

УДК 531.55:521.2

© 2008 г. Л.Д. АКУЛЕНКО, Д.Д. ЛЕЩЕНКО, А.Л. РАЧИНСКАЯ

ЭВОЛЮЦИЯ БЫСТРОГО ВРАЩЕНИЯ СПУТНИКА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ГРАВИТАЦИОННОГО МОМЕНТА В СРЕДЕ С СОПРОТИВЛЕНИЕМ

Исследуется быстрое вращательное движение относительно центра масс динамически несимметричного спутника под действием гравитационного момента и момента сил сопротивления. Орбитальные движения с произвольным эксцентриситетом предполагаются заданными. Момент сил сопротивления полагается линейной функцией угловой скорости. Анализируется система, полученная после усреднения по движению Эйлера–Пуансо. Установлены эффекты убывания модуля кинетического момента и кинетической энергии, существования квазистационарных режимов движения (по полюдиям). Определена ориентация вектора кинетического момента в орбитальной системе координат. Проведены численный анализ в общем случае и аналитическое исследование в окрестности осевого вращения и для случая малой диссипации.

1. Постановка задачи. Рассмотрим движение спутника относительно центра масс под действием совместного влияния моментов сил гравитационного притяжения и сопротивления. Вращательные движения рассматриваются в рамках модели динамики твердого тела, центр масс которого движется по эллиптической орбите вокруг Земли. Задачи динамики, обобщенные и осложненные учетом различных возмущающих факторов, и в настоящее время остаются достаточно актуальными. Исследованию вращательных движений тел относительно неподвижной точки под действием возмущающих моментов сил различной природы (гравитационных, аэродинамических, электромагнитных и др.), близкому к приводимому ниже, посвящены работы [1–8].

Введем три декартовы системы координат, начало которых совместим с центром инерции спутника [1, 2]. Система координат Ox_i ($i = 1, 2, 3$) движется поступательно вместе с центром инерции: ось Ox_1 параллельна радиусу-вектору перигея орбиты, ось Ox_2 – вектору скорости центра масс спутника в перигее, ось Ox_3 – нормали к плоскости орбиты. Система координат Oy_i ($i = 1, 2, 3$) связана со спутником и ориентирована по вектору кинетического момента $\mathbf{G}$. Ось Oy_3 направлена по вектору кинетического момента $\mathbf{G}$, ось Oy_2 лежит в плоскости орбиты (т.е. в плоскости Ox_1x_2), ось Oy_1 лежит в плоскости Ox_3y_3 и направлена так, что векторы $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3$ образуют правую тройку [1–3]. Оси системы координат Oz_i ($i = 1, 2, 3$) связаны с главными центральными осями инерции твердого тела. Взаимное положение главных центральных осей инерции и осей Oy_i определим углами Эйлера. При этом направляющие косинусы α_{ij} осей z_i относительно системы Oy_i выражаются через углы Эйлера φ, ψ, θ по известным формулам [1]. Положение вектора кинетического момента $\mathbf{G}$ относительно его центра масс в системе координат Ox_i определяются углами λ и δ , как показано в [1–3].

Уравнения движения тела относительно центра масс запишем в форме [2]:

$$\frac{dG}{dt} = L_3, \quad \frac{d\delta}{dt} = \frac{L_1}{G}, \quad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{L_2}{G \sin \delta}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\theta}{dt} &= G \sin\theta \sin\varphi \cos\varphi \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right) + \frac{L_2 \cos\psi - L_1 \sin\psi}{G} \\
\frac{d\varphi}{dt} &= G \cos\theta \left(\frac{1}{A_3} - \frac{\sin^2\varphi}{A_1} - \frac{\cos^2\varphi}{A_2} \right) + \frac{L_1 \cos\psi + L_2 \sin\psi}{G \sin\theta} \\
\frac{d\psi}{dt} &= G \left(\frac{\sin^2\varphi}{A_1} + \frac{\cos^2\varphi}{A_2} \right) - \frac{L_1 \cos\psi + L_2 \sin\psi}{G} \operatorname{ctg}\theta - \frac{L_2}{G} \operatorname{ctg}\delta
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь L_i – моменты внешних сил относительно осей Oy_i , G – величина кинетического момента, A_i ($i = 1, 2, 3$) – главные центральные моменты инерции относительно осей Oz_i .

Проекции L_i момента внешних сил, складывающихся из гравитационного момента L_i^g и момента сил внешнего сопротивления L_i^r , на оси Oy_i записываются в виде, принятом в работах [2,6]. Здесь приведена проекция на ось Oy_1 , на другие оси проекции имеют аналогичный вид

$$\begin{aligned}
L_1 &= L_1^g + L_1^r \equiv \frac{3\omega_0^2(1+e\cos\theta)^3}{(1-e^2)^3} \sum_{j=1}^3 (\beta_2\beta_j S_{3j} - \beta_3\beta_j S_{2j}) - \\
&- G \sum_{i=1}^3 \left(\frac{I_{i1}\alpha_{1i}\alpha_{31}}{A_1} + \frac{I_{i2}\alpha_{1i}\alpha_{32}}{A_2} + \frac{I_{i3}\alpha_{1i}\alpha_{33}}{A_3} \right) \\
S_{mj} &= \sum_{p=1}^3 A_p \alpha_{jp} \alpha_{mp}, \quad \beta_1 = \cos(v-\lambda) \cos\delta \\
\beta_2 &= \sin(v-\lambda), \quad \beta_3 = \cos(v-\lambda) \sin\delta
\end{aligned} \tag{1.2}$$

где ω_0 – угловая скорость орбитального движения, e – эксцентриситет орбиты.

