# Dynamics



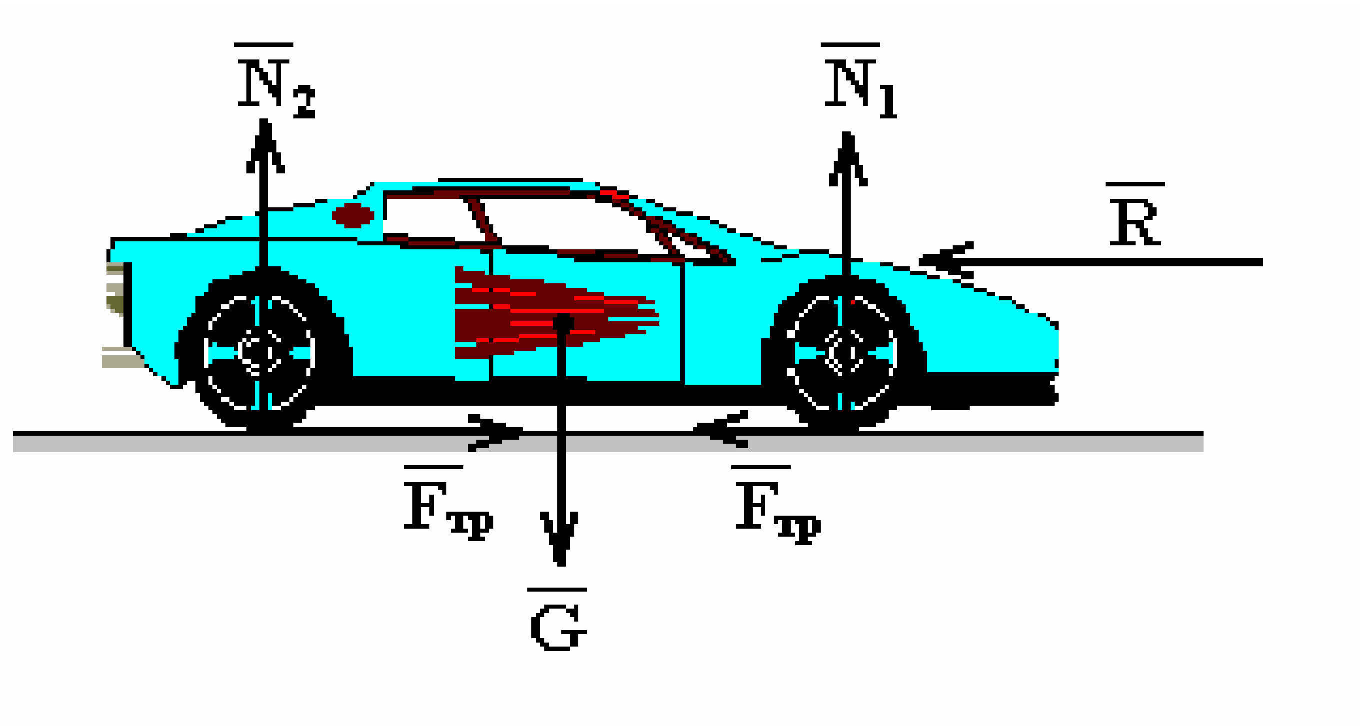
Dmytro Leshchenko
Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

**ОДЕСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ БУДІВНИЦТВА**
**ТА АРХІТЕКТУРИ**

***КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ***

# Д И Н А М І К А

***НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК***




***Одеса-2006***

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**

**ОДЕСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ БУДІВНИЦТВА ТА АРХІТЕКТУРИ**

***КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ***

# Д И Н А М І К А

***НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК***

**для студентів вищих**

**технічних навчальних закладів**

***Одеса-2006***

УДК 531.3(075)

**«УЗГОДЖЕНО»**

Вченою радою

Інженерно-будівельного інституту

Протокол № 5 від 2 березня 2006 р.

Навчальний посібник розглянутий і рекомендований до друку на засіданні кафедри теоретичної механіки,
протокол № 4 від 1 лютого 2006 р.

Укладачі: д-р техн. наук, проф. В.Х. Кирилов,
д-р фіз.-мат. наук, проф. Д.Д. Лещенко ,
к.фіз.-мат.наук, асист. Козаченко Т.О.

