

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/278242459>

## О движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в сопротивляющейся среде

Article · January 1975

CITATIONS

0

READS

36

1 author:



[Dmytro Leshchenko](#)

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

219 PUBLICATIONS 230 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)

Some of the authors of this publication are also working on these related projects:



Evolution of rotations of a rigid body close to the Lagrange case under the action of nonstationary torque of forces [View project](#)

УДК 531.1

## О ДВИЖЕНИИ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ В СЛАБО СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

Д. Д. Лещенко

(Одесса)

Задача о движении тяжелого тела вокруг неподвижной точки с малым расстоянием центра тяжести до неподвижной точки эквивалентна задаче о движении несимметричного гироскопа с неконтактным подвесом, исследованной в статье [5].

Некоторые частные случаи интегрирования уравнений движения симметричного и не вполне симметричного тел вокруг центра масс в сопротивляющейся среде были рассмотрены в работах [2, 6].

В данной статье изучается быстрое движение динамически несимметричного тяжелого тела с неподвижной точкой в сопротивляющейся среде. Сопротивление предполагается малым и линейным по отношению к угловой скорости.

§ 1. Введем наряду с неподвижной системой координат  $Ox_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) и системой  $Oz_i$ , связанной с твердым телом, систему  $Oy_i$ , ось  $Oy_3$  которой направлена по вектору кинетического момента твердого тела. Общее начало систем совпадает с неподвижной точкой  $O$  тяжелого тела.

Углы  $\lambda$  и  $\delta$  определяют направление вектора кинетического момента относительно неподвижной системы координат, как показано на рисунке.

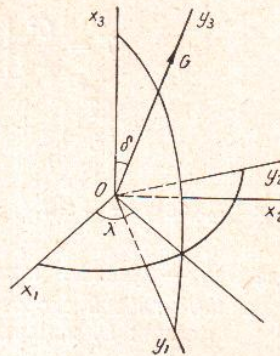
Формулы для косинусов углов между осями приведены в таблице.

Уравнения движения тела относительно неподвижной точки в общем виде для динамически несимметричного тела записываются следующим образом [9]:

$$\frac{dG}{dt} = L_3; \quad \frac{d\delta}{dt} = \frac{L_1}{G}; \quad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{L_2}{G \sin \delta}; \quad (1.1)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = G \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi \left( \frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right) + \frac{L_2 \cos \psi - L_1 \sin \psi}{G};$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = G \cos \theta \left( \frac{1}{A_3} - \frac{\sin^2 \varphi}{A_1} - \frac{\cos^2 \varphi}{A_2} \right) + \frac{L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi}{G \sin \theta}; \quad (1.2)$$





$$\frac{d\psi}{dt} = G \left( \frac{\sin^2 \varphi}{A_1} + \frac{\cos^2 \varphi}{A_2} \right) - \frac{L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi}{G} \operatorname{ctg} \theta - \frac{L_3}{G} \operatorname{ctg} \delta,$$

где  $L_i$  — проекции момента внешних сил относительно неподвижной точки на оси  $Oy_i$ ;  $G$  — величина кинетического момента.

	$Oz_1$	$Oz_2$	$Oz_3$
$Oy_1$	$\alpha_{11} = \cos \varphi \cos \psi -$ $-\cos \theta \sin \varphi \sin \psi$	$\alpha_{12} = -\sin \varphi \cos \psi -$ $-\cos \theta \cos \varphi \cos \psi$	$\alpha_{13} = \sin \theta \sin \psi$
$Oy_2$	$\alpha_{21} = \cos \varphi \sin \psi +$ $+\cos \theta \sin \varphi \cos \psi$	$\alpha_{22} = -\sin \varphi \sin \psi +$ $+\cos \theta \cos \varphi \cos \psi$	$\alpha_{23} = -\sin \theta \cos \psi$
$Oy_3$	$\alpha_{31} = \sin \theta \sin \varphi$	$\alpha_{32} = \sin \theta \cos \varphi$	$\alpha_{33} = \cos \theta$

