

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК УПРУГИХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Костыляну Д. В., гр. ПГС-251.

Научный руководитель – ст. преподаватель Фомина И.П.

Рассмотрим сначала упругую механическую систему первого типа с одной степенью свободы q . При движении материальной точки M на нее со стороны стержневой системы действует реакция R . Составим основное уравнение динамики

$$m\ddot{a} = R$$

(m – масса материальной точки M), и спроектируем его на ось обобщенной координаты q :

$$m\ddot{q} = -R,$$

Так как мы рассматриваем только линейно упругие системы, то величина упругой реакции пропорциональна смещению точки из положения равновесия, т.е. обобщенной координате q :

$$R = Kq.$$

Коэффициент пропорциональности K между реакцией упругой системы и смещением материальной точки механической системы с ОСС от положения равновесия называется коэффициентом жесткости. Для нахождения K поступим следующим образом: приложим в точке

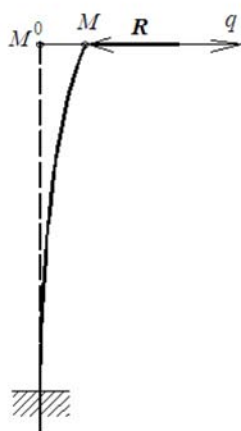
M силу $P_1 = 1$, направленную вдоль оси обобщенной координаты q . Смещение точки M от действия единичной силы, приложенной в этой точке и направленной в положительном направлении оси обобщенной координаты называется коэффициентом влияния и обозначается символом q_{11} . Тогда из пропорциональности силы и смещения получаем

$$1 = Kq_{11}, \text{ откуда следует, что } K = 1 / q_{11}.$$

$$m\ddot{q} + Kq = 0.$$

Разделим уравнение на m и введем обозначение

$$k = \sqrt{\frac{K}{m}}.$$



$$\ddot{q} + k^2 q = 0.$$

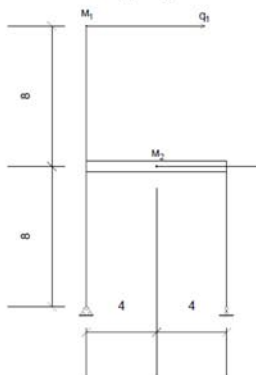
Это и есть дифференциальное уравнение свободного движения упругой механической системы с одной степенью свободы.

$$q = A \sin(kt + \alpha), \text{ где } A = \sqrt{q_0^2 + \frac{V_0^2}{k^2}}, \text{ tg } \alpha = \frac{kq_0}{V_0}.$$

(q_0 – начальное отклонение точки от ее равновесного положения, V_0 – ее начальная скорость).

Таким образом, свободные колебания упругой системы с ОСС являются гармоническими. Так же как и в случае простейшей упругой механической системы, амплитуда и начальная фаза свободных колебаний упругой системы с ОСС зависят от начальных условий, а период и частота не зависят от них.

Рассмотрим сначала упругую механическую систему первого типа с одной степенью свободы q .



$$m_1 = 1 \text{ т}$$

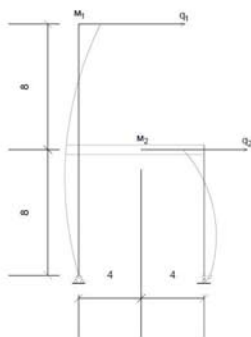
$$m_2 = 0,8 \text{ т}$$

$$EJ = 54 \cdot 10^3 \text{ кНм}^2$$

$$q_{1,1} = \frac{2 \cdot 4^3}{3 \cdot EJ}$$

$$q_{1,0} = 0,1 \text{ м}$$

$$V_{1,0} = 0,2 \text{ м/с}$$



Положим $m_2=0$. Тогда система, изображенная на рис., будет только одну степень свободы с обобщенной координатой q_1 . Определим коэффициент жесткости, круговую частоту, частоту и период колебаний:

$$K_1 = \frac{1}{q_{11}} = \frac{3 \cdot EJ}{2 \cdot l^2} = \frac{3 \cdot 54 \cdot 10^3}{2 \cdot 8^2} = 158,203 \text{ кН/м}$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{K_1}{m_1}} = \sqrt{\frac{158,203}{1}} = 12,578 \text{ с}^{-1}$$

$$\nu_1 = \frac{k_1}{2\pi} = \frac{12,578}{2 \cdot 3,14} = 2 \text{ Гц.}$$

$$T_1 = \frac{1}{\nu_1} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ с.}$$

Находим амплитуду и начальную фазу колебаний:

$$A_1 = \sqrt{q_{1,0}^2 + \frac{V_{1,0}^2}{k_1^2}} = \sqrt{0,17^2 + \frac{0,2^2}{12,578^2}} = 0,1 \text{ м}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{k_1 q_{1,0}}{V_{1,0}} = \frac{0,1 \cdot 12,578}{0,2} = 6,289^\circ$$

$$\alpha_1 = \operatorname{arctg} 6,289 = 1,41 \text{ рад.}$$

Уравнение движения материальной точки M_1 имеет следующий вид:

$$q_1 = A_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) = 0,1 \sin(12,578 t + 1,41).$$

Вывод: свободные колебания упругой системы с ОСС являются гармоническими. Так же как и в случае простейшей упругой механической системы, амплитуда и начальная фаза свободных колебаний упругой системы с ОСС зависят от начальных условий, а период и частота не зависят от них.

Литература

1. Фомин В.М., Фомина И.П., Учебное пособие «Динамические модели для инженерных задач (специальный курс)» - Одесса, 2015.