Рецензенти: д-р фіз.-мат. наук, проф. Л.Д. Акуленко,
член-корреспондент НАН України,
д-р фіз.-мат. наук, проф. О.М. Ковальов

Навчальний посібник написано згідно з програмою розділу «Динаміка» курсу теоретичної механіки для технічних вузів. Об'єм посібника невеликий, що полегшує знайомство з предметом. Матеріал ілюструється прикладами. Подані вказівки до розв’язку типових задач за основними розділами курсу з застосуванням багатофункціонального пакета Mathcad.

Відповідальний за випуск: зав. кафедрою теоретичної механіки,
д-р ф.-м. наук, проф. Д.Д. Лещенко.

ЗМІСТ

## *Динаміка*
## *Вступ. Аксіоми динаміки (закони Галілея-Ньютона)*

В динаміці механічні рухи розглядаються з самої загальної точки зору, з точки зору причинно - слідчих зв'язків механічних взаємодій, що висловлюють внутрішню єдність зовнішніх чинників - сил, впливаючих на рух, і кінематичних властивостей цих рухів.

Динаміка вивчає і встановлює закони зв'язку діючих сил з кінематичними характеристиками рухів. В основу динаміки покладена система законів (аксіом), вірогідність яких перевіряється в практичній діяльності людей, в розвитку техніки. Основні закони класичної механіки вперше достатньо чітко були сформульовані І. Ньютоном в його знаменитій праці «Математичні початки натуральної філософії» (1687р.)

### *Аксіоми динаміки*

Основні положення механіки Ньютона сформульовані стосовно до найпрос-тішого матеріального образу - матеріальної точки (тіло, розмірами якого можна нехтувати). На рух такої точки не накладені наперед задані кінематичні обмеження.

В основі класичної механіки лежать два допущення, які затверджують існування абсолютного простору і абсолютного часу.

1. Абсолютний простір по самій своїй суті, безвідносно до чого-небудь зовніш-нього, залишається однаковим і нерухомим.
2. Абсолютний істинний математичний час сам по собі і самою своєю суттю без всякого відношення до чого-небудь зовнішнього протікає рівномірно та інакше називається тривалістю.

Таким чином, припускається, що простір має чисто геометричні властивості, а простір і час не залежать від матерії та її руху.

Закони класичної механіки формулюються по відношенню до абсолютного простору і абсолютного часу.

***Перший закон (закон інерції)*. Існує система відліку, відносно якої ізольована матеріальна точка перебуває в стані спокою або рухається рівномірно і прямолінійно.**

$$\overline{V} = \overline{const} \qquad (\ \overline{F} = 0\ ) \qquad \textbf{(I)}$$

Під ізольованою матеріальною точкою розуміють вільну матеріальну точку , на яку не діють ніякі тіла. Властивість матеріальної точки зберігати свою швид-кість незмінною по величині і по напряму називається інерцією.

Таким чином, згідно з першим законом динаміки, причиною (джерелом) руху є саморух як засіб існування матерії.

***Другий закон (основний закон динаміки)*. Прискорення, яке здобула вільна матеріальна точка під дією сили пропорційне силі і напрямлене в сторону дії сили:**

$$m\overline{a} = \overline{F} \qquad \textbf{(II)}$$

тут коефіцієнт m, який не залежить від швидкості і сили, називається масою точки. Маса являє собою найпростіше поняття механіки і не може бути визначена з допомогою інших понять. Розглянемо основні визначальні властивості маси. По-перше, з рівняння ( I ) витікає, що для того, щоб надати точці дане прискорення, до неї потрібно прикласти тим більшу силу, чим більше її маса. Тому, чим більше маса точки, тим більше ця точка немов би чинить опір зміні її швидкості. Таким чином, маса - міра інертності матеріальної точки. Назвемо цю масу інертною масою:

$$m_{ін} = \frac{F}{a}$$

З іншого боку, сила притягання тіла Землею (тобто, вага) прямо пропорційна масі тіла. Цю масу назвемо гравітаційною масою

$$m_{гр} = \frac{P}{g}$$

Як показали ретельні експерименти (проф. Брагінський, МДУ,1971 р.), рівність між двома типами маси $(m_{ін} = m_{гр})$ справедлива з точністю до $10^{-12}$. Ці експерименти мають величезне значення для загальної теорії відносності, бо гіпотеза про точний збіг інертної і гравітаційної мас – одне з основних припущень (принцип еквівалентності) цієї теорії.