Используя выражения для проекций вектора  $\bar{G}$  на оси связанной системы координат  $Oz_i$

$$A_i r_i = G \alpha_{3i} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1.3)$$

запишем выражения для кинетической энергии  $T$  движения тела относительно неподвижной точки и ее производной

$$T = \frac{G^2}{2} \left[ \left( \frac{\sin^2 \varphi}{A_1} + \frac{\cos^2 \varphi}{A_2} \right) \sin^2 \theta + \frac{\cos^2 \theta}{A_3} \right]; \quad (1.4)$$

$$\dot{T} = \frac{2T}{G} L_3 + G \sin \theta \left[ \cos \theta \left( \frac{\sin^2 \varphi}{A_1} + \frac{\cos^2 \varphi}{A_2} - \frac{1}{A_3} \right) \times \right. \\ \left. \times (L_2 \cos \psi - L_1 \sin \psi) + \sin \varphi \cos \varphi \left( \frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right) (L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi) \right]. \quad (1.5)$$

Здесь  $A_i$  — главные моменты инерции тела относительно осей  $Oz_i$ ;  $r_i$  — проекции угловой скорости тела на те же оси.

Проекции  $L_i$  момента внешних сил на оси  $Oy_i$  записываются с учетом (1.3) в виде

$$L_1 = - \sum_{i=1}^3 mg \cos \delta a_i \alpha_{2i} - \sum_{i,j=1}^3 \varepsilon_{ij} \frac{G}{A_j} \alpha_{3j} \alpha_{1i}; \\ L_2 = \sum_{i=1}^3 m g a_i (\alpha_{3i} \sin \delta + \alpha_{1i} \cos \delta) - \sum_{i,j=1}^3 \varepsilon_{ij} \frac{G}{A_j} \alpha_{3j} \alpha_{2i}; \quad (1.6) \\ L_3 = - \sum_{i=1}^3 mg \sin \delta a_i \alpha_{2i} - \sum_{i,j=1}^3 \varepsilon_{ij} \frac{G}{A_j} \alpha_{3j} \alpha_{3i},$$

причем  $a_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) определяют положение центра масс в системе  $Oz_i$ ;  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon I_{ij}$ ;  $I_{ij}$  — коэффициенты аэродинамического момента сопротивления вращению тела [1];  $\varepsilon$  — малый параметр.



Предполагаем, что центр тяжести тела удален на малое расстояние от неподвижной точки. В связи с этим выбираем в качестве малого параметра безразмерное отношение  $\varepsilon \sim \frac{mga}{T}$ .

Уравнения (1.2), (1.5), (1.6) решаются методом осреднения [3, 8]. Осреднение проводится по движению Эйлера способом, предложенным в работах [9, 10] для нерезонансных случаев. Погрешность осредненного решения для медленных переменных составляет величину порядка  $\varepsilon$  на интервале времени, за который тело совершит  $\sim \frac{1}{\varepsilon}$  оборотов.

§ 2. Положим  $a_i$  и  $\varepsilon$  равными нулю, при этом из (1.2), (1.5) следует, что  $G, T, \lambda, \delta$  постоянны. Примем для определенности  $A_1 > A_2 > A_3$  и рассмотрим движение при условии  $2TA_1 \geq G^2 \geq 2TA_2$ , соответствующем траекториям вектора кинетического момента, охватывающим ось  $Oz_1$  [7, 10].

Введем функцию

$$k^2 = \frac{(A_2 - A_3)(2TA_1 - G^2)}{(A_1 - A_2)(G^2 - 2TA_3)} \quad (0 \leq k \leq 1). \quad (2.1)$$

