_3)} \quad \left(0 \leq k^2 \leq 1\right), \tag{2.1}$$

представляющую собой в невозмущенном движении постоянную-модуль эллиптических функций, описывающих это движение.

В результате усреднения по ψ, а затем по времени t, с учетом зависимости φ, θ от t [2] получим систему уравнений [7, 13]:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\delta}{dt} = -a_1 R_0^2 \left(2GR^2\right)^{-1} H \sin\delta \sin 2(\lambda - \nu);\\
&\frac{d\lambda}{dt} = -a_1 R_0^2 \left(GR^2\right)^{-1} H \cos\delta \cos^2(\lambda - \nu);\\
&\frac{dG}{dt} = -\frac{G}{D(k)}\Big\{I_{22}\,(A_1 - A_3)\,W(k) + I_{33}\,(A_1 - A_2)\left[k^2 - W(k)\right] + \\
&\quad + I_{11}(A_2 - A_3)\,[1 - W(k)]\Big\};\\
&\frac{dT}{dt} = -\frac{2T}{D(k)}\Big\{I_{22}\,(A_1 - A_3)\,W(k) + I_{33}\,(A_1 - A_2)\left[k^2 - W(k)\right] + \\
&\quad + \frac{(A_1 - A_2)(A_1 - A_3)(A_2 - A_3)}{V(k)}\left\{\frac{I_{33}}{A_3}\left[k^2 - W(k)\right] + \frac{I_{22}}{A_2}\left(1 - k^2\right) W(k)\right\} + \\
&\quad + \frac{I_{11}}{A_1}\frac{(A_2 - A_3)D(k)}{V(k)}\,[1 - W(k)]\Big\};\\
&W(k) = 1 - \frac{E(k)}{K(k)}, \qquad D(k) = A_1\,(A_2 - A_3) + A_3\,(A_1 - A_2)\,k^2,\\
&V(k) = A_2 - A_3 + (A_1 - A_2)k^2.
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

Здесь $K(k)$ и $E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно [20], функция $H(k)$ в первых двух уравнениях равна

$$H = \frac{1}{2}\left[3a^2\frac{E(k)}{K(k)} - 1\right], \quad \text{если} \quad 2TA_2 - G^2 > 0;$$

$$H = \frac{1}{2}\left\{\frac{3a^2}{k^2}\left[k^2 - 1 + \frac{E(k)}{K(k)}\right] - 1\right\}, \quad \text{если} \quad 2TA_2 - G^2 < 0;$$

$$a^2 = \frac{\varepsilon_1 + h}{1 + \varepsilon_1}, \quad \varepsilon_1 = \frac{A_3\,(A_1 - A_2)}{A_1\,(A_2 - A_3)}, \quad h = \left(\frac{2T}{G^2} - \frac{1}{A_2}\right)\frac{A_2 A_3}{A_2 - A_3}.$$

Дифференцируя выражение (2.1) для k^2 и используя два последних уравнения (2.2), получим дифференциальное уравнение, которое не зависит от других переменных:

$$
\begin{aligned}
&\frac{dk^2}{d\xi} = (1 - \chi)(1 - k^2) - \left[(1 - \chi) + (1 + \chi)k^2\right]\frac{E(k)}{K(k)},\\
&\chi = (2I_{22}A_1A_3 - I_{11}A_2A_3 - I_{33}A_1A_2)/[(I_{33}A_1 - I_{11}A_3)A_2],\\
&\xi = (t - t_*)/N, \quad N = A_1A_3/(I_{33}A_1 - I_{11}A_3) \sim \varepsilon^{-2}.
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

Из уравнений (2.2) следует, что на изменение G и T в первом приближении оказывает влияние только сила сопротивления. В [7] показано, что переменные G и T строго убывают для любых $k^2 \in [0, 1]$.

Отметим, что на эволюцию k^2 оказывает влияние только сопротивление среды. Численное интегрирование уравнения (2.3) при начальном условии $k^2(0) \approx 1$ показывает [7], что функция k^2 монотонно убывает с ростом ξ, причем тем быстрее, чем больше χ.

Уравнение (2.3) для k^2 допускает стационарные точки $k^2 = k_*^2$ при $\chi < -3$, когда независимо от G и T величина k^2 в силу уравнения (2.3) остается постоянной при соответствующем выборе начальных условий [5, 7].

Как известно [3],

$$R = \frac{\rho_0}{1 + e\cos\nu},$$

а фокальный параметр орбиты определяется равенством

$$\rho_0 = \frac{\mu^{1/3}(1 - e^2)}{\omega_0^{2/3}}.$$

Тогда первые два уравнения системы (2.2) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{dt} &= -\frac{a_1 R_0^2}{2G}\frac{\omega_0^{4/3}(1 + e\cos\nu)^2}{\mu^{2/3}(1 - e^2)^2} H \sin\delta \sin 2(\lambda - \nu), \\ \frac{d\lambda}{dt} &= -\frac{a_1 R_0^2}{G}\frac{\omega_0^{4/3}(1 + e\cos\nu)^2}{\mu^{2/3}(1 - e^2)^2} H \cos\delta \cos^2(\lambda - \nu). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Рассмотрим эти два уравнения и уравнение для истинной аномалии (1.4). Уравнения можно записать в виде

$$\dot\delta = a_1\omega_0^{4/3}\Delta(\nu,\, \delta,\, \lambda), \quad \dot\lambda = a_1\omega_0^{4/3}\Lambda(\nu,\, \delta,\, \lambda),$$