***<u>Третій закон</u> (закон рівності дії та протидії). Дві матеріальні точки діють одна на одну з силами, рівними по величині і напрямленими в протилежні сторони вздовж прямої, що з'єднує ці точки***

$$\overline{F}_{12} = -\overline{F}_{21} \qquad \textbf{( III )}$$

***<u>Четвертий закон</u> (закон незалежності дії сил). Матеріальна точки під дією декількох сил набуває прискорення, яке дорівнює геометричній сумі прискорень, наданих кожною силою зокрема***

$$\overline{a} = \overline{a}_1 + \overline{a}_2 + ... + \overline{a}_n, \qquad \textbf{( IV )}$$

де

$$\overline{a}_1 = \frac{\overline{F}_1}{m}, \overline{a}_2 = \frac{\overline{F}_2}{m}, ..., \overline{a}_n = \frac{\overline{F}_n}{m}.$$

*<u>Висновок.</u>* Основний закон динаміки не зміниться по формі в випадку дії декількох сил, якщо під силою розуміти рівнодійну прикладених сил.

Справді, помножимо рівність ( IV ) на масу точки

$$m\overline{a} = m\overline{a}_1 + m\overline{a}_2 + ... + m\overline{a}_n,$$

тоді

$$m\overline{a} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + ... + \overline{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i = \overline{\mathbf{\Phi}},$$

де $\overline{\mathbf{\Phi}}$ - рівнодійна всіх сил, діючих на матеріальну точку.

Співвідношення $m\overline{a} = \overline{\Phi}$ називається **основним законом динаміки точки**, яка знаходиться під дією системи сил.

Системи відліку, в яких мають місце основні закони класичної механіки, називаються **інерціальними**. Найважливішою особливістю інерціальних систем відліку є те, що по відношенню до них простір і час володіють певними властивостями симетрії. А саме: досвід переконує, що в цих системах відліку час та простір однорідні і крім того простір також має властивості ізотропності, він повністю визначається системою аксіом і теорем геометрії Евкліда.

Як показують спостереження і досвід, в більшості задач динаміки, стосовних до технічної практики, за інерціальну систему відліку можна прийняти систему осей, зв'язаних з Землею, нехтуючи обертанням її навколо своєї осі.

Можна показати, що будь-яка інша система відліку, яка рухається рівномірно і прямолінійно відносно даної системи, є також інерціальною. Для інерціальної системи відліку має місце **принцип відносності**, згідно якому всі інерціальні системи за своїми механічними властивостями еквівалентні одна одній. Це означає, що жодними механічними спробами, які проводяться «всередині» даної інерціальної системи, не можна встановити, знаходиться в спокої ця система або рухається. В усіх інерціальних системах відліку властивості простору і часу однакові, однакові також і всі закони механіки.

# Глава 1. Динаміка матеріальної точки

## §1. Диференціальні рівняння руху матеріальної точки

Розглянемо рух матеріальної точки маси m під дією доданих до неї сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n$. Основне рівняння динаміки має вигляд

$$m\overline{a} = \overline{\Phi}, \qquad \overline{\Phi} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + ... + \overline{F}_n \tag{1.1}$$

<u>Диференціальні рівняння руху точки в декартових координатах</u>.

Спроектуємо обидві частини рівняння ( 1.1 ) на декартові осі координат, одержимо

$$ma_x = \Phi_x, \quad ma_y = \Phi_y, \quad ma_z = \Phi_z,$$

де

$$\Phi_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}, \qquad \Phi_y = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}, \qquad \Phi_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz}.$$

З кінематики відомо, що

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}, \qquad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}, \qquad a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}$$

Тоді диференціальні рівняння руху матеріальної точки в прямокутній декартовій системі координат мають вигляд

$$m\ddot{x} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}, \qquad m\ddot{y} = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}, \qquad m\ddot{z} = \sum_{i=1}^{n} F_{iz}. \qquad (1.2)$$

<u>Диференціальні рівняння руху точки в природній формі</u>

Спроектуємо обидві частини векторної рівності ( 1.1 ) на природні координатні осі - дотичну, головну нормаль і бінормаль

$$ma_\tau = \sum_{i=1}^{n} F_{i\tau}, \qquad ma_n = \sum_{i=1}^{n} F_{in}, \qquad ma_b = \sum_{i=1}^{n} F_{ib}.$$

З кінематики відомо, що

$$a_\tau = \dot{V}_\tau = \ddot{S}, \qquad a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{\dot{S}^2}{\rho}, \qquad a_b = 0.$$

Тоді рівняння руху матеріальної точки у природній прямокутній системі координат мають вигляд

$$m\ddot{S} = \sum_{i=1}^{n} F_{i\tau}, \qquad m\frac{V^2}{\rho} = \sum_{i=1}^{n} F_{in}, \qquad 0 = \sum_{i=1}^{n} F_{ib} \qquad (1.3)$$

## §2. Основні задачі динаміки точки

Динаміка матеріальної точки вирішує дві основні задачі.