Для построения системы осредненных уравнений подставим решение для невозмущенного движения Эйлера—Пуансо в виде [7] в правые части уравнений (1.2), (1.5), (1.6) и произведем осреднение по углу  $\psi$ , а затем по углам  $\theta$  и  $\varphi$ . В результате, используя формулы для интегралов от эллиптических функций [4], получаем

$$\dot{\lambda} = \frac{\pi m g a_1}{2G^2 K(k)} \sqrt{\frac{A_1(G^2 - 2TA_3)}{A_1 - A_3}}; \quad \dot{\delta} = 0;$$

$$\begin{aligned} \frac{\dot{G}}{G} = & -\frac{\varepsilon}{A_1(A_2 - A_3) + A_3(A_1 - A_2)k^2} \left\{ I_{22}(A_1 - A_3) + I_{33}(A_1 - A_2) \times \right. \\ & \left. \times (k^2 - 1) + \frac{E(k)}{K(k)} [I_{11}(A_2 - A_3) - I_{22}(A_1 - A_3) + I_{33}(A_1 - A_2)] \right\}; \\ \frac{\dot{T}}{T} = & \frac{2\varepsilon}{A_1(A_2 - A_3) + A_3(A_1 - A_2)k^2} \left( - \left\{ I_{22}(A_1 - A_3) + \right. \right. \\ & \left. \left. + I_{33}(A_1 - A_2)(k^2 - 1) + \frac{E(k)}{K(k)} [I_{11}(A_2 - A_3) - I_{22}(A_1 - A_3) + \right. \right. \\ & \left. \left. + I_{33}(A_1 - A_2)] \right\} + \frac{(A_1 - A_2)(A_1 - A_3)(A_2 - A_3)}{(A_2 - A_3) + (A_1 - A_2)k^2} \left\{ (1 - k^2) \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \left( \frac{I_{33}}{A_3} - \frac{I_{22}}{A_2} \right) - \frac{E(k)}{K(k)} \left[ \left( \frac{I_{33}}{A_3} - \frac{I_{22}}{A_2} \right) + \left( \frac{I_{22}}{A_2} - \frac{I_{11}}{A_1} \right) k^2 \right] \right\} \right), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $K(k), E(k)$  — полные эллиптические интегралы соответственно первого и второго рода.

Заметим, что наличие сопротивления среды приводит к эволюции как кинетической энергии тела, так и величины кинетического момента.

После ряда преобразований, используя формулу (2.1) и два последних уравнения (2.2), производную  $\frac{dk^2}{d\xi}$  запишем в виде

$$\frac{dk^2}{d\xi} = (1 - \kappa)(1 - k^2) - [(1 - \kappa) + (1 + \kappa)k^2] \frac{E(k)}{K(k)}. \quad (2.3)$$



Здесь

$$\kappa = \frac{2I_{22}A_1A_3 - I_{11}A_2A_3 - I_{33}A_1A_2}{(I_{33}A_1 - I_{11}A_3)A_2}; \quad \xi = \frac{t - t_*}{N};$$

$$N = \frac{A_1A_3}{\varepsilon(I_{33}A_1 - I_{11}A_3)},$$

причем постоянная  $t_*$  выбирается так, чтобы момент  $t = t_*$  соответствовал  $k = 1$ .

Следует отметить, что осредненное уравнение (2.3) является выражением вида (7.11) (см. работу [10]), полученным для случая свободного пространственного движения тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью.

Соотношение (2.3) сохраняется и для движения твердого тела в слабо сопротивляющейся среде вокруг центра масс.

Кроме того, согласно условию (2.3) на эволюцию  $k^2$  оказывает влияние только сопротивление и в силу того, что это уравнение интегрируется самостоятельно, на определенном этапе происходит разделение влияний сопротивления и тяжести.

Величину  $\kappa$  запишем в виде

$$\kappa = \frac{A_3\kappa_1 - A_1\kappa_2}{A_3\kappa_1 + A_1\kappa_2}; \quad \kappa_1 = I_{22}A_1 - I_{11}A_2; \quad \kappa_2 = I_{33}A_2 - I_{22}A_3.$$

В зависимости от динамических характеристик  $\kappa$  может изменяться в диапазоне от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Это расширяет смысл канонического уравнения (2.3) по сравнению с соответствующим уравнением работы [10].

В случае, когда  $\kappa_1 > 0$ ,  $\kappa_2 > 0$  и, следовательно,  $|\kappa| \leq 1$ , можно использовать результаты численного интегрирования при начальном условии  $k^2(0) = 1$ . В этом случае функция  $k^2$  монотонно убывает от 1 до 0 при росте  $\xi$  от 0 до  $\infty$ .

При малых  $k$  правую часть уравнения (2.3) можно упростить, используя разложения полных эллиптических интегралов в ряды по  $k^2$  (см. работу [4]). В этом случае (2.3) интегрируется и асимптотическое решение, соответствующее большому  $\xi$ , записывается в виде

$$k^2 = C \exp\left[-\frac{(3 + \kappa)\xi}{2}\right] = C \exp\left(-\varepsilon \frac{A_3\kappa_1 + A_2\kappa_2}{A_1A_2A_3} t\right); \quad (2.4)$$

$$C > 0 (\xi \rightarrow +\infty; t \rightarrow +\infty).$$

Функцией (2.4) и формулами (2.1), (2.2), (2.3) движение описывается при  $t \geq t_*$ .

Случай, когда имеют место неравенства  $2TA_2 \geq G^2 \geq 2TA_3$ , т. е. траектории вектора кинетического момента охватывают ось  $Oz_3$ , рассматривается аналогично. При этом получаемые результаты могут быть приведены к рассмотренным путем изменения обозначений главных моментов инерции  $A_1$  и  $A_3$ , а решения будут справедливы при  $t \leq t_*$ .

Выражения для  $G$  и  $T$  находим путем интегрирования последних двух уравнений (2.2) с учетом малости  $k$

$$G = G_0 k^{2\beta} \exp\left\{\frac{A_2A_3}{2A_1(A_2 - A_3)} \left[-1 + \frac{A_1(\kappa_1 + \kappa_2)}{A_3\kappa_1 + A_2\kappa_2}\right] k^2\right\}; \quad (2.5)$$

$$T = T_0 k^{4\beta} \exp\left\{\left[\frac{A_2A_3}{A_1(A_2 - A_3)} \left(-1 + \frac{A_1(\kappa_1 + \kappa_2)}{A_3\kappa_1 + A_2\kappa_2}\right) + \right.\right.$$



$$+ \frac{(A_1 - A_2)(A_1 - A_3)}{A_1(A_2 - A_3)} k^2 \},$$

$$\text{где } \beta = \frac{I_{11}A_2A_3}{A_3x_1 + A_2x_2}.$$

Ограничиваясь членами порядка  $k^2$  в выражениях (2.5) и учитывая (2.4), получаем

$$G = G_0 \exp\left(-\varepsilon \frac{I_{11}}{A_1} t\right); \quad T = T_0 \exp\left(-2\varepsilon \frac{I_{11}}{A_1} t\right). \quad (2.6)$$

Таким образом, в пределах сделанных ограничений для  $k^2$  величина кинетического момента и кинетическая энергия убывают по экспоненциальному закону с декрементом затухания соответственно  $\varepsilon \frac{I_{11}}{A_1}$  и  $2\varepsilon \frac{I_{11}}{A_1}$ . Отметим, что при вычислениях рассматривался случай, когда траектории вектора кинетического момента охватывали ось  $Oz_1$ .

При этом выражение для  $\dot{\lambda}$  (2.2) с учетом (2.1) при малых  $k$  записывается так:

$$\dot{\lambda} = \frac{\pi m g a_1 \sqrt{A_1}}{2G}. \quad (2.7)$$

Отсюда следует, что вектор кинетического момента прецессирует с нарастающей по экспоненциальному закону скоростью, в то время как при отсутствии слабого сопротивления  $\dot{\lambda} = \text{const}$  [5]. Полученные решения остаются справедливыми в пределах малых значений  $k$ .