В некоторых случаях наряду с переменной θ удобно использовать в качестве дополнительной переменной важную характеристику – кинетическую энергию T , производная которой имеет вид

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{dt} &= \frac{2T}{G} L_3 + G \sin\theta \left[\cos\theta \left(\frac{\sin^2\varphi}{A_1} + \frac{\cos^2\varphi}{A_2} - \frac{1}{A_3} \right) (L_2 \cos\psi - L_1 \sin\psi) + \right. \\
&+ \left. \sin\varphi \cos\varphi \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right) (L_1 \cos\psi + L_2 \sin\psi) \right]
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Центр масс спутника движется по кеплеровскому эллипсу с эксцентриситетом e и периодом обращения Q . Зависимость истинной аномалии v от времени t дается соотношением

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\omega_0(1+e\cos v)^2}{(1-e^2)^{3/2}}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{Q} \tag{1.4}$$

Рассматривается динамически несимметричный спутник, моменты инерции которого для определенности удовлетворяют неравенству $A_1 > A_2 > A_3$, в предположении, что угловая скорость ω движения спутника относительно центра масс существенно боль-

ше угловой скорости орбитального движения ω_0 , т.е. $\varepsilon = \omega_0/\omega \sim A_1\omega_0/G \ll 1$. В этом случае кинетическая энергия вращения тела велика по сравнению с моментами возмущающих сил.

В работе предполагается, что момент сопротивления $\mathbf{L}^r$ может быть представлен в виде $\mathbf{L}^r = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$, где тензор $\mathbf{I}$ имеет постоянные компоненты I_{ij} в системе Oz_i , связанной с телом [1, 6]. Сопротивление среды предполагаем слабым порядка малости ε^2 : $\|\mathbf{I}\|/G_0 \sim \varepsilon^2 \ll 1$, где $\|\mathbf{I}\|$ – норма матрицы коэффициентов сопротивления, G_0 – кинетический момент спутника в начальный момент времени.

Ставится задача исследовать решение системы (1.1)–(1.4) при малом ε на большом промежутке времени $t \sim \varepsilon^{-2}$. Для решения задачи будем применять метод усреднения [9].

2. Процедура метода усреднения. Рассмотрим невозмущенное движение ($\varepsilon = 0$), когда моменты внешних сил равны нулю. В этом случае вращение твердого тела является движением Эйлера–Пуансо. Величины G, δ, λ, T, v обращаются в постоянные, а φ, ψ, θ – некоторые функции времени t . Медленными переменными в возмущенном движении будут G, δ, λ, T, v , а быстрыми – углы Эйлера φ, ψ, θ .

Рассмотрим движение при условии $2TA_1 \geq G^2 \geq 2TA_2$, соответствующем траекториям вектора кинетического момента, охватывающим ось максимального момента инерции Oz_1 [10]. Введем величину

$$k^2 = \frac{(A_2 - A_3)(2TA_1 - G^2)}{(A_1 - A_2)(G^2 - 2TA_3)}, \quad 0 \leq k^2 \leq 1 \quad (2.1)$$

представляющую собой в невозмущенном движении постоянную – модуль эллиптических функций, описывающих это движение.

Для построения усредненной системы первого приближения подставим решение невозмущенного движения Эйлера–Пуансо [10] в правые части уравнений (1.1), (1.3) и проведем усреднение по переменной ψ , а затем по времени t с учетом зависимости φ, θ от t [2]. При этом для медленных переменных δ, λ, G, T сохраняются прежние обозначения. В результате получим четыре уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{dt} &= -\frac{3\omega_0^2(1 + e\cos v)^3}{2G(1 - e^2)^3} \beta_2 \beta_3 N^*, \quad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{3\omega_0^2(1 + e\cos v)^3}{2G(1 - e^2)^3 \sin \delta} \beta_1 \beta_3 N^* \\ \frac{dG}{dt} &= -\frac{G}{R(k)} \{ I_{22}(A_1 - A_3)W(k) + I_{33}(A_1 - A_2)[k^2 - W(k)] + I_{11}(A_2 - A_3)[1 - W(k)] \} \\ \frac{dT}{dt} &= -\frac{2T}{R(k)} \{ I_{22}(A_1 - A_3)W(k) + I_{33}(A_1 - A_2)[k^2 - W(k)] + \\ &+ \frac{(A_1 - A_2)(A_1 - A_3)(A_2 - A_3)}{S(k)} \left\{ \frac{I_{33}}{A_3}[k^2 - W(k)] + \frac{I_{22}}{A_2}(1 - k^2)W(k) \right\} + \\ &+ \frac{I_{11}(A_2 - A_3)R(k)}{A_1 S(k)} [1 - W(k)] \} \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$S(k) = A_2 - A_3 + (A_1 - A_2)k^2$$

$$W(k) = 1 - E(k)/K(k), \quad R(k) = A_1(A_2 - A_3) + A_3(A_1 - A_2)k^2$$

$$N^* = A_2 + A_3 - 2A_1 + 3\left(\frac{2A_1T}{G^2} - 1\right) \left[A_3 + (A_2 - A_3) \frac{K(k) - E(k)}{K(k)k^2} \right]$$

Здесь $K(k)$ и $E(k)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно. Дифференцируя выражение (2.1) для k^2 и используя два последних уравнения (2.2), получим дифференциальное уравнение, которое не зависит от других переменных

$$\begin{aligned}\frac{dk^2}{d\xi} &= (1-\chi)(1-k^2) - [(1-\chi) + (1+\chi)k^2] \frac{E(k)}{K(k)} \\ \chi &= (2I_{22}A_1A_3 - I_{11}A_2A_3 - I_{33}A_1A_2) / [(I_{33}A_1 - I_{11}A_3)A_2] \\ \xi &= (t - t_*)/N, \quad N = A_1A_3 / (I_{33}A_1 - I_{11}A_3) \sim \varepsilon^{-2}\end{aligned}\tag{2.3}$$

Здесь t_* – постоянная. Значению $k^2 = 1$ отвечает равенство $2TA_2 = G^2$, что соответствует сепаратрисе для движения Эйлера–Пуансо.

Из уравнений (2.2) следует, что под влиянием сопротивления среды происходит эволюция как кинетической энергии тела T , так и величины кинетического момента G . Непосредственно видно, что в первом приближении на их изменение оказывает влияние только сила сопротивления, причем в уравнения входят лишь диагональные коэффициенты I_{ii} матрицы момента трения. Члены, содержащие недиагональные компоненты I_{ij} ($i \neq j$), выпадают при усреднении. Изменения углов λ , δ зависят как от действия силы сопротивления, так и гравитационного притяжения.

Уравнение (2.3) описывает усредненное движение конца вектора кинетического момента $\mathbf{G}$ на сфере радиуса G . Третье уравнение (2.2) описывает изменение радиуса сферы с течением времени.

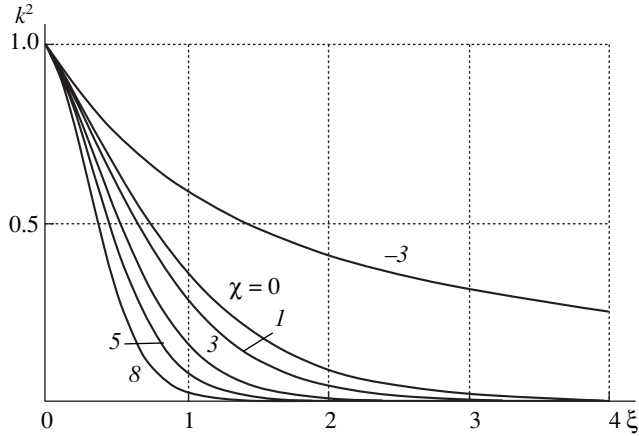
Выражение, стоящее в фигурных скобках правой части уравнения (2.2) для G положительно (при $A_1 > A_2 > A_3$), так как справедливы неравенства $(1 - k^2)K \leq E \leq K$ [11]. Каждый коэффициент при I_{ii} является неотрицательной функцией k^2 , причем одновременно они все в нуль обратиться не могут. Поэтому $dG/dt < 0$ поскольку $G > 0$, т.е. переменная G строго убывает для любых $k^2 \in [0, 1]$. Аналогично показывается, что кинетическая энергия также строго убывает.

Основным этапом в исследовании движения тела является анализ уравнения (2.3). Отметим, что на эволюцию k^2 оказывает влияние только сопротивление среды, и в силу того, что это уравнение интегрируется самостоятельно, происходит частичное разделение влияния гравитационного момента и момента сопротивления. Полное разделение в данном случае не имеет места, так как медленно убывающие переменные G , T входят в правые части уравнений (2.2) для λ и δ . Уравнение (2.3) совпадает с аналогичным, полученным для случая свободного пространственного движения тела с полостью, заполненной жидкостью большой вязкости [12] и с уравнением, описывающим движение тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде [6].

Нетрудно проверить, что для величины χ из (2.3) справедливы равенства

$$\chi = \frac{A_3\chi_1 - A_1\chi_2}{A_3\chi_1 + A_1\chi_2}, \quad \chi_1 = I_{22}A_1 - I_{11}A_2, \quad \chi_2 = I_{33}A_2 - I_{22}A_3$$

откуда следует, что так как величины χ_1 , χ_2 могут принимать любые значения, то в зависимости от параметров задачи A_i , I_{ii} ($i = 1, 2, 3$) величина χ изменяется в диапазоне от $-\infty$ до $+\infty$. Случай когда выполняются неравенства $\chi_1 > 0$, $\chi_2 > 0$ и, следовательно, $|\chi| \leq 1$ изучен в [12]. Уравнение вида (2.3) для твердого тела с полостью произвольной формы, заполненной сильно вязкой жидкостью, где параметр χ изменялся в пределах $|\chi| \leq 3$, рассматривалось в [13]. Аналогичное уравнение имеет место при $\chi \in (-\infty, +\infty)$ для быстрого движения вокруг неподвижной точки тяжелого тела в сопротивляющейся среде [6].



Фиг. 1

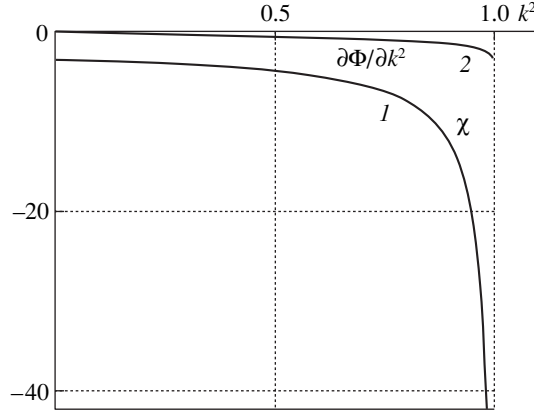
Численное интегрирование уравнения (2.3) при начальном условии $k^2(0) \approx 1$ показывает, что функция k^2 монотонно убывает с ростом ξ , причем тем быстрее, чем больше χ . Проведенный численный расчет уравнения (2.3) приведен на фиг. 1 для $\chi = -3; 0; 1; 3; 5; 8$. Видно, что чем больше χ , тем быстрее убывает функция k^2 . Заметим, что для $\chi < -3$ появляются новые качественные эффекты, а при $\chi > 3$ характер решения тот же, что и при $|\chi| \leq 3$.

Уравнение (2.3) для k^2 допускает стационарные точки $k^2 = k_*^2$ при $\chi < -3$, когда независимо от G и T величина k^2 в силу уравнения (2.3) остается постоянной при соответствующем выборе начальных условий. Необходимо отметить, что при $\chi > -3$ таких стационарных точек (кроме $k = 0, k = 1$) не существует.

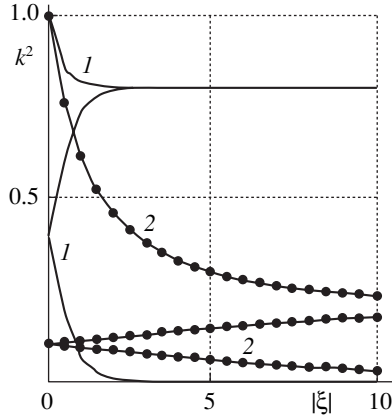
Для определения квазистационарных решений $k^2 = k_*^2$ приравняем нулю правую часть (2.3). Полученное уравнение разрешим относительно χ :

$$\chi = \frac{k^2 - 1 + (1 + k^2)E(k)/K(k)}{(1 - k^2)[E(k)/K(k) - 1]} \quad (2.4)$$

График зависимости χ от k^2 , определенный численно, изображен кривой 1 на фиг. 2, из которого видно, что при любом $\chi < -3$ существует единственное значение $k_*^2 \in (0, 1)$, которое отвечает квазистационарному движению. Численный расчет производился для $k_*^2 = 0.2; 0.4; 0.6; 0.8$. На фиг. 3 изображены типичные графики функций $k^2(\chi, \xi)$, полученные в результате численного интегрирования уравнения (2.3). Сплошная кривая получена при $k_*^2 = 0.8$ и кривая с маркерами при $k_*^2 = 0.2$. Для заданных значений k_*^2 согласно уравнению (2.4) определялось значение величины $\chi = \chi_*$, а затем производилось численное интегрирование уравнения (2.3) при полученном значении χ_* . Каждый график содержит по три ветви. В качестве начального условия для верхних ветвей выбиралось $k^2(0) = 1$. Две нижние ветви для каждого графика были построены при начальных условиях $k^2(0) = k_*^2/2$. При этом возрастающая ветвь отвечает инте-



Фиг. 2



Фиг. 3

грированию для $\xi > 0$, а убывающая ветвь является зеркальным отражением относительно прямой $\xi = 0$ зависимости $k^2(\chi, \xi)$, полученной при $\xi < 0$.

Уравнение (2.3) является автономным, поэтому решение $k^2(\chi, \xi)$ может быть определено при любых начальных условиях. Выбор соответствующей ветви графика позволит определить характер изменения величины k^2 . Так при начальном значении $k^2 = k_0^2 > k_*^2$ берется верхняя ветвь, если $k_*^2/2 \leq k_0^2 < k_*^2$, то – средняя. Если же $k_0^2 < k_*^2/2$, то берется нижняя ветвь, для которой движение происходит при отрицательном ξ с возрастанием величины k^2 до $k^2 = k_*^2/2$, а затем переходим на среднюю ветвь.

Рассмотрим систему, состоящую из первых двух уравнений системы (2.2) и уравнения (1.4). Их можно записать следующим образом:

$$\dot{\delta} = \omega_0^2 \Delta(v, \delta, \lambda), \quad \dot{\lambda} = \omega_0^2 \Lambda(v, \delta, \lambda)$$

$$\dot{v} = \frac{\omega_0}{h(e)}(1 + e \cos v)^2, \quad h(e) = (1 - e^2)^{3/2}$$

Здесь Δ , Λ – коэффициенты в правых частях первых двух уравнений (2.2), δ , λ – медленные переменные, а v – полумедленная.

Получена система специального вида, для решения которой применяется модифицированный метод усреднения по следующей схеме [14]:

$$\dot{\delta} = \frac{\omega_0^2 h(e)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\Delta(\lambda, \delta, v)}{(1 + e \cos v)^2} dv, \quad \dot{\lambda} = \frac{\omega_0^2 h(e)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\Lambda(\lambda, \delta, v)}{(1 + e \cos v)^2} dv$$

После усреднения получим

$$\dot{\delta} = 0, \quad \dot{\lambda} = 3\omega_0^2 N^* \cos \delta / (4Gh(e)) \quad (2.5)$$

Для медленных усредненных переменных сохраняются прежние обозначения. Отметим, что действие приложенных сил не приводит к изменению угловой скорости δ и отклонение вектора $\mathbf{G}$ от вертикали остается постоянным в указанном приближении.

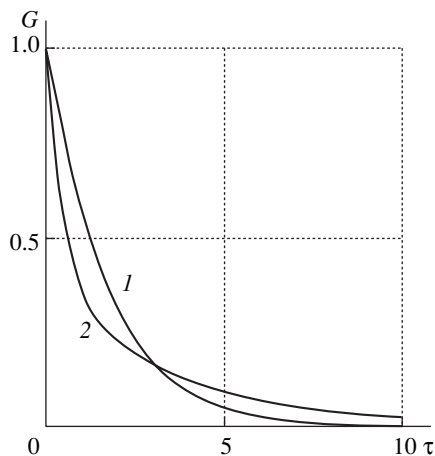
Полученную систему уравнений (2.5), два последних уравнения системы (2.2) и уравнение

$$\frac{dk^2}{dt} = \frac{I_{33}A_1 - I_{11}A_3}{A_1A_3} \left\{ (1 - \chi)(1 - k^2) - [(1 - \chi) + (1 + \chi)k^2] \frac{E(k)}{K(k)} \right\} \quad (2.6)$$

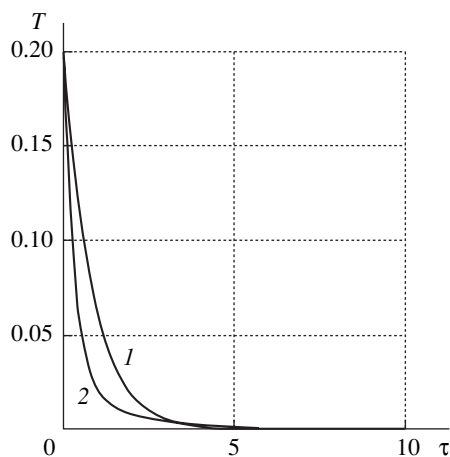
можно численно проинтегрировать. Все вышеуказанные уравнения безразмерны и рассмотрены для малого времени $\tau \sim \epsilon^2 t$. Уравнения для производных кинетической энергии T и кинетического момента G системы (2.2), а также для k^2 вида (2.6) по малому времени τ в безразмерном виде имеют ту же форму записи. Система уравнений (2.5) принимает вид:

$$\dot{\delta} = 0, \quad \dot{\lambda} = 3N^* \cos \delta / (4Gh(e))$$

Интегрирование производилось при начальных условиях $G(0) = 1$; $k^2(0) = 0.99$, $\delta(0) = 0.785$ рад, $\lambda(0) = 0.785$ рад и значениях главных центральных моментов инерции тела $A_1 = 3.2$, $A_2 = 2.6$, $A_3 = 1.67$. Численный расчет выполнялся для различных видов орбит с эксцентриситетом: $e = 0$ – круговая орбита; $e = 0.04473$ – первый советский спутник; $e = 0.0487$ – третий советский спутник; $e = 0.421$ – сильно эллиптическая орбита [1]. Для коэффициентов сопротивления рассматривались два возможных варианта: $I_{11} = 2.322$, $I_{22} = 1.31$, $I_{33} = 1.425$ и $I_{11} = 0.919$, $I_{22} = 5.228$, $I_{33} = 1.666$. В первом случае величина χ уравнения (2.6) была отрицательной $\chi = -4.477$, а во втором $\chi = 3.853$. Численный анализ показывает, что функции $G(t)$ и $T(t)$ являются монотонно убывающими (фиг. 4, 5). Видно, что при положительной величине χ (кривые 2) функции убывают быстрее, но функция $G(t)$ стремится к асимптоте медленнее за больший промежуток времени. Функция $\lambda = \lambda(t)$ в обоих расчетных вариантах величины χ является убывающей функцией, но в первом варианте убывает быстрее. Необходимо отметить, что при изменении эксцентриситета орбиты в расчетах в обоих вариантах увеличение e приводит к более быстрому убыванию угла λ . На фиг. 6 показаны графики функции $\lambda = \lambda(t)$ при $e = 0$ (кривая 1) и $e = 0.421$ (кривая 2) при положительном χ . Видно, что со временем величина угла λ уменьшается, т.е. вращение вектора $\mathbf{G}$ в пространстве вокруг нормали к плоскости орбиты происходит на постоянном угловом расстоянии δ от нее в направлении по ходу часовой стрелки.



Фиг. 4



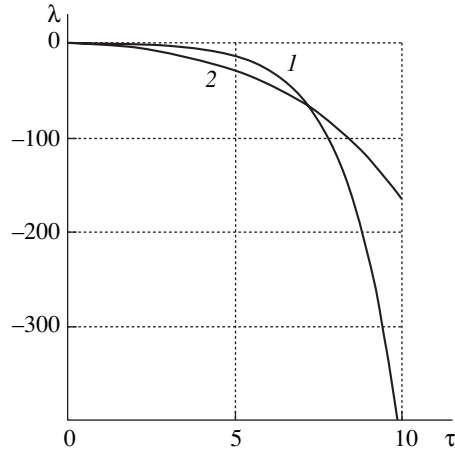
Фиг. 5

3. Анализ предельных случаев. 3.1. Рассмотрим движение тела при малых $k^2 \ll 1$, отвечающих движениям твердого тела, близким к вращениям вокруг оси A_1 . В этом случае правую часть уравнения (2.3) можно упростить, используя разложения полных эллиптических интегралов в ряды по k^2 [11]. Тогда (2.3) интегрируется и асимптотическое решение записывается в виде

$$k^2 = C_1 \exp \left[-\frac{(3 + \chi)\xi}{2} \right] = k_0^2 \exp[-\rho t], \quad \rho = \alpha_2 + \alpha_3 - 2\alpha_1 \quad (3.1)$$

$$\alpha_i = I_{ii}/A_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

где $C_1 > 0$ – постоянная.



Фиг. 6

В случае малых k^2 аналитические выражения для величины кинетического момента и кинетической энергии можно получить в явном виде

$$G = G_0 \exp\{-\alpha_1 t + b \exp[-\rho t]\}, \quad T = T_0 \exp\{-2\alpha_1 t + a \exp[-\rho t]\}$$

$$b = \frac{k_0^2}{2\rho A_1^2(A_2 - A_3)} [\alpha_1 A_1(2A_2 A_3 - A_1 A_2 - A_1 A_3) + \alpha_2 A_1 A_2(A_1 - A_3) + \alpha_3 A_1 A_3(A_1 - A_2)] \quad (3.2)$$

$$a = \frac{k_0^2}{(A_2 - A_3)\rho} [\alpha_2(A_1 - A_3) + \alpha_3(A_1 - A_2) + \alpha_1(A_2 + A_3 - 2A_1)]$$

Уравнение (2.5) для λ с учетом (3.2) записывается следующим образом:

$$d\lambda/dt = \phi \exp\{\alpha_1 t - b \exp[-\rho t]\} \{d + \mu(\eta \exp[(a - 2b) \exp(-\rho t)] - 1)\}$$

$$\phi = \frac{3\omega_0^2 \cos \delta}{4(1 - e^2)^{3/2} G_0}, \quad d = A_2 + A_3 - 2A_1$$

$$\mu = 3/2(A_2 + A_3), \quad \eta = 2A_1 T_0 / G_0$$

Его решение имеет следующий вид

$$\lambda = \frac{\phi}{\rho} \{(\mu - d)b^k [-\gamma(-k, b) + \gamma(-k, b e^\tau)] - \mu \eta x^k [-\gamma(-k, x) + \gamma(-k, x e^\tau)]\}$$

$$k = \alpha_1 / \rho, \quad x = 3b - a, \quad \tau = -\rho t$$

Здесь $\gamma(n, x)$ – неполная гамма-функция [11] и $b > 0, x > 0$.

3.2. Представляет интерес исследование системы (2.2) в случае малых диагональных коэффициентов сопротивления, т.е.

$$I_{11} = \mu i_{11}, \quad I_{22} = \mu i_{22}, \quad I_{33} = \mu i_{33}, \quad \mu \ll 1 \quad (3.3)$$

Функции кинетического момента G и кинетической энергии T могут быть представлены в виде степенных рядов по μ :

$$G = G_0 + \mu G_1 + \dots, \quad T = T_0 + \mu T_1 + \dots$$

Два последних уравнения системы (2.2) после интегрирования записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} G &= G_0 - \frac{G_0 \mu t}{R(k_0)} \{ i_{22}(A_1 - A_3)W(k_0) + i_{33}(A_1 - A_2)[k_0^2 - W(k_0)] + i_{11}(A_2 - A_3)(1 - W(k_0)) \} \\ T &= T_0 - \frac{2T_0 \mu t}{R(k_0)} \left\{ i_{22}(A_1 - A_3)W(k_0) + i_{33}(A_1 - A_2)[k_0^2 - W(k_0)] + \right. \\ &+ \frac{(A_1 - A_2)(A_1 - A_3)(A_2 - A_3)}{S(k_0)} \left\{ \frac{i_{33}}{A_3}[k_0^2 - W(k_0)] + \frac{i_{22}}{A_2}(1 - k_0^2)W(k_0) \right\} + \\ &\left. + \frac{i_{11}(A_2 - A_3)R(k_0)}{A_1 S(k_0)} [1 - W(k_0)] \right\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь $W(k_0)$, $R(k_0)$, $S(k_0)$ – значения функций (2.2) при $k = k_0$. Согласно (3.4) функции $G(t)$ и $T(t)$ являются строго убывающими, как и в случае системы (2.2).

Для малых моментов сопротивления необходимо также построить приближенное решение

$$\begin{aligned} k^2 &= k_0^2 + \frac{2\mu t}{A_1 A_2 A_3} \left\{ A_1(i_{33}A_2 - i_{22}A_3)(1 - k_0^2) - \right. \\ &\left. - [A_1(i_{33}A_2 - i_{22}A_3) + A_3(i_{22}A_1 - i_{11}A_2)k_0^2] \frac{E(k_0)}{K(k_0)} \right\} \end{aligned}$$

С помощью формулы для изменения величины кинетического момента (3.4), проведем анализ направления вектора $\mathbf{G}$. Согласно (2.5) отклонение вектора $\mathbf{G}$ от вертикали также остается постоянным, как и в случае малых k^2 , а скорость изменения угла λ зависит от непостоянной величины N^* , которая выражается через кинетический момент G и кинетическую энергию T . Тогда для малых моментов сопротивления закон изменения угла λ от времени имеет вид

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{3\omega_0^2 N_0 t \cos \delta}{4G_0(1 - e^2)^{3/2}} + \frac{3\omega_0^2 \mu t^2 \phi \cos \delta}{8G_0(1 - e^2)^{3/2}}$$

Изменение угла $\lambda = \lambda(t)$ имеет вид квадратической функции от t , у которой свободный член и коэффициент при первой степени t выражаются через постоянные величины ω_0 , N_0 , G_0 и $\cos \delta$. Все величины являются положительными и задаются в начальный момент времени.

3.3. Представляет интерес рассмотреть случай малых k^2 и малых коэффициентов сопротивления (3.3). При малых k^2 были получены законы изменения кинетического момента G , кинетической энергии T (3.2), которые с учетом малых первого порядка μ дают

$$G = G_0\{1 + m - nt\}, \quad T = T_0\{1 + q - \zeta t\}$$

$$n = \mu \left\{ \alpha_{1\mu} + \frac{k_0^2}{2A_1^2(A_2 - A_3)} [\alpha_{1\mu}A_1(A_2A_3 - A_1A_2 - A_1A_3) + \alpha_{2\mu}A_1A_2(A_1 - A_3) + \alpha_{3\mu}A_1A_3(A_1 - A_2)] \right\}$$

$$m = \frac{k_0^2}{2\rho_\mu A_1^2(A_2 - A_3)} [\alpha_{1\mu}A_1(A_2A_3 - A_1A_2 - A_1A_3) + \alpha_{2\mu}A_1A_2(A_1 - A_3) + \alpha_{3\mu}A_1A_3(A_1 - A_2)] \quad (3.5)$$

$$q = \frac{k_0^2}{(A_2 - A_3)\rho_\mu} [\alpha_{2\mu}(A_1 - A_3) + \alpha_{3\mu}(A_1 - A_2) + \alpha_{1\mu}(A_2 + A_3 - 2A_1)]$$

$$\varsigma = \mu \left\{ 2\alpha_{1\mu} + \frac{k_0^2}{(A_2 - A_3)} [\alpha_{2\mu}(A_1 - A_3) + \alpha_{3\mu}(A_1 - A_2) + \alpha_{1\mu}(A_2 + A_3 - 2A_1)] \right\}$$

$$\rho_\mu = \alpha_{2\mu} + \alpha_{3\mu} - 2\alpha_{1\mu}, \quad \alpha_{i\mu} = i_{ii}/A_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

Функции $G(t)$ и $T(t)$ являются строго убывающими, как во всех ранее рассмотренных случаях. Для определения направления вращения вектора $\mathbf{G}$ второе уравнение системы (2.2) приведено к другому виду с учетом (3.5). После интегрирования получим

$$\lambda = \frac{3\omega_0 \cos \delta}{4(1 - e^2)^{3/2} G_0(1 + m)} \left\{ (z + f)t + \left[-\frac{nz}{(1 + m)} + f \left(\frac{3n(1 + q)}{(1 + m)} - \varsigma \right) \right] \frac{t^2}{2} \right\} + \lambda_0$$

$$z = -\frac{A_2 + A_3 + 4A_1}{2}, \quad f = 3(A_2 + A_3) \frac{T_0 A_1(1 + q)}{G_0^2(1 + m)^2}$$

4. Качественная картина движения. Рассмотрим устойчивость квазистационарных движений, найденных в пп. 2, 3. Правую часть уравнения (2.3) обозначим через $\Phi(k^2, \chi)$. Производная этой функции по k^2 для χ , соответствующих квазистационарным движениям (2.4), имеет вид

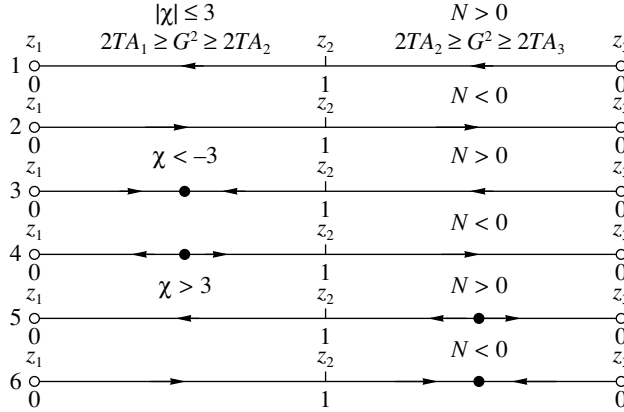
$$\frac{\partial \Phi}{\partial k^2} = -\frac{2}{(1 - k^2)} \frac{E(k)}{K(k)} + \frac{1}{(E(k)/K(k) - 1)} \left(2 \frac{E(k)}{K(k)} - 1 - \frac{1}{(1 - k^2)} \left(\frac{E(k)}{K(k)} \right)^2 \right)$$

На фиг. 2 кривая 2 изображает график функции $\partial \Phi / \partial k^2$, полученный в результате численного расчета. Как видно из графика, $\partial \Phi / \partial k^2 < 0$ для всех $k^2 \in [0, 1]$, т.е. все квазистационарные движения п. 2 асимптотически устойчивы по отношению к переменной k^2 (в смысле [15]) для $\xi \geq 0$. Это подтверждается также кривыми на фиг. 3.

Положительным ξ соответствует истинное время $t \geq t_*$ и $N > 0$, т.е. $I_{33}A_1 > I_{11}A_3$ (2.3). В истинном же времени при $N < 0$, $I_{33}A_1 < I_{11}A_3$ эти квазистационарные движения неустойчивы.

Функция $\Phi(k^2, \chi)$ и производная $\partial \Phi / \partial k^2$ для случая малых k^2 , который соответствует движениям твердого тела, близким к вращениям вокруг оси A_1 , имеют вид

$$\Phi(k^2, \chi) = -\frac{k^2}{2}(3 + \chi), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial k^2} = -\frac{3 + \chi}{2}$$



Фиг. 7

Таким образом, квазистационарное движение при $k^2 = 0$ для $\xi > 0$ асимптотически устойчиво при $\chi > -3$ и неустойчиво при $\chi < -3$. В истинном времени для $t \geq t_*$ это движение может быть как устойчивым, так и неустойчивым в зависимости от величины χ ($\chi > -3$ или $\chi < -3$) и знака параметра N .

На основе вышесказанного получим следующую качественную картину движения. Рассмотрим сначала $N > 0$. При $t \geq t_*$ движение описывается формулами (2.1), (2.2), (2.3) и функцией (3.1) соответствует области $2TA_1 \geq G^2 \geq 2TA_2$. При $t \leq t_*$ изучается область $2TA_2 \geq G^2 \geq 2TA_3$, которая соответствует траекториям вектора кинетического момента, охватывающим ось A_3 . В этой области в формулах (2.1), (2.2), (2.3) надо поменять местами A_1 и A_3 , I_{11} и I_{33} . Уравнение (2.3) сохранит свой вид, но в нем необходимо χ заменить на $-\chi$, а N на $-N$. Аналогично можно провести анализ движения при $N < 0$. Постоянную t_* в формуле (2.3) выбираем так, чтобы в момент времени $t = t_*$ движение соответствовало переходу через сепаратису.

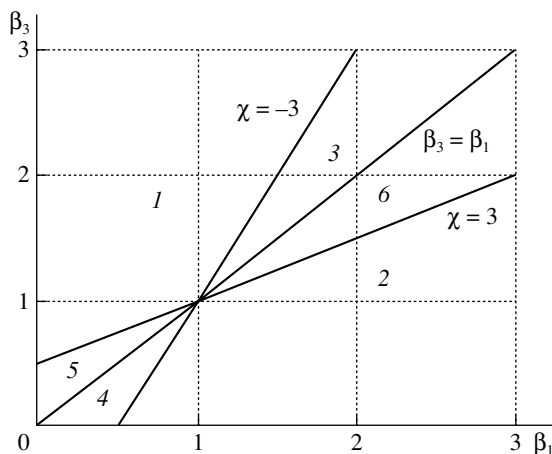
Построим фиг. 7, которая иллюстрирует характер изменения величины k^2 в зависимости от χ и N в истинном времени t . На отрезках указаны точки, соответствующие квазистационарным движениям. При $|\chi| \leq 3$ имеем две точки: $k^2 = 0$ и $k^2 = 1$. При $\chi > 3$ и $\chi < -3$ имеем три точки: $k^2 = 0$; k_*^2 ; 1. Стрелками показана устойчивость или неустойчивость квазистационарного движения. Буквами z_1 , z_2 , z_3 обозначены оси тела, соответствующие указанным значениям k^2 . Левая часть соответствует области $2TA_1 \geq G^2 \geq 2TA_2$, а правая – области $2TA_2 \geq G^2 \geq 2TA_3$. Рассмотрены шесть возможных комбинаций значений величин χ и N .

Дадим следующую интерпретацию полученным результатам. В формуле (3.1) были введены обозначения α_i ($i = 1, 2, 3$). Эти величины имеют смысл коэффициентов затухания вращений вокруг главных осей инерции Oz_i . Например, вращение твердого тела вокруг оси Oz_1 под действием диссипативного момента, пропорционального первой степени угловой скорости ω , описываются соотношениями

$$A_1 d\omega/dt = -I_{11}\omega, \quad \omega = \omega^0 \exp(-\alpha_1 t)$$

Введем безразмерные величины $\beta_i = \alpha_i/\alpha_2$ ($i = 1, 2, 3$). Соотношение (2.3) для χ и N перепишем в виде

$$\chi = \frac{2 - \beta_1 - \beta_3}{\beta_3 - \beta_1}, \quad N = \frac{1}{\alpha_2(\beta_3 - \beta_1)} \quad (4.1)$$



Фиг. 8

На прямой $\beta_3 = \beta_1$ переменная N меняет знак, а прямые $\beta_3 = (1 + \beta_1)/2$ и $\beta_3 = 2\beta_1 + 1$ соответствуют согласно равенству (4.1) $\chi = \pm 3$. На координатной плоскости (β_1, β_3) проведем эти прямые при $\beta_1 > 0$ и $\beta_3 > 0$. Квадрант разбивается на шесть областей (фиг. 8) с номерами, соответствующими порядковым номерам на фиг. 7. Видно, что число квазистационарных режимов движения и их устойчивость зависят от относительной величины затухания вращений α_i ($i = 1, 2, 3$) вокруг главных осей инерции.

Таким образом, в рассматриваемом приближении возмущенное движение тела складывается из быстрого движения Эйлера–Пуансо вокруг вектора $\mathbf{G}$ и из медленной эволюции параметров этого движения. Величины кинетического момента и кинетической энергии строго убывают, и их изменение зависит только от момента сил сопротивления среды. Движение вектора кинетического момента $\mathbf{G}$ вокруг вертикали к плоскости орбиты в первом приближении описывается первыми двумя уравнения системы (2.2). Скорость вращения вектора $\mathbf{G}$ вокруг вертикали переменна с переменным отклонением вектора от вертикали. Во втором приближении метода усреднения отклонение вектора $\mathbf{G}$ от вертикали остается постоянным, при этом угловая скорость вращения переменна (2.5). Эволюция параметров движения Эйлера–Пуансо в системе координат, связанной с телом, описывается уравнением (2.3) и качественно представлена на фиг. 7.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
2. Черноушко Ф.Л. О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 3. С. 474–483.
3. Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ, 1975. 308 с.
4. Белецкий В.В., Янишин А.М. Влияние аэродинамических сил на вращательное движение искусственных спутников. Киев: Наук. думка, 1984. 188 с.
5. Белецкий В.В., Грушевский А.В. Эволюция вращательных движений спутника под действием диссипативного аэродинамического момента // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 1. С. 13–20.
6. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноушко Ф.Л. Быстрое движение вокруг неподвижной точки тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 3. С. 5–13.

7. Пупышев Ю.А. О влиянии гравитационных и аэродинамических возмущающих моментов на вращательное движение около центра масс несимметричного твердого тела // Вестн. ЛГУ. Математика, механика, астрономия. 1971. № 7. Вып.2. С. 129–134.
8. Кузнецова Е.Ю., Сазонов В.В., Чебуков С.Ю. Эволюция быстрого вращения спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 2. С. 3–14.
9. Волосов В.М., Моргунов Б.И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 1, Механика. М.: Наука, 1973. 208 с.
11. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
12. Черноусько Ф.Л. Движение твердого тела с полостями, заполненными вязкой жидкостью, при малых числах Рейнольдса // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1965. Т. 5. № 6. С. 1049–1070.
13. Смирнова Е.П. Стабилизация свободного вращения асимметрического волчка с полостями, целиком заполненными жидкостью // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 6. С. 980–985.
14. Акуленко Л.Д. Схемы усреднения высших степеней в системах с быстрой и медленной фазами // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 2. С. 165–176.
15. Румянцев В.В. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости по отношению к части переменных // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 1. С. 138–143.

Москва

Поступила в редакцию 1.08.2006