*<u>Перша</u>* - визначити рівнодійну сил, викликаючих заданий рух матеріальної точки з відомою масою. Оскільки дана задача зводиться до визначення прискорення по заданим кінематичним рівнянням руху, першу основну задачу динаміки точки (пряму задачу) можна вважати достатньо елементарною, хоча, вирішуючи саме цю задачу Ньютон встановив закон всесвітнього тяжіння.

*<u>Друга</u>* - задаються сили, додані до точки, положення точки в певний момент часу $t_0$ і її швидкістю $V_0$ в той же момент часу. Визначити закон руху точки у просторі.

Момент часу $t_0$ називається початковим моментом, а положення точки і її швидкість $V_0$ в той же момент часу - відповідно початковим положенням і початковою швидкістю. Ця задача значно складніша першої. Якщо перша задача в основному вирішується шляхом диференціювання, розв‘язання другої задачі зводиться до інтегрування системи диференціальних рівнянь руху матеріальної точки.

### <u>Визначення сил по заданому руху</u>
### (пряма задача динаміки матеріальної точки)

1). Якщо задані рівняння руху матеріальної точки маси **m** в декартових координатах

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

то проекції $\Phi_x$, $\Phi_y$ і $\Phi_z$, рівнодійної сил, які спричиняють цей рух, визначаються формулами ( 1.2 ):

$$\Phi_x = m\ddot{x}, \qquad \Phi_y = m\ddot{y}, \qquad \Phi_z = m\ddot{z}.$$

Звідки

$$\Phi = \sqrt{\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2}$$

$$\cos(x,\wedge\ \bar{\Phi}) = \frac{\Phi_x}{\Phi}, \qquad \cos(y,\wedge\ \bar{\Phi}) = \frac{\Phi_y}{\Phi}, \qquad \cos(z,\wedge\ \bar{\Phi}) = \frac{\Phi_z}{\Phi}.$$

Останні формули визначають величину, а також напрям равнодійної сили.

2). Якщо задано рівняння руху матеріальної точки маси **m** вздовж траєкторії S=S (t), тоді проекції $\Phi_\tau$, $\Phi_n$, $\Phi_b$ рівнодійної сил, які спричиняють цей рух, визначаються формулами ( 1.3 ):

$$\Phi_\tau = m\ddot{S}, \qquad \Phi_n = m\frac{V^2}{\rho}, \qquad \Phi_b = 0.$$

Звідки величина і напрям рівнодійної сил

$$\Phi = \sqrt{\Phi_\tau^2 + \Phi_n^2}, \quad \cos(\bar{\tau}^o,\wedge\ \bar{\Phi}) = \frac{\Phi_\tau}{\Phi}, \quad \cos(\bar{n}^o,\wedge\ \bar{\Phi}) = \frac{\Phi_n}{\Phi}.$$

3). Якщо задано рівняння плоского руху матеріальної точки маси **m** в полярних координатах r = r( t ), φ = φ( t ), то проекції $\mathbf{\Phi}_r$ і $\mathbf{\Phi}_\varphi$ рівнодійної визначають формулами

$$\mathbf{\Phi}_r = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2), \qquad \mathbf{\Phi}_\varphi = m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi});$$

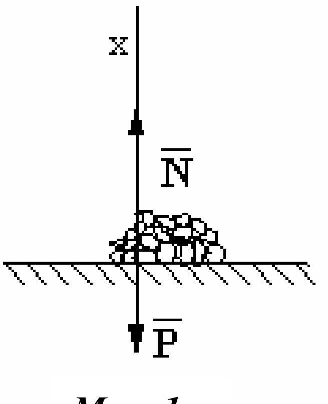
і $$\mathbf{\Phi} = \sqrt{\mathbf{\Phi}_r^2 + \mathbf{\Phi}_\varphi^2}, \qquad \cos(r,\wedge\ \bar{\mathbf{\Phi}}) = \frac{\mathbf{\Phi}_r}{\mathbf{\Phi}}, \quad \cos(\varphi,\wedge\ \bar{\mathbf{\Phi}}) = \frac{\mathbf{\Phi}_\varphi}{\mathbf{\Phi}}.$$