Для тела, близкого к осесимметричному ( $A_1 \approx A_2$ ), система осредненных уравнений для медленных переменных принимает вид

$$\dot{\lambda} = \frac{m g a_3}{G} \cos \theta; \quad \dot{\delta} = 0; \quad \frac{\dot{G}}{G} = -\varepsilon \left[ \frac{\sin^2 \theta}{2A_1} (I_{11} + I_{22}) + \frac{I_{33}}{A_3} \cos^2 \theta \right]; \quad (2.8)$$

$$\dot{\theta} = \varepsilon \sin \theta \cos \theta \left( -\frac{I_{11} + I_{22}}{2A_1} + \frac{I_{33}}{A_3} \right).$$

Уравнения (2.8) свидетельствуют, что слабое сопротивление среды приводит к эволюции величин  $G$  и  $\theta$ , которые оставались постоянными в работе [5].

Интегрируя последнее уравнение (2.8), получаем

$$\text{tg } \theta = \text{tg } \theta_0 \exp \left[ \varepsilon \left( -\frac{I_{11} + I_{22}}{2A_1} + \frac{I_{33}}{A_3} \right) t \right]. \quad (2.9)$$

Как видно, при  $\frac{I_{33}}{A_3} > \frac{I_{11} + I_{22}}{2A_1}$  угол  $\theta$  увеличивается и стремится к  $\frac{\pi}{2}$ .

В случае  $\frac{I_{11} + I_{22}}{2A_1} > \frac{I_{33}}{A_3}$  угол  $\theta$  убывает и стремится к нулю.

Из третьего уравнения (2.8) при условии (2.9) имеем

$$G^2 = G_0^2 \left[ \exp\left(-2\varepsilon \frac{I_{33}}{A_3} t\right) + \text{tg}^2 \theta_0 \exp\left(-\varepsilon \frac{I_{11} + I_{22}}{A_1} t\right) \right]. \quad (2.10)$$



При этом, согласно (2.8), в случае  $\frac{I_{33}}{A_3} > \frac{I_{11} + I_{22}}{A_1}$ ;  $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$  угловая скорость  $\dot{\lambda}$  прецессирования вектора кинетического момента убывает и при  $t \rightarrow \infty$ ,  $\dot{\lambda} \rightarrow 0$ . С другой стороны, при  $\frac{I_{11} + I_{22}}{2A_1} > \frac{I_{33}}{A_3}$ ;  $\theta \rightarrow 0$  угловая скорость вращения вектора  $\bar{G}$  вокруг вертикальной оси возрастает.

При отсутствии сопротивления среды ( $\varepsilon=0$ ) выражения (2.2), (2.8) совпадают с соответствующими системами, приведенными в работе [5].

Выражаю глубокую благодарность Ф. Л. Черноусько за постановку задачи и ценные советы, А. А. Каспарьянцу — за постоянное внимание к работе и полезные обсуждения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Белецкий В. В., Движение искусственного спутника относительно центра масс, М., Изд-во «Наука», 1965.
2. Булгаков Б. В., Прикладная теория гироскопов, М., Гостехиздат, 1955.
3. Волосов В. М., Моргунов Б. И., Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем, М., Изд-во МГУ, 1971.
4. Градштейн И. С., Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М., Изд-во «Наука», 1971.
5. Климов Д. М., Космодемьянская Г. Н., Черноусько Ф. Л., О движении гироскопа с неконтактным подвесом, Изв. АН СССР, Механика твердого тела, № 2, 1972.
6. Кошляков В. Н., О некоторых частных случаях интегрирования динамических уравнений Эйлера, связанных с движением гироскопа в сопротивляющейся среде, Прикл. мат. и мех., т. XVII, в. 2, 1953.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теоретическая физика, т. I, М., Изд-во «Наука», 1965.
8. Митропольский Ю. А., Метод усреднения в нелинейной механике, Киев, Изд-во «Наукова думка», 1971.
9. Черноусько Ф. Л., О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов, Прикл. мат. и мех., т. XXVII, в. 3, 1963.
10. Черноусько Ф. Л., Движение твердого тела с полостями, заполненными вязкой жидкостью, при малых числах Рейнольдса, Журнал вычислительной математики и мат. физики, т. 5, № 6, 1965.

Поступила  
14.XII 1973 г.

Одесский  
государственный университет