где предполагается $a_1\omega_0^{4/3} \sim \varepsilon^2$;

$$\dot\nu = \frac{\omega_0}{h(e)}(1 + e\cos\nu)^2, \quad h(e) = (1 - e^2)^{3/2}.$$

Здесь Δ, Λ — правые части этих уравнений, δ, λ — медленные переменные, а ν — полумедленная. Применяем модифицированный метод усреднения [21] и имеем

$$\dot\delta = 0, \quad \dot\lambda = -\frac{a_1 R_0^2 \omega_0^{4/3} H \cos\delta}{2\mu^{2/3} G (1 - e^2)^{1/2}}. \tag{2.5}$$

Численно проинтегрируем систему из двух уравнений (2.5) для δ, λ, уравнений для G, T системы (2.2), уравнения для ν (1.4) и уравнения для k^2:

$$\begin{gathered} \frac{dk^2}{dt} = \frac{I_{33}A_1 - I_{11}A_3}{A_1 A_3}\left\{(1 - \chi)\left(1 - k^2\right) - \left[(1 - \chi) + (1 + \chi)\, k^2\right]\frac{E(k)}{K(k)}\right\}, \\ \chi = (2I_{22}A_1A_3 - I_{11}A_2A_3 - I_{33}A_1A_2)/[(I_{33}A_1 - I_{11}A_3)A_2]. \end{gathered} \tag{2.6}$$

Интегрирование производилось при начальных условиях $G(0) = 1$; $k^2(0) = 0.99$; $\omega(0) = 0.0011775$ рад/с; $\delta(0) = 0.785$ рад; $\lambda(0) = 0.785$ рад и значениях главных центральных моментов инерции тела $A_1 = 3.2$; $A_2 = 2.6$; $A_3 = 1.67$. Численный расчет выполнялся для орбиты спутника "Протон-2" с эксцентриситетом $e = 0.033$. Для коэффициентов сопротивления рассматривались два возможных варианта: $I_{11} = 2.322$; $I_{22} = 1.31$; $I_{33} = 1.425$ и $I_{11} = 0.919$; $I_{22} = 5.228$; $I_{33} = 1.666$. В первом случае величина χ уравнения (2.6) была отрицательной — -4.474, а во втором — 3.852. Величина коэффициента момента сил светового давления $a_1 = 10^{-5}$ Нм, гравитационная постоянная $\mu = 1.327 \cdot 10^{20}$ м^3/с^2. Пусть начальное расстояние R_0 равно расстоянию между центрами Земли и Солнца — $149.5 \cdot 10^9$ м. Численный анализ показывает, что функции $G(t)$ и $T(t)$ являются монотонно убывающими (кривые 1, 2 на рис. 1, 2).

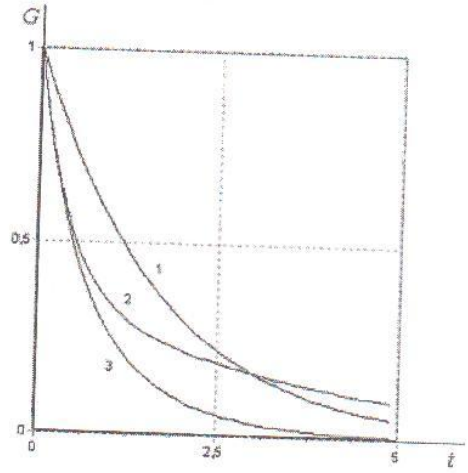

Рис. 1

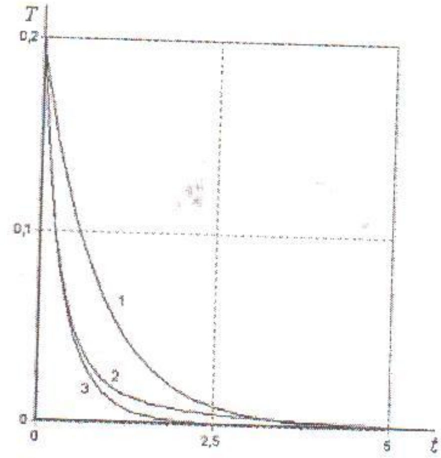

Рис. 2

Видно, что при положительной величине χ (кривые 2 на рис. 1, 2) функции убывают быстрее, но функция $G(t)$ стремится к асимптоте медленнее за больший промежуток времени. Угол δ остается постоянным согласно первому уравнению (2.5). Угол λ изменяется, и графики имеют вид, представленный на рис. 3.