*Першу задачу динаміки рекомендується розв‘язувати в наступному порядку:*

- *зобразити на малюнку матеріальну точку в довільному положенні;*
- *вказати діючі на точку активні сили і реакції в'язей;*
- *вибрати систему відліку, якщо вона не вказана в умові задачі;*
- *визначити по заданому закону руху проекції прискорення на вибрані осі координат;*
- *скласти диференціальні рівняння руху матеріальної точки, відповідні прийнятій системі відліку;*
- *з складених рівнянь визначити ці величини.*

*Приклад 1.* Решето рудозбагачувального грохота здійснює вертикальні гармонічні коливання з амплітудою А=5 см. Знайти найменшу частоту коливань решета, при якій шматки руди, які лежали на ньому, будуть відділятися від нього і підкидатися вгору.

Розв‘язання.




***Мал. 1***

1) Розглянемо рух шматка руди.
2) На цей шматок діють сили ваги $\overline{P}$ і реакція решета $\overline{N}$.
3) Рух віднесемо до вертикальної осі X.
4) Складемо диференціальне рівняння руху

$$m\ddot{x} = -P + N$$

Згідно з умовою задачі рівняння руху решета

$$x = A\sin(kt+\beta),$$

звідки $\ddot{x} = -Ak^2\sin(kt+\beta)$ ,

Тоді $-\frac{P}{g}Ak^2\sin(kt+\beta) = -P + N$.

З цього рівняння визначимо $k = \sqrt{\frac{g(P-N)}{PA\sin(kt+\beta)}}$.

В момент відділення руди N = 0. Найменше значення **k** буде при $\sin(kt+\beta)=1$, тоді

$$k_{\min} = \sqrt{\frac{g}{A}} = \sqrt{\frac{980}{5}} = 14 \ \ c^{-1} .$$

*Приклад 2.* Нехай точка маси m рухається згідно з законом, який визначається рівняннями

$$x = a\cos(kt),\ y = b\sin(kt),\ z = 0$$

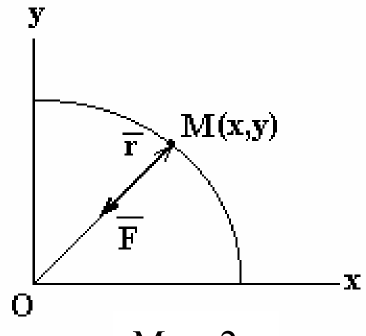
Визначити силу $\overline{F}$, яка викликає цей рух, якщо сила залежить тільки від положення точки.

Розв‘язання.

1) Зобразимо положення точки в довільний момент часу.

Траєкторія руху – еліпс з півосями **a, b**.

2) На точку діє сила $\overline{F}$.




Мал. 2

3) Проекції сили $\overline{F}$ визначаються формулами

$$F_x = m\ddot{x}, \quad F_y = m\ddot{y}, \quad F_z = 0 .$$

В даному випадку

$$\ddot{x} = -ak^2\ \cos(kt), \quad \ddot{y} = -bk^2\ \sin(kt).$$

Отже,

$$F_x = -mak^2\cos(kt), \quad F_y = -mbk^2\sin(kt)$$

Скориставшись рівняннями руху точки, одержимо

$$F_x = -mk^2 x, \quad F_y = -mk^2 y \qquad F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = mk^2\sqrt{x^2 + y^2} = mk^2 r,$$

тут $\bar{r}$ - модуль радіуса-вектора матеріальної точки $\bar{r} = \overline{Om}$.

Напрям сили $F$ визначається з допомогою напрямних косинусів

$$\cos(x,\wedge \bar{F}) = \frac{F_x}{F} = -\frac{x}{r}, \qquad \cos(y,\wedge \bar{F}) = \frac{F_y}{F} = -\frac{y}{r}.$$

З іншого боку напрямні косинуси радіуса-вектора $\bar{r}$:

$$\cos(x,\wedge \bar{r}) = \frac{x}{r} \quad \text{і} \quad \cos(y,\wedge \bar{r}) = \frac{y}{r}.$$

Звідси бачимо, що напрямні косинуси векторів $\bar{F}$ і $\bar{r}$ відрізняються тільки знаками, отже, $\bar{F} = -k^2 m\bar{r}$ .

Ця векторна рівність показує, що в даному еліптичному русі на точку діє притягальна сила, що пропорційна масі точки і її відстані від центра притягання, який знаходиться в початку координат, тобто в центрі еліпса.

