Движение твердого тела, близкое к псевдорегулярной прецессии в случае Лагранжа

ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА, БЛИЗКОГО К ПСЕВДОРЕГУЛЯРНОЙ ПРЕЦЕССИИ В СЛУЧАЕ ЛАГРАНЖА

[1]Акуленко Л.Д., [2]Лещенко Д. Д., [2]Козаченко Т. А.

[1]ИПМехРАН, Москва, Россия,
[2]Одесская государственная академия строительства и архитектуры, Одесса, Украина.

Задача о возмущенном движении твердого тела относительно неподвижной точки является одной из самых знаменитых проблем механики. Интерес к ней определяется ее практическим значением для динамики вращательного движения космических аппаратов, прикладной теории гироскопов, входа летательных аппаратов в атмосферу. Эта проблема имеет также и самостоятельный теоретический интерес как раздел классической динамики.

В работе рассматриваются возмущенные вращательные движения относительно неподвижной точки динамически симметричного тяжелого твердого тела, близкие к псевдорегулярной прецессии. Уравнения движения (динамические и кинематические уравнения Эйлера) имеют вид:

$$\begin{gathered} A\dot{p} + (C - A)\, q r = \mu \sin\theta \cos\varphi + \varepsilon M_1, \\ A\dot{q} + (A - C)\, p r = -\mu \sin\theta \sin\varphi + \varepsilon M_2, \\ C\dot{r} = \varepsilon M_3, \quad \dot{\psi} = (p\sin\varphi + q\cos\varphi)\operatorname{cosec}\theta, \\ \dot{\varphi} = r - (p\sin\varphi + q\cos\varphi)\operatorname{ctg}\theta, \\ \dot{\theta} = p\cos\varphi - q\sin\varphi, \\ M_з = M_з(p,\ q,\ r,\ \psi,\ \theta,\ \varphi), \quad i = 1, 2, 3. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь p, q, r – проекции вектора угловой скорости тела на главные оси инерции тела; величины M_i, $i = 1, 2, 3$ – проекции вектора возмущающего момента на те же оси; ψ, θ, φ – углы Эйлера; A – экваториальный, C – осевой момент инерции тела относительно точки O, $A \neq C$. Предполагается, что на тело действует восстанавливающий момент μ, величина которого постоянна.

Ставится задача исследования поведения решения системы (1) при значениях ε, отличных от нуля, на достаточно большом промежутке времени $t \sim \varepsilon^{-1}$ с помощью метода усреднения.

Как показано в книге [1], если угловая скорость r достаточно велика, то выполнено условие $Cr^2 >> \mu$ и можно ввести безразмерный малый параметр $\varepsilon = r^{-1}\sqrt{\mu/C} << 1$. В этом случае тело совершает псевдорегулярную прецессию, т. е. движение, близкое к регулярной прецессии.

Тогда первые интегралы невозмущенного движения Лагранжа принимают вид

$$\begin{gathered} G_z = \varepsilon^{-1}\sqrt{\mu C}\left(1 + \varepsilon g_1 + \varepsilon g_2^2 + \cdots\right), \\ H = \varepsilon^{-2}\frac{\mu}{2}\left(1 + \varepsilon h_1 + \varepsilon h_2^2 + \cdots\right), \quad r = \varepsilon^{-1}\sqrt{\frac{\mu}{C}}. \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь g_i и h_i – пока неизвестные постоянные, G_z – проекция вектора кинетического момента на вертикаль Oz, H – полная энергия тела.

Определены выражения для корней кубического многочлена в случае Лагранжа

$$\begin{gathered} u_1 = \frac{A}{C} + \frac{G_z}{\sqrt{\mu C}}\varepsilon - \varepsilon\Delta, \\ u_2 = \frac{A}{C} + \frac{G_z}{\sqrt{\mu C}}\varepsilon + \varepsilon\Delta, \quad u_3 = \frac{C^2 r^2}{2A\mu}, \\ \Delta = \frac{\sqrt{h_1\left(h_1 - 4\chi g_1\right)}}{2\chi}, \quad \chi = \frac{C}{2A} \le 1. \end{gathered} \tag{3}$$

Известно [1] выражение для косинуса угла нутации θ через эллиптический синус и модуля эллиптических функций в невозмущенном движении

$$\begin{gathered} u = \cos\theta = u_1 + \left(u_2 - u_1\right)\operatorname{sn}^2\left(\alpha t + \beta\right), \\ \alpha = \left[\mu\left(u_3 - u_1\right)/\left(2A\right)\right]^{1/2}, \\ k^2 = \left(u_2 - u_1\right)\left(u_3 - u_1\right)^{-1}. \end{gathered} \tag{4}$$

В случае псевдорегулярной прецессии $u_1 \approx u_2$ и $k^2 \approx 0$. Тогда после ряда преобразований выражение для косинуса угла нутации θ имеет вид

$$\cos\theta = \frac{A}{C} + \frac{\varepsilon G_z}{\sqrt{\mu C}} - \varepsilon\Delta\cos 2\left(\alpha t + \beta\right). \tag{5}$$

В данной работе методика, разработанная в [1,2], используется для усреднения исходной системы уравнений движения при возмущениях, допускающих усреднение по углу нутации. Выполнена процедура усреднения уравнений для медленных переменных. Полученная усредненная система уравнений первого приближения значительно проще исходной, так как автономна и не содержит быстрых осцилляций.

Рассмотрено возмущенное движение, близкое к псевдорегулярной прецессии в случае Лагранжа, с учетом линейно-диссипативных моментов сил. Получены изменения полной энергии тела и проекции вектора кинетического момента тела на вертикаль.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д. Эволюция движений твердого тела относительно центра масс. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2015. – 308с.
2. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноусько Ф.Л. Возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа // Прикл. математика и механика. – 1979. – Т.43, № 5. – С.771-778.