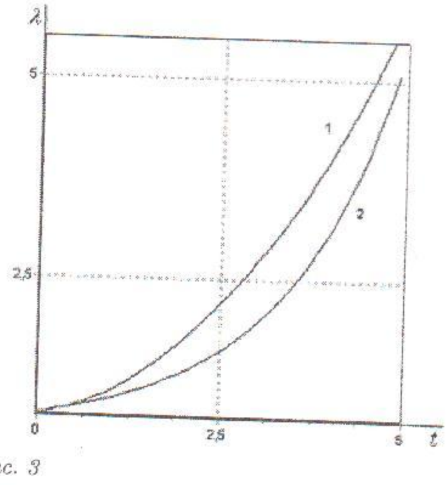

Рис. 3

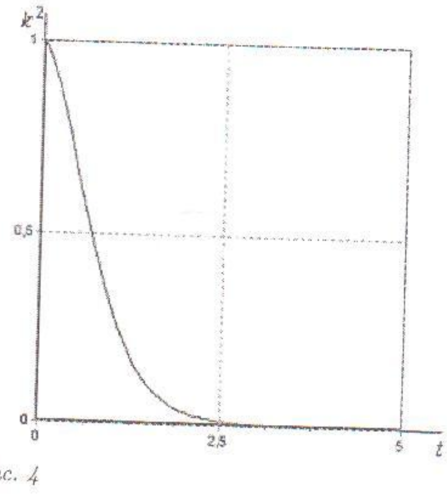

Рис. 4

Кривая 1 соответствует отрицательному значению χ, а кривая 2 — положительному. Как видно из графиков, с увеличением времени угол λ также увеличивается. Проанализируем второе уравнение (2.5) в случае положительного χ. График модуля эллиптических функций имеет вышеуказанный вид (рис. 4), т.е. $k^2 \to 0$, а функция $H \to \frac{1}{2}\left[3a^2 - 1\right]$ (2.2). График изменения величины a имеет вид, представленный на рис. 5.

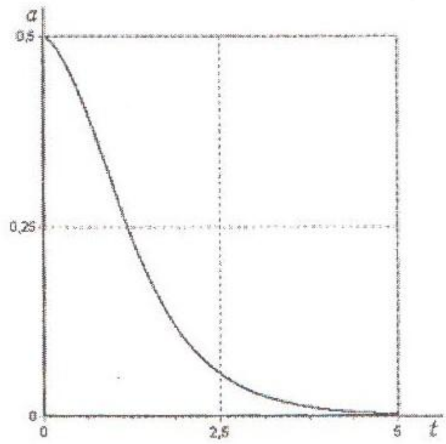

Рис. 5

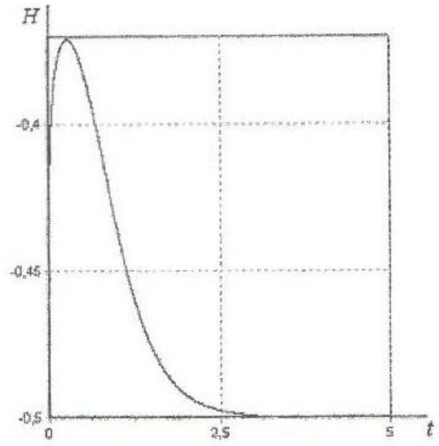

Рис. 6

Видно, что с увеличением времени $a \to 0$ (рис. 5), а значит, функция H должна стремиться к величине -0.5, что подтверждается численным расчетом (рис. 6).

Рассмотрим движение при условии $2TA_2 \geq G^2 \geq 2TA_3$, соответствующем траекториям вектора кинетического момента, охватывающим ось момента инерции Oz_3. В этом случае в равенстве (2.1) и в уравнениях системы (2.2) необходимо поменять местами A_1 и A_3, а так же I_{11} и I_{33}. Кроме того, величину χ в уравнении (2.6) заменим на $-\chi$, а в уравнении (2.6) добавим знак "минус". Начальные условия сохраняют те же значения. Величина χ в обоих расчетных вариантах сохраняет свои значения, а функции $G(t)$ и $T(t)$ также являются монотонно убывающими. Как видно из графиков (кривые 1 и 3 на рис. 1, 2), характер функций сохраняется, как в предыдущей постановке, однако убывание функций происходит быстрее в случае положительного значения величины χ (кривые 3 на рис. 1, 2).

Угол δ остается постоянным согласно первому уравнению (2.5). Угол λ изменяется, и графики имеют вид, представленный рис. 7. При более тщательном исследовании можно увидеть, что на малых временах функция $\lambda(t)$ не является монотонно убывающей (рис. 8).

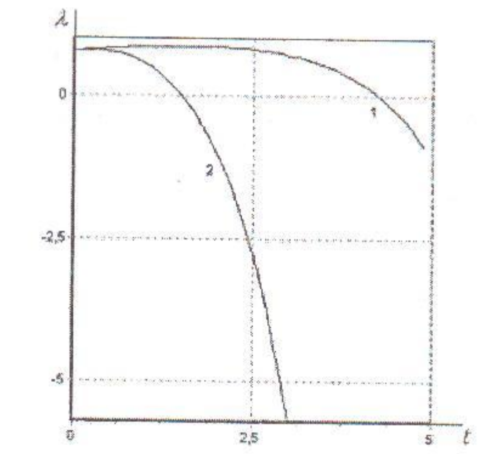

Рис. 7

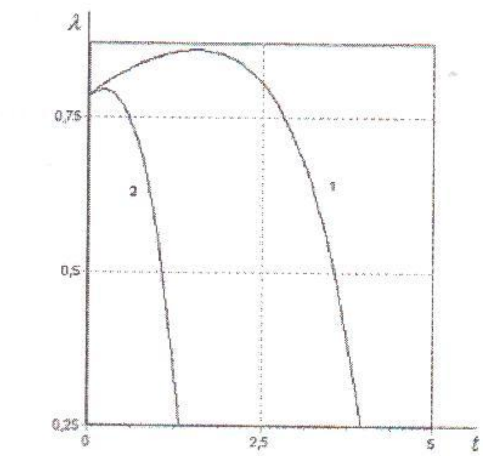

Рис. 8

Промежутки возрастания и убывания функции $\lambda(t)$ означают, что производная этой функции, определяемая вторым уравнением (2.5), меняет свой знак. Все величины, входящие в это выражение, являются знакопостоянными, кроме функции H. Численный расчет позволяет построить графики этой функции в двух расчетных вариантах при условии $2TA_2 \geq G^2 \geq 2TA_3$. Как видно из графиков, функция $H(t)$ (рис. 9) сначала принимает отрицательные значения, а затем положительные. Моменты времени, когда функция принимает нулевые значения, соответствуют точкам максимума функции $\lambda(t)$ (рис. 8).

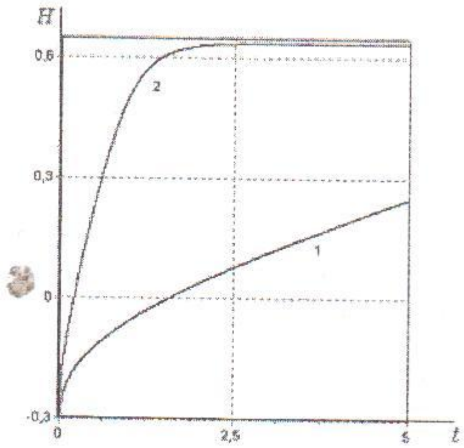

Рис. 9

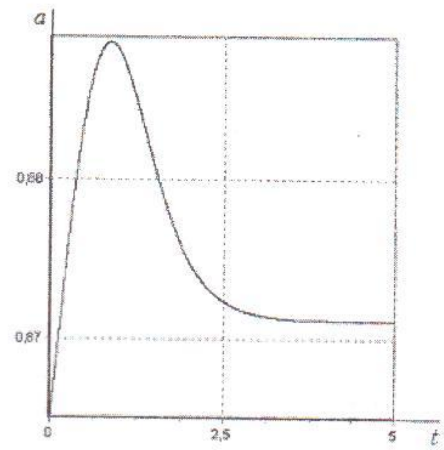

Рис. 10

Проанализируем второе уравнение (2.5) в случае положительного χ. Модуль эллиптических функций $k^2 \to 0$, а функция $H \to \frac{1}{2}\left[3a^2 - 1\right]$ (2.2). График изменения величины a имеет вид, указанный на рис. 10. При подстановке асимптотического значения a в вышеуказанную формулу имеем асимптотическое значение H на кривой 2 рис. 9.

Рассмотренный численный расчет производился в размерном виде. Имело бы смысл произвести численный расчет для обезразмеренной системы уравнений. Характерными величинами задачи будут: G_0 — кинетический момент спутника при $t = 0$, Ω_0 — величина угловой скорости ω движения спутника относительно центра масс в начальный момент времени. Малым параметром задачи будет величина $\varepsilon = \dfrac{\omega_0}{\Omega_0}$. Безразмерные величины определяются равенствами

$$\tilde{t} = \Omega_0 t, \quad \tilde{G} = \frac{G}{G_0}, \quad \tilde{T} = \frac{T}{G_0\Omega_0}, \quad \tilde{A}_i = \frac{A_i\Omega_0}{G_0}.$$

Введем обозначение

$$\Gamma = \frac{a_1 R_0^2 \Omega_0}{G_0 \mu^{2/3} \omega_0^{2/3}} \tag{2.7}$$

и назовем эту величину приведенным коэффициентом момента сил светового давления.

После обезразмеривания система (2.2) принимает вид

$$\begin{aligned}
\frac{d\delta}{d\tilde{t}} &= -\frac{\Gamma \tilde{H}(1+e\cos\nu)^2}{2\tilde{G}(1-e^2)^2}\varepsilon^2 \sin\delta \sin 2(\lambda-\nu);\\
\frac{d\lambda}{d\tilde{t}} &= -\frac{\Gamma \tilde{H}(1+e\cos\nu)^2}{\tilde{G}(1-e^2)^2}\varepsilon^2 \cos\delta \cos^2(\lambda-\nu);\\
\frac{d\tilde{G}}{d\tilde{t}} &= -\frac{\tilde{G}}{\tilde{D}(k)}\varepsilon^2 \left\{\tilde{I_{22}}\left(\tilde{A}_1-\tilde{A}_3\right)W(k) + \tilde{I_{33}}\left(\tilde{A}_1-\tilde{A}_2\right)\left[k^2 - W(k)\right] + \right.\\
&\quad \left. + \tilde{I_{11}}(\tilde{A}_2-\tilde{A}_3)\left[1-W(k)\right]\right\};\\
\frac{d\tilde{T}}{d\tilde{t}} &= -\frac{2\tilde{T}}{\tilde{D}(k)}\varepsilon^2 \left\{\tilde{I_{22}}\left(\tilde{A}_1-\tilde{A}_3\right)W(k) + \tilde{I_{33}}\left(\tilde{A}_1-\tilde{A}_2\right)\left[k^2 - W(k)\right] + \right.\\
&\quad \left. + \frac{\tilde{I_{11}}}{\tilde{A}_1}\frac{(\tilde{A}_2-\tilde{A}_3)\,\tilde{D}(k)}{\tilde{V}(k)}\left[1-W(k)\right]\right\};\\
W(k) &= 1 - \frac{E(k)}{K(k)}, \qquad \tilde{D}(k) = \tilde{A}_1\left(\tilde{A}_2-\tilde{A}_3\right) + \tilde{A}_3\left(\tilde{A}_1-\tilde{A}_2\right)k^2,\\
\tilde{V}(k) &= \tilde{A}_2 - \tilde{A}_3 + (\tilde{A}_1-\tilde{A}_2)k^2.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Уравнение истинной аномалии (1.4) принимает вид

$$\frac{d\nu}{d\tilde{t}} = \varepsilon\frac{(1+e\cos\nu)^2}{(1-e^2)^{3/2}}.$$

В первых двух уравнениях системы (2.8) функция $\tilde{H}$ равна:

$$\tilde{H} = \frac{1}{2}\left[3\tilde{a}^2\frac{E(k)}{K(k)} - 1\right], \quad \text{если} \quad 2\tilde{T}\tilde{A}_2 - \tilde{G}^2 > 0;$$

$$\widetilde{H}=\frac{1}{2}\left\{\frac{3\tilde{a}^2}{k^2}\left[k^2-1+\frac{E(k)}{K(k)}\right]-1\right\},\quad \text{если}\quad 2\widetilde{T}\tilde{A}_2-\tilde{G}^2<0;$$

$$\tilde{a}^2=\frac{\tilde{\varepsilon_1}+\widetilde{h}}{1+\tilde{\varepsilon_1}},\quad \tilde{\varepsilon_1}=\frac{\tilde{A}_3\left(\tilde{A}_1-\tilde{A}_2\right)}{\tilde{A}_1\left(\tilde{A}_2-\tilde{A}_3\right)},\quad \widetilde{h}=\left(\frac{2\widetilde{T}}{\tilde{G}^2}-\frac{1}{\tilde{A}_2}\right)\frac{\tilde{A}_2\tilde{A}_3}{\tilde{A}_2-\tilde{A}_3}.$$

Из системы (2.8) видно, что δ, λ — медленные переменные, а ν — полумедленная:

$$\dot{\delta}=\varepsilon^2\Delta(\nu,\,\delta,\,\lambda),\quad \dot{\lambda}=\varepsilon^2\Lambda(\nu,\,\delta,\,\lambda),$$

$$\dot{\nu}=\frac{\varepsilon}{h(e)}(1+e\cos\nu)^2,\quad h(e)=(1-e^2)^{3/2}.$$

Применяем модифицированный метод усреднения [21] и имеем

$$\dot{\delta}=0,\quad \dot{\lambda}=-\varepsilon^2\frac{\Gamma\,\widetilde{H}\cos\delta}{2\,\widetilde{G}(1-e^2)^{1/2}}. \tag{2.9}$$

Численный расчет производился при тех же начальных условиях, для тех же значений моментов инерции и коэффициентов сопротивления. При значении $\Omega_0=0.043611$ рад/с для малого времени $\tau=\varepsilon^2\,\widetilde{t}$ имеем картину, представленную на рис. 11.

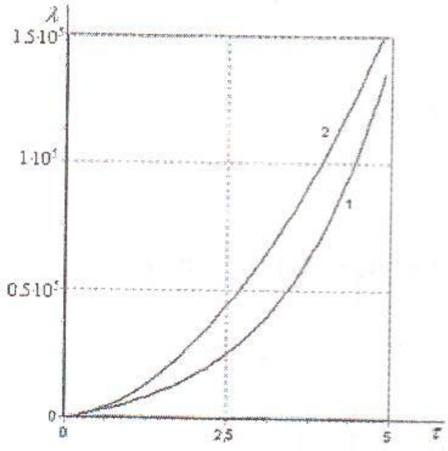

Рис. 11

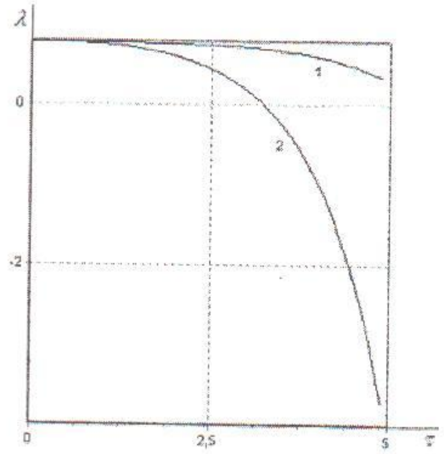

Рис. 12

Проанализируем уравнение для угла λ в системе (2.9). В правой части уравнения имеется приведенный коэффициент Γ, который выражается согласно формуле (2.7). Проведем численное исследование зависимости угла λ от значения этого коэффициента. На рис. 12 изображены графики изменения угла λ уравнения (2.9): кривая 1 соответствует значению коэффициента $\Gamma=10^{-2}$, а кривая 2 — $\Gamma=10^{-1}$. Видно, что при увеличении коэффициента на один порядок убывание функции $\lambda(\widetilde{t})$ происходит существенно быстрее.

3. Анализ предельных случаев

Исследуем систему (2.2) в случае малого модуля эллиптических функций $k^2 \ll 1$. При этом предположении асимптотическое решение записывается в виде

$$k^2 = k_0^2 \exp[-\rho t], \quad \rho = \alpha_2 + \alpha_3 - 2\alpha_1, \quad \alpha_i = I_{ii}/A_i \quad (i = 1,2,3). \tag{3.1}$$

Функции кинетического момента $G(t)$ и кинетической энергии $T(t)$ представимы в аналитической форме:

$$\begin{aligned} &G = G_0 \exp\{-\alpha_1 t + b \exp[-\rho t]\}, \quad T = T_0 \exp\{-2\alpha_1 t + c \exp[-\rho t]\}, \\ &b = \frac{0.5k_0^2}{\rho A_1^2(A_2 - A_3)}\Big[\alpha_1 A_1(2A_2A_3 - A_1A_2 - A_1A_3) + \alpha_2 A_1 A_2(A_1 - A_3) + \\ &\quad + \alpha_3 A_1 A_3 (A_1 - A_2)\Big]; \\ &c = \frac{k_0^2}{(A_2 - A_3)\rho}\Big[\alpha_2(A_1 - A_3) + \alpha_3(A_1 - A_2) + \alpha_1(A_2 + A_3 - 2A_1)\Big]. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Тогда выражение для величины h системы (2.2) в случае $k^2 \ll 1$ имеет вид

$$h = \left(\frac{2T_0}{G_0^2} q(t) - \frac{1}{A_2}\right)\frac{A_2A_3}{A_2 - A_3}, \quad q(t) = e^{(c-2b)\exp(-\rho t)},$$

а величина a^2 определяется равенством

$$a^2 = \frac{A_1A_3}{A_1 - A_3}\left[\frac{2T_0}{G_0^2} q(t) - \frac{1}{A_1}\right].$$

Получим, что функция $H(t)$ для $k^2 \ll 1$ в случаях $2TA_2 - G^2 \gtrless 0$ определена соответственно формулами

$$\begin{aligned} &H = \frac{1}{2}\left\{\frac{3A_1A_3}{A_1 - A_3}\left[\frac{2T_0}{G_0^2} q(t) - \frac{T_0}{G_0^2} k^2 q(t) - \frac{1}{A_1} + \frac{1}{2A_1} k^2\right] - 1\right\}; \\ &H = \frac{1}{2}\left\{\frac{3}{2}\frac{A_1A_3}{A_1 - A_3}\left[\frac{2T_0}{G_0^2} q(t) - \frac{1}{A_1}\right] - 1\right\}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Подставляем (3.3) во второе уравнение системы (2.5) и получаем дифференциальные уравнения изменения угла λ, которые могут быть аналитически проинтегрированы в обоих случаях.

При движении вектора кинетического момента в окрестности оси Oz_3 функция $\lambda(t)$ определена формулой

$$\lambda = \frac{a_1 R_0^2 \omega_0^{4/3}\cos\delta}{4\mu^{2/3} G_0 (1 - e^2)^{1/2}\rho}\left\{\frac{2T_0 M}{G_0^2}(3b - c)^{\frac{\alpha_1}{\rho}}\left[-\gamma\Big(-\frac{\alpha_1}{\rho}, (3b - c)\Big) + \gamma\Big(-\frac{\alpha_1}{\rho}, (3b - c)e^{\tau}\Big)\right] - \right.$$

$$- \frac{T_0 M k_0^2}{G_0^2}(3b - c)^{\frac{\alpha_1 - \rho}{\rho}}\left[-\gamma\Big(-\frac{\alpha_1 - \rho}{\rho}, (3b - c)\Big) + \gamma\Big(-\frac{\alpha_1 - \rho}{\rho}, (3b - c)e^{\tau}\Big)\right] -$$

$$-\left(\frac{M}{A_1}+1\right)b^{\frac{\alpha_1}{\rho}}\left[-\gamma\Big(-\frac{\alpha_1}{\rho},b\Big)+\gamma\Big(-\frac{\alpha_1}{\rho},be^{\tau}\Big)\right]+$$

$$+\frac{Mk_0^2}{2A_1}b^{\frac{\alpha_1-\rho}{\rho}}\left[-\gamma\Big(-\frac{\alpha_1-\rho}{\rho},b\Big)+\gamma\Big(-\frac{\alpha_1-\rho}{\rho},be^{\tau}\Big)\right]\Bigg\}+\lambda_0.$$

Аналогично при движении в окрестности оси Oz_1 имеем выражение

$$\lambda=-\frac{a_1R_0^2\omega_0^{4/3}\cos\delta}{4\mu^{2/3}G_0(1-e^2)^{1/2}\rho}\left\{\frac{3A_1A_3}{(A_1-A_3)}\frac{T_0M}{G_0^2}(3b-c)^{\frac{\alpha_1}{\rho}}\left[-\gamma\Big(-\frac{\alpha_1}{\rho},(3b-c)\Big)+\right.\right.$$

$$\left.+\gamma\Big(-\frac{\alpha_1}{\rho},(3b-c)e^{\tau}\Big)\right]-\left(\frac{A_3+2A_1}{2(A_1-A_3)}\right)b^{\frac{\alpha_1}{\rho}}\left[-\gamma\Big(-\frac{\alpha_1}{\rho},b\Big)+\gamma\Big(-\frac{\alpha_1}{\rho},be^{\tau}\Big)\right]\Bigg\}+\lambda_0.$$

Здесь

$$M=\frac{3A_1A_3}{A_1-A_3}$$

и $\gamma(n,x)$ — неполная гамма функция [20].

Представляет интерес исследование системы (2.2) в случае малых диагональных коэффициентов сопротивления, т.е.

$$I_{11}=\mu' i_{11},\quad I_{22}=\mu' i_{22},\quad I_{33}=\mu' i_{33},\quad \text{где}\ \mu'\ll 1. \tag{3.4}$$

Функции кинетического момента G и кинетический энергии T могут быть представлены в виде степенных рядов по μ':

$$G=G_0+\mu' G_1+\cdots,\qquad T=T_0+\mu' T_1+\cdots$$

Два последних уравнения системы (2.2) после интегрирования записываются следующим образом:

$$G=G_0-\frac{G_0\mu' t}{D(k_0)}\Big\{i_{22}(A_1-A_3)W(k_0)+$$

$$+\,i_{33}(A_1-A_2)\left[k_0^2-W(k_0)\right]+i_{11}(A_2-A_3)(1-W(k_0))\Big\},$$

$$T=T_0-\frac{2T_0\mu' t}{D(k_0)}\Big\{i_{22}(A_1-A_3)W(k_0)+i_{33}(A_1-A_2)\left[k_0^2-W(k_0)\right]+$$

$$+\frac{(A_1-A_2)(A_1-A_3)(A_2-A_3)}{V(k_0)}\left\{\frac{i_{33}}{A_3}\left[k_0^2-W(k_0)\right]+\frac{i_{22}}{A_2}(1-k_0^2)W(k_0)\right\}+$$

$$+\frac{i_{11}}{A_1}\cdot\frac{(A_2-A_3)D(k_0)}{V(k_0)}\left[1-W(k_0)\right]\Big\}.$$

Здесь $W(k_0)$, $D(k_0)$, $V(k_0)$ — значения функций (2.2) при $k=k_0$. Видно, что функции $G(t)$ и $T(t)$ являются строго убывающими, как и в случае системы (2.2). Для малых моментов сопротивления необходимо также построить приближенное решение для переменной k^2:

$$k^2=k_0^2+\frac{2\mu' t}{A_1A_2A_3}\Big\{A_1(i_{33}A_2-i_{22}A_3)(1-k_0^2)-$$

$$- \left[A_1(i_{33}A_2 - i_{22}A_3) + A_3(i_{22}A_1 - i_{11}A_2)k_0^2\right] \cdot \frac{E(k_0)}{K(k_0)}\Bigg\}.$$

В обоих случаях при $2TA_2 - G^2 \gtrless 0$ для малых $\mu' \ll 1$ функция $\lambda(t)$ интегрируется аналитически и выражается через квадратические функции времени вида

$$\lambda = -\frac{a_1\omega_0^{4/3}\cos\delta}{2\mu^{2/3}(1-e^2)^{1/2}G_0}(Z_1 t + Z_2 t^2), \tag{3.5}$$

где коэффициенты Z_i $(i = 1, 2)$ выражаются через моменты инерции A_i $(i = 1, 2, 3)$, коэффициенты сопротивления i_{ii} $(i = 1, 2, 3)$, начальные значения кинетической энергии T_0 и кинетического момента G_0 и значения полных эллиптических интегралов первого $K(k)$ и второго рода $E(k)$ при $k = k_0$.

Был также рассмотрен случай малых k^2 и малых коэффициентов сопротивления (3.3). При малых k^2 были получены законы изменения кинетического момента G, кинетической энергии T (3.2), которые с учетом малых первого порядка μ' дают

$$
\begin{aligned}
&G = G_0\{1 + m - nt\}, \quad T = T_0\{1 + q - \varsigma t\},\\
&n = \mu'\Bigg\{\alpha_{1\mu} + \frac{k_0^2}{2A_1^2(A_2 - A_3)}\Big[\alpha_{1\mu}A_1(A_2A_3 - A_1A_2 - A_1A_3) +\\
&\quad + \alpha_{2\mu}A_1A_2(A_1 - A_3) + \alpha_{3\mu}A_1A_3(A_1 - A_2)\Big]\Bigg\},\\
&m = \frac{0.5k_0^2}{\rho_\mu A_1^2(A_2 - A_3)}\Big[\alpha_{1\mu}A_1(A_2A_3 - A_1A_2 - A_1A_3) +\\
&\quad + \alpha_{2\mu}A_1A_2(A_1 - A_3) + \alpha_{3\mu}A_1A_3(A_1 - A_2)\Big],\\
&q = \frac{k_0^2}{(A_2 - A_3)\rho_\mu}\Big[\alpha_{2\mu}(A_1 - A_3) + \alpha_{3\mu}(A_1 - A_2) + \alpha_{1\mu}(A_2 + A_3 - 2A_1)\Big],\\
&\varsigma = \mu'\Bigg\{2\alpha_{1\mu} + \frac{k_0^2}{(A_2 - A_3)}\Big[\alpha_{2\mu}(A_1 - A_3) + \alpha_{3\mu}(A_1 - A_2) + \alpha_{1\mu}(A_2 + A_3 - 2A_1)\Big]\Bigg\},\\
&\rho_\mu = \alpha_{2\mu} + \alpha_{3\mu} - 2\alpha_{1\mu}, \quad \alpha_{i\mu} = i_{ii}/A_i \quad (i = 1, 2, 3).
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Функции $G(t)$ и $T(t)$ являются строго убывающими, как во всех ранее рассмотренных случаях. Для определения направления вращения вектора **G** второе уравнение системы (2.5) приведено к другому виду с учетом (3.6). После интегрирования получим также квадратичную функцию вида (3.5).

Авторы благодарят Л.Д. Акуленко за внимание к работе, ценные советы и полезные обсуждения.

Список литературы

1. *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. — М.: Наука, 1965. — 416 с.
2. *Черноусько Ф.Л.* О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов // ПММ. — 1963. — Т. 27, № 3. — С. 471–483.
3. *Белецкий В.В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. — М.: Изд-во МГУ, 1975. — 308 с.
4. *Белецкий В.В., Яншин А.М.* Влияние аэродинамических сил на вращательное движение искусственных спутников. — Киев: Наукова думка, 1984. — 168 с.
5. *Акуленко Л.Ф., Лещенко Д.Д., Черноусько Ф.Л.* Быстрое движение вокруг неподвижной точки тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде // Изв. АН СССР. МТТ. — 1982. — № 3. — С. 5–13.
6. *Кузнецова Е.Ю., Сазонов В.В., Чебуков С.Ю.* Эволюция быстрого вращения спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов // Изв. РАН. МТТ. — 2000. — № 2. — С. 3–14.
7. *Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Рачинская А.Л.* Эволюция вращений спутника относительно центра масс под действием гравитационного момента и момента сил сопротивления // Четвертые Поляховские чтения: Избранные тр. — СПб.: Изд-во "ВВМ", 2006. — С. 222–231.
8. *Карымов А.А.* Устойчивость вращательного движения геометрически симметричного искусственного спутника Солнца в поле сил светового давления // ПММ. — 1964. — Т. 28, № 5. — С. 923–930.
9. *Абалакин В.К., Аксенов Е.П., Гребенников Е.А., Демин В.Г., Рябов Ю.А.* Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. — М.: Наука, 1976. — 862 с.
10. *Поляхова Е.Н.* Космический полет с солнечным парусом: проблемы и перспективы. — М.: Наука, 1986. — 304 с.
11. *Сидоренко В.В.* О вращательном движении космического аппарата с солнечным стабилизатором // Космич. исслед. — 1992. — Т. 30, № 6. — С. 780–790.
12. *Сазонов В.В.* Движение астероида относительно центра масс под действием момента сил светового давления // Астрон. вестник. — 1994. — Т. 28, № 2. — С. 95–107.
13. *Лещенко Д.Д., Шамаев А.С.* О движении спутника относительно центра масс под действием моментов сил светового давления // Изв. АН СССР. МТТ. — 1985. — № 1. — С. 14–21.
14. *Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д.* Эволюция вращений трехосного спутника, близкого к динамически-сферическому, под действием моментов сил светового давления // Изв. РАН. МТТ. — 1996. — № 2. — С. 3–12.
15. *Лещенко Д.Д.* Эволюция вращений трехосного тела под действием момента сил светового давления // Изв. РАН. МТТ. — 1997. — № 6. — С. 17–26.
16. *Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Суксова С.Г., Тимошенко И.А.* Движение спутника относительно центра масс под действием гравитационных и световых моментов // Механика твердого тела. — 2004. — № 34. — С. 95–105.
17. *Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Суксова С.Г., Тимошенко И.А.* Эволюция вращений трехосного спутника, близкого к динамически-сферическому, под действием гравитационных и световых моментов // Изв. РАН. МТТ. — 2006. — № 4. — С. 97–107.
18. *Волосов В.М., Моргунов Б.И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. — М.: Изд-во МГУ, 1971. — 507 с.
19. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т.1: Механика. — М.: Наука, 1973. — 208 с.
20. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Наука, 1971. — 1108 с.
21. *Акуленко Л.Д.* Схемы усреднения высших степеней в системах с медленной и быстрой фазами // ПММ. — 2002. — Т. 66, № 2. — С. 165–176.