## *Друга задача динаміки*

(визначення руху по заданим силам)

Ця задача полягає в тому, щоб, знаючи діючу силу $\bar{\Phi}$, знайти закон руху точки. Сила $\bar{\Phi}$ може залежати від часу, від положення точки в просторі і від швидкості її руху, тобто

$$\bar{\Phi} = \bar{\Phi}\ (t,\ \bar{r},\ \bar{V}).$$

Тому диференціальні рівняння ( 1.2 ) будуть в загальному випадку мати наступний вигляд:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \Phi_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}); \\ m\ddot{y} = \Phi_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}); \\ m\ddot{z} = \Phi_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}). \end{cases} \tag{1.4}$$

Знаходження закону руху даної точки зводиться до інтегрування системи (1.4), тобто системи трьох сумісних диференціальних рівнянь другого порядку, в яких невідомими функціями є координати рухомої точки x, y, z, а аргументом - час t.

Розв‘язання другої задачі, яка зв’язане з інтегруванням системи диференціальних рівнянь, представляє інколи значні труднощі і часто не може бути виконане в квадратурах.

В цих випадках потрібно систему (1.4) розв'язувати вирішувати наближеними методами, зокрема з допомогою ЕОМ.

Так як система (1.4) складається з трьох диференціальних рівнянь другого порядку, то при її інтегруванні з'являються шість довільних сталих $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$, $C_5$, $C_6$, тобто загальний розв'язок системи (1.4) має вигляд:

$$
\begin{aligned}
x &= x\,(t, C_1, C_2, ..., C_6)\\
y &= y\,(t, C_1, C_2, ..., C_6)\\
z &= z\,(t, C_1, C_2, ..., C_6)
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

Наявність в правих частинах рівнянь (1.5) довільних сталих вказує на те, що під дією даної сили точка може здійснювати не якійсь визначений рух, а цілий клас рухів, які мають різні закони при різних значеннях сталих $C_1$, $C_2$,..., $C_6$.

Фізично цей результат пояснюється тим, що точка, на яку починає діяти деяка сила, буде рухатися по різному в залежності від так званих початкових умов, тобто від початкового положення і початкової швидкості цієї точки. Наприклад, рух вільної матеріальної точки під дією сили ваги може бути прямолінійним або криволінійним в залежності від напряму її початкової швидкості.

Щоб зробити відповідну задачу динаміки визначеною, треба крім діючих сил, задати початкові умови, тобто для деякого моменту часу $t = t_0$ (початковий момент) задати:

початкове положення точки

$$x = x_0,\ y = y_0,\ z = z_0 \tag{1.6}$$

і початкову швидкість точки

$$\dot{x} = \dot{x}_0,\ \dot{y} = \dot{y}_0,\ \dot{z} = \dot{z}_0 \tag{1.7}$$

По цим початковим умовам визначаються сталі інтегрування $C_1$, $C_2$,..., $C_6$. Для цього, взявши похідні по часу від рівнянь (1.5), знаходимо проекції швидкості

$$
\begin{cases}
\dot{x} = \dot{x}\,(t, C_1,\ C_2, ..., C_6)\\
\dot{y} = \dot{y}\,(t, C_1,\ C_2, ..., C_6)\\
\dot{z} = \dot{z}\,(t, C_1,\ C_2, ..., C_6)
\end{cases}
\tag{1.8}
$$

Підставимо після цього в рівняння (1.5) і (1.8) початкові дані, отримаємо шість алгебраїчних рівнянь, що будуть містити ліворуч дані величини $x_0$, $y_0$, $z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$, а праворуч дану величину $t_0$ і шукані сталі $C_1$, $C_2$,..., $C_6$.

Розв'язуючи цю систему рівнянь, можемо знайти з неї значення сталих інтегрування, відповідні заданим початковим умовам, тобто знайти

$$C_i = f_i(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) \tag{1.9}$$

Замінивши тепер в (1.5) всі $C_i$ їхніми значеннями з (1.9), одержимо частинне розв‘язання системи диференційних рівнянь (1.4), яке задовольняє заданим початковим умовам в вигляді:

$$\begin{cases} x = x(t,\ t_0,\ x_0,\ y_0,\ z_0, \dot{x}_0,\ \dot{y}_0,\ \dot{z}_0) \\ y = y(t,\ t_0,\ x_0,\ y_0,\ z_0, \dot{x}_0,\ \dot{y}_0,\ \dot{z}_0) \\ z = z(t,\ t_0,\ x_0,\ y_0,\ z_0, \dot{x}_0,\ \dot{y}_0,\ \dot{z}_0). \end{cases} