

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/288828179>

Optimal Stabilization of a Dynamically Symmetric Gyrostat with Internal Degrees of Freedom in a resistant Medium

Conference Paper · January 2012

CITATIONS

0

READS

3

3 authors, including:



Dmytro Leshchenko

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

221 PUBLICATIONS 235 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)



Leonid D Akulenko

Russian Academy of Sciences

545 PUBLICATIONS 1,178 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)

Some of the authors of this publication are also working on these related projects:



Homogenization in optimal control problems [View project](#)



Control Problems for Distributed Parameters Systems [View project](#)

Министерство образования и науки Российской Федерации
Российская академия наук
Министерство образования и науки Республики Татарстан
Академия наук Республики Татарстан
Российский национальный комитет по теоретической и прикладной механике
Российский национальный комитет по автоматическому управлению
Научный совет по теории управляемых процессов и автоматизации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
КАЗАНСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. А.Н. ТУПОЛЕВА-КАИ»

*110-летию со дня рождения Н.Г. Четаева
и памяти академиков РАН
Н.Н. Красовского и В.М. Матросова посвящается*

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА, УСТОЙЧИВОСТЬ И УПРАВЛЕНИЕ

ТРУДЫ X МЕЖДУНАРОДНОЙ
ЧЕТАЕВСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

ТОМ 3

Секция 3. УПРАВЛЕНИЕ

Часть I

12 – 16 июня 2012 г.



Казань 2012

ОПТИМАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ВРАЩЕНИЙ СИММЕТРИЧНОГО ГИРОСТАТА С ВНУТРЕННИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ В СРЕДЕ С СОПРОТИВЛЕНИЕМ

Акуленко Л.Д.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва)

Зинкевич Я.С., Лещенко Д.Д.

(ОГАСА, Украина, г.Одесса)

Рачинская А.Л.

(ОНУ им. И.И. Мечникова, Украина, г. Одесса)

E-mail: yaninaz@mail.ru, leshchenko_d@ukr.net

Выводение. Исследуется задача об оптимальном по быстродействию торможении вращений динамически симметричного твердого тела со сферической полостью, заполненной жидкостью большой вязкости. Кроме того, тело обладает подвижной массой, прикрепленную демпфером к точке на оси симметрии посредством упругой связи с квадратичной диссипацией. На твердое тело действует малый тормозящий момент сил линейного сопротивления среды. Управление вращением производится с помощью момента сил, ограниченного по модулю. Рассматриваемая модель обобщает исследованные ранее в работах [1-3, 5-7].

Постановка задачи. На основе подхода [1, 3, 7] уравнения управляемого вращения в проекциях на оси связанной с фиксированным твердым телом системы координат (уравнения Эйлера) могут быть представлены [3, 4, 7]

$$\begin{aligned} A_1 \dot{p} + (A_3 - A_1)qr &= L_p + FG^2qr + Spr^6\omega_\perp + Qpr^2 - \lambda A_1 p, \\ A_1 \dot{q} + (A_1 - A_3)pr &= L_q - FG^2pr + Sqr^6\omega_\perp + Qqr^2 - \lambda A_1 q, \\ A_3 \dot{r} &= L_r - A_1 A_3^{-1} S r^5 \omega_\perp^3 + H \omega_\perp^2 r - \lambda A_3 r, \quad \omega_\perp^2 = p^2 + q^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь p, q, r – проекции вектора абсолютной угловой скорости ω на главные оси; $J = \text{diag}(A_1, A_1, A_3)$ – тензор инерции невозмущенного

тела: $L_{\text{упр}} -$ проекции вектора управляющего момента сил L^u ; $G = J\omega -$ кинетический момент тела. Считается, что момент сил диссипации пропорционален кинетическому моменту $L^d = -\lambda J\omega$, где λ - некоторый постоянный коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств среды. Предполагается, что допустимые значения момента управляющих сил L^u ограничены сферой [7]

$$L^u = bu, |u| \leq 1; b = b(t, G), 0 < b_* \leq b \leq b^* < \infty, \quad (2)$$

где b - скалярная функция, ограниченная в рассматриваемой области изменения аргументов t, G согласно условиям (2).

Введенные в (1) обозначения S, F, Q, H выражаются через параметры системы следующим образом

$$S = m\rho^3 \Lambda \Omega^{-3} d \left(A_1^{-4} A_3^4, F = m\rho^2 \Omega^{-2} A_1^{-3} A_3, d = 1 - A_3 A_1^{-1}, \right. \\ \left. Q = \beta P \nu^{-1} A_1^{-2} A_3 (A_1 - A_3), H = \beta P \nu^{-1} A_1^{-1} (A_3 - A_1) \right), \quad (3)$$

где m - масса подвижной точки, ρ - расстояние от центра масс недеформированной системы до точки крепления. Постоянные $\Omega^2 = c/m, \Lambda = \mu/m$ определяют частоту колебаний и скорость их затухания соответственно: c - жесткость (коэффициент упругости); μ - коэффициент квадратичного трения. Рассматривается случай сильного демпфера, следуя работе [3] $\Omega \gg \omega$.

Коэффициенты Q, H характеризуют момент сил, обусловленный движением сильно вязкой жидкости, β - объемная плотность, ν - кинематический коэффициент вязкости, P - коэффициент, определяемый формой полости; для сферической полости радиуса a он равен $P = (8\pi a^7)/525$ [1].

Ставится задача оптимального по быстродействию торможения вращений

$$\omega(t_0) = \omega^0, \omega(T) = 0, T \rightarrow \min_u, |u| \leq 1. \quad (4)$$

Требуется найти оптимальный закон управления в виде синтеза $u = u(t, \omega)$, соответствующую ему траекторию $\omega(t, t_0, \omega^0)$ и время быстрогодействия $T = T(t_0, \omega^0)$, а также функцию Беллмана задачи $V = T(t, \omega)$.

Динамическая задача оптимального торможения. На основе динамического уравнения и неравенства Шварца синтез оптимального по быстродействию управления имеет вид [7]

$$M_p = -b \frac{A_1 p}{G}, \quad M_q = -b \frac{A_1 q}{G}, \quad M_r = -b \frac{A_3 r}{G}, \quad b = b(t, G). \quad (5)$$

Подставим первое уравнение (1) на $A_1 p$, второе – на $A_1 q$, третье – на $A_3 r$ и получим. Получим скалярное уравнение вида

$$\dot{G} = -b(t, G) - \lambda G, \quad G(t_0) = G^0, \quad G(T, t_0, G^0) = 0, \quad T = T(t_0, G^0), \quad (6)$$

$$V(t, G) = T(t, G).$$

Для $b = \text{const}$ решение уравнения и краевой задачи (6) записывается в следующем виде

$$G(t) = \frac{1}{\lambda} \left[(G^0 \lambda + b) \exp(-\lambda t) - b \right], \quad T = \frac{1}{\lambda} \ln \left(G^0 \frac{\lambda}{b} + 1 \right), \quad t_0 = 0. \quad (7)$$

Здесь t – текущее время процесса торможения; T – время быстродействия.

Уравнение осевого вращения. Подстановка известного выражения для G в уравнение (1) приводит к элементарному нелинейному уравнению

$$\dot{\theta} = - \left[\lambda G^{-1} + \lambda - A_1^{-2} A_3^{-1} H (G^2 - A_3^2 r^2) + A_1^{-2} A_3^{-2} S r^4 (G^2 - A_3^2 r^2)^{3/2} \right]. \quad (8)$$

Проекция кинетического момента \mathbf{G} при проектировании на главные оси инерции тела приводит к выражению $A_3 r = G \cos \theta$, где θ – угол. Уравнение (8) после перехода к неизвестной θ может быть записано в виде

$$\dot{\theta} = -A_1^{-2} A_3^{-1} H \lambda^{-2} \left[(G^0 \lambda + b) \exp(-\lambda t) - b \right]^2 \sin \theta \cos \theta +$$

$$+ A_1^{-2} A_3^{-2} S \lambda^{-7} \left[(G^0 \lambda + b) \exp(-\lambda t) - b \right]^7 \cos^5 \theta \sin^2 \theta, \quad \theta(0) = \theta^0.$$

При нарушении общности можно принять, что θ^0 (и θ) принадлежит промежутку $(0 \leq \theta^0, \theta \leq \pi/2)$. Если θ^0 принимает значения из указанного

промежутка, то сферический угол в процессе эволюции вращений также не выйдет за его пределы, поскольку $\theta^* = 0, \pi/2$ — стационарные точки уравнения (9) независимо от изменения G .

Исследуем поведение сферического угла в малой полукрестности стационарных точек: $\theta = \delta\theta > 0$ и $\theta = \pi/2 + \delta\theta$, $\delta\theta < 0$. В первом случае ($\theta^* = 0$) получим

$$|\delta\theta| = |\delta\theta^0| \exp(K(t)), \quad (10)$$

$$K(t) = -A_1^{-2} A_3^{-1} H \lambda^{-2} \left[\frac{1}{2} \lambda^{-1} (G^0 \lambda + b)^2 (1 - \exp(-2\lambda t)) - 2b \lambda^{-1} (G^0 \lambda + b) (1 - \exp(-\lambda t)) + b^2 t \right].$$

Из (10) следует, что с ростом t при $A_3 > A_1$ (сплюснутое тело) вариация $\delta\theta$ монотонно убывает ($-H < 0$), а при $A_3 < A_1$ (вытянутое тело) — монотонно возрастает ($-H > 0$).

Рассмотрим второй случай $\theta = \pi/2 + \delta\theta$, $\delta\theta < 0$ ($\theta^* = \pi/2$). Имеем

$$|\delta\theta| = |\delta\theta^0| \exp(-K(t)). \quad (11)$$

Из (11) следует, что при $A_1 > A_3$ величина $\delta\theta$ монотонно возрастает, а при $A_1 < A_3$ — монотонно убывает.

При $A_1 \approx A_3$, а также θ^0 в окрестности стационарных точек могут быть применены методы возмущений. Например, после первой итерации имеем выражение для θ

$$\theta(t) = \theta^0 + S(t). \quad (12)$$

$$S(t) = A_1^{-2} A_3^{-1} \lambda^{-3} \sin \theta^0 \cos \theta^0 \left[-B(\theta^0) \left[\frac{f(7\lambda t)}{7} - \frac{7f(6\lambda t)}{6} + \frac{21f(5\lambda t)}{5} - \frac{35f(4\lambda t)}{4} + \frac{35f(3\lambda t)}{3} - \frac{21f(2\lambda t)}{2} + 7f(\lambda t) + b^7 \lambda t \right] + H \left[\frac{f(2\lambda t)}{2b^5} - \frac{2f(\lambda t)}{b^5} - b^2 \lambda t \right] \right],$$

где $B(\theta^0) = A_3^{-5} S \lambda^{-3} \sin \theta^0 \cos^4 \theta^0$, $f(\beta \lambda t) = b^{7-\beta} (b + \lambda G^0)^\beta (\exp(-\beta \lambda t) - 1)$, $\beta = 1, 2, \dots, 7$.

Численный анализ и выводы. Запишем уравнение для угла θ в следующем виде

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\tilde{H}\tilde{\lambda}^{-2}f^2(\tau)\sin\theta\cos\theta + \tilde{S}\tilde{\lambda}^{-7}f^7(\tau)\cos^5\theta\sin^2\theta, \quad (13)$$

$$\tilde{H} = A_1^{-2}HA_3^{-1}T^3b^2, \quad \tilde{S} = A_1^{-2}A_3^{-6}ST^8b^7, \quad \tau = \frac{t}{T}, \quad \tilde{G}^0 = \frac{G^0}{bT}, \quad \tilde{\lambda} = \lambda T,$$

$$f(\tau) = (\tilde{G}^0\tilde{\lambda} + 1)\exp(-\tilde{\lambda}\tau) - 1. \quad (10)$$

Уравнение (13) было численно проинтегрировано для произвольных значений \tilde{G}^0 , $\tilde{\lambda}$, \tilde{H} , \tilde{S} и $\theta^0 = \pi/4$.

На рис. 1 исследуется характер поведения функции $\theta = \theta(\tau)$ для динамически вытянутого тела. Кривые 2, 3, 5 соответствуют значениям $\tilde{G}^0 = 0.1$, 1, 1.5, при этом все остальные безразмерные коэффициенты равны единице. Видно, что характер поведения функции сферического угла зависит от порядка величины \tilde{G}^0 . Если \tilde{G}^0 на порядок меньше единицы, то функция θ имеет немонотонный характер, при этом само изменение сферического угла весьма незначительно. При значениях порядка 1 и выше, функция $\theta = \theta(\tau)$ является монотонно убывающей при этом, чем больше значение \tilde{G}^0 , тем с большим градиентом происходит убывание. В этих расчетных случаях θ стремится к некоторому предельному значению.

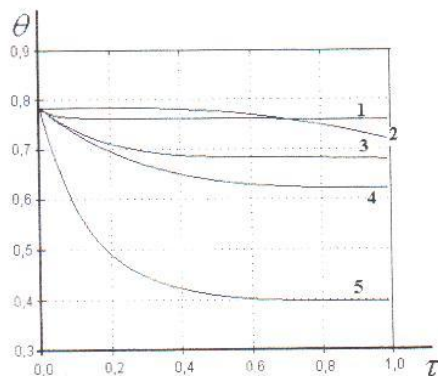


Рис. 1

Таким образом, аналитически и численно исследована задача синтеза оптимальной стабилизации вращений динамически симметричного гиростата

в сопротивляющейся среде. В рамках асимптотического подхода определены управление, время быстрогодействия (функция Беллмана) и сферический угол $\theta(\tau)$, установлены качественные свойства оптимального движения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черноусько Ф.Л. Движение твердого тела с полостями, заполненными вязкой жидкостью, при малых числах Рейнольдса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1965. Т. 5, №6. С. 1049–1070.
2. Черноусько Ф.Л. О движении твердого тела с подвижными внутренними массами // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. №4. С. 33–44.
3. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д. Некоторые задачи движения твердого тела с подвижной массой // Известия АН СССР. Механика твердого тела 1978. №5. С. 29–34.
4. Кошляков В.Н. Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов: Аналитические методы. М.: Наука. 1985. 288 с.
5. Лещенко Д.Д. Оптимальное по быстродействию торможение вращений твердого тела с внутренними степенями свободы // Изв. РАН. Т. и СУ. 1996. №1. С. 80–85.
6. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Рачинская А.Л. Оптимальное торможение вращений динамически симметричного тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью, в сопротивляющейся среде // Изв. РАН. Т и СУ. 2010. №2. С. 56–60.
7. Акуленко Л.Д. Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука. 1987. 368 с.

OPTIMAL ROTATION STABILIZATION OF A DYNAMICALLY SYMMETRIC GYROSTAT WITH INTERNAL DEGREES OF FREEDOM IN A RESISTANT MEDIUM

Akulenko L.D.

(A. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow)

Zinkevich Ya.S., Leshchenko D.D.

(OSACEA, Ukraine, Odessa)

Rachinskaya A.L.

(ONU named by I.I. Mechnikov, Ukraine, Odessa)

Keywords: optimal stabilization, rotation, resistant medium.

АЛГОРИТМ СИ
СИСТЕМЫ