Министерство образования Украины

Одесский государственный политехнический университет

Труды

ОДЕССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Научный и производственно-практический

сборник

Вып.2 (6). 1998

Автоматика и системотехника

Радиоэлектроника

Математика, физика, механика

Экология

Экономика

Одесса

УДК 531.383

А.Е. Зернов, канд. физ.-мат. наук, доц.,
Д.Д. Лещенко, д-р физ.-мат. наук, проф.,
Т.А. Кушпиль, инженер

ЭВОЛЮЦИЯ ВРАЩЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА, БЛИЗКИХ К РЕГУЛЯРНОЙ ПРЕЦЕССИИ

О.Є. Зернов, Д.Д. Лещенко, Т.О. Кушпіль. **Еволюція обертань твердого тіла, близьких до регулярної прецесії.** Досліджуються збурені обертальні рухи твердого тіла, близькі до випадку Лагранжа, коли відновлюючий момент залежить від кута нутації.

A.E. Zernov, D.D. Leshchenko and T.A. Kushpil. **The evolution of a rigid body rotations similar to regular precession**. Perturbed rotational motions of a rigid body, similar to regular precession in the restoring torque depends on the angle of nutation, are investigated.

Рассмотрим движение динамически симметричного твердого тела вокруг неподвижной точки O под действием восстанавливающего момента, зависящего от угла нутации θ, и возмущающего момента.

Уравнения движения имеют вид [1]

$$\begin{aligned}
&A\mathring{p} + (C-A)qr = k(\theta)\sin\theta\cos\varphi + M_1;\\
&A\mathring{q} + (A-C)pr = -k(\theta)\sin\theta\cos\varphi + M_2;\\
&C\mathring{r} = M_3, \quad \mathring{\psi} = (p\sin\varphi + q\cos\varphi)/\sin\theta;\\
&\mathring{\theta} = p\cos\varphi - q\sin\varphi;\\
&\mathring{\varphi} = r - (p\sin\varphi + q\cos\varphi)ctg\theta,
\end{aligned} \tag{1}$$

где p, q, r — проекции вектора угловой скорости на главные оси инерции, M_i(i=1,2,3) — проекции вектора возмущающего момента на те же оси, A — экваториальный, а C — осевой моменты инерции тела относительно точки O, $A \neq C$.

Предположим, что

$$p^2 + q^2 << r^2, \quad Cr^2 >> k, \quad |M_i| << k \quad (i = 1,\ 2,\ 3), \tag{2}$$

т.е. направление угловой скорости тела близко к оси динамической симметрии; угловая скорость достаточно велика; возмущающие моменты малы по сравнению с восстанавливающим. Неравенства (2) позволяют ввести малый параметр $\varepsilon<<1$ и положить

$$p = \varepsilon P, \quad q = \varepsilon Q, \quad k(\theta) = \varepsilon K(\theta), \quad M_i = \varepsilon^2 M_i^* \quad (i = 1,\ 2,\ 3). \tag{3}$$

Возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа, исследовались ранее [2—4].

Рассмотрим движение несимметричного твердого тела вокруг точки O под действием: восстанавливающего момента вида [2] $k(\theta) = A(\mu + 2\eta\cos\theta)$, где μ, η — постоянные коэффициенты, на знаки которых никаких ограничений не накладывается; силы $\overline{F}$ — дебаланса тяги [3], которая имеет следующие проекции на подвижные оси, жестко связанные с твердым телом, $(0,\ \varepsilon^2 F^*,\ 0)$, и прилагается в точке N с координатами $(d,\ o,\ h)$; диссипативной силы с моментом $\overline{M}(-\varepsilon I_1 p,\ -\varepsilon I_1 q,\ -\varepsilon^2 I_3 r)$ относительно точки O. I_1, I_3 — положительные коэффициенты, характеризующие диссипацию.

Ставится задача исследования асимптотического поведения системы (1) при малом ε, если выполнены условия (2). Будем пользоваться методом усреднения [5] на интервале времени порядка ε^{-1}.

Проекции вектора возмущающего момента M_i на главные оси инерции и величина восстанавливающего момента k(θ) с учетом (3) имеют вид

$$M_1 = -\varepsilon^2 F^* - \varepsilon^2 I_1 P, \quad M_2 = -\varepsilon^2 I_1 Q;$$
$$M_3 = \varepsilon^2 F^* d - \varepsilon^2 I_3 r, \quad k(\theta) = \varepsilon A(\mu^* + 2\eta^* \cos\theta). \qquad (4)$$

После ряда преобразований решение усредненной системы уравнений первого приближения для медленных переменных и второго для быстрых переменных имеет вид

$$a^{(1)} = \exp(-\varepsilon A^{-1} I_1 t)(a^\circ \cos wt - b^\circ \sin wt);$$
$$b^{(1)} = \exp(-\varepsilon A^{-1} I_1 t)(b^\circ \cos wt + a^\circ \sin wt);$$
$$\delta^{(1)} = \varepsilon C^{-1}(F^* d - I_3 r_0)t;$$
$$\psi^{(1)} = \varepsilon A D_{11}(\mu^* + 2\eta^* \cos\theta_0)t + \psi_0, \quad \theta^{(1)} = \theta_0;$$
$$\alpha^{(2)} = C A^{-1} r_0 t - \varepsilon A D_{11} \cos\theta_0 (\mu^* + 2\eta^* \cos\theta_0)t + \frac{1}{2}\varepsilon^2 A^{-1}(F^* d - I_3 r_0)t^2 + \varphi_0; \qquad (5)$$
$$\gamma^{(2)} = n_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon^2 (C - A) A^{-1} C^{-1}(F^* d - I_3 r_0)t^2.$$

Здесь $w = \varepsilon A D_{11}\left[\mu^* \cos\theta_0 + \eta^*(3\cos^2\theta_0 - 1)\right]$; $D_{ij} = C^{-i} r_0^{-j}$; a^0, b^0, n_0 определяются следующим образом: $a = P_0 - \lambda_0 \sin\varphi_0$, $b = -Q_0 + \lambda_0 \cos\varphi_0$, $\lambda_0 = AC^{-1} r_0^{-1}(\mu^* + 2\eta^* \cos\theta_0)\sin\theta_0$, $n_0 = (C - A)A^{-1} r_0$, $|n_0 / r_0| \le 1$, $r_0 \ne 0$; $\gamma = n_0 t$, переменная $\gamma = \gamma_0$ имеет смысл фазы колебаний, $\alpha = \gamma + \varphi$, $r = r_0 + \varepsilon\delta$; P_0, Q_0, r_0, θ_0, φ_0 — начальные значения соответствующих переменных при t=0.

На основании приведенных формул можно определить эволюцию углов прецессии и нутации во втором приближении:

$$\psi_\varepsilon^v(t) = \psi_0 + \varepsilon A D_{11}(\mu^* + 2\eta^* \cos\theta_0)t + S^{(1)};$$
$$S^{(1)} = \varepsilon^2 A^2 D_{33} \cos\theta_0 (\mu^* + 2\eta^* \cos\theta_0)t + \frac{1}{2}\varepsilon^3 A D_{22}(\mu^* + 2\eta^* \cos\theta_0) \times$$
$$\times (I_3 r_0 - F^* d)t^2 - \varepsilon A D_{11} \operatorname{cosec}\theta_0 \exp(-\varepsilon A^{-1} I_1 t)\left((a^0)^2 + (b^0)^2\right)^{1/2} \times$$
$$\sin(\alpha + \sigma);$$
$$\theta_\varepsilon^v(t) = \theta_0 + \varepsilon^2 I_1 D_{22} \sin\theta_0 A(\mu^* + 2\eta^* \cos\theta_0)t + \varepsilon A D_{11} \exp(-\varepsilon A^{-1} I_1 t) \times \qquad (6)$$
$$\times \left((a^0)^2 + (b^0)^2\right)^{1/2} \sin(\alpha^{(2)} - x);$$
$$\sin x = \cos\sigma = b^{(1)} \exp(\varepsilon A^{-1} I_1 t) / \left((a^0)^2 + (b^0)^2\right)^{1/2}.$$

Таким образом, в выражении (6) для θ_ε^v слагаемое порядка ε является произведением медленно экспонциально убывающего сомножителя $\exp(-\varepsilon A^{-1} I_1 t)$, обусловленного диссипацией энергии, и осциллирующего сомножителя $\sin(\alpha^{(2)} - x)$. Величину декремента затухания и характер медленного изменения фазы малых колебаний видим из формул (5) для $b^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$.

В выражении (6) для $\psi_\varepsilon^v(t)$ слагаемое $S^{(1)}$ (порядка $O(\varepsilon)$ на интервале времени $(0,\ T\varepsilon^{-1})$) уточняет для данной задачи формулу угловой скорости прецессии $\omega_p = KC^{-1} r_0^{-1}$, имеющую место в приближенной теории гироскопов.

В заключение укажем, что формулы для углов нутации и прецессии не содержат параметров возмущающих моментов, если ограничиться построением первого приближения. В этом случае влияние возмущений на регулярную прецессию тела не учитывается и таким образом, построение второго приближения является существенным.

Литература

1. Лещенко Д.Д., Саллам С.Н. Возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии // Прикл. матем. и механика. — 1990. — Т. 54, № 2. — С. 224 — 232.

2. Асланов В.С., Серов В.М. Вращательные движения осесимметричного твердого тела с бигармонической характеристикой восстанавливающего момента // Изв. РАН. Механика твердого тела. — 1995. — № 3. — С. 19 — 25.
3. Савченко А.Я., Безрученко В.С. Исследование стационарных движений гироскопа Лагранжа при наличии диссипации и дебаланса тяги // Механика твердого тела. — 1993. — Вып. 25. — С. 75 — 80.
4. Лещенко Д.Д., Шамаев А.С. Возмущенные вращательные движения твердого тела в случае Лагранжа // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1997. — № 6. — С. 8 — 17.
5. Волосов В.М., Моргунов Б.И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. — М.: Изд-во МГУ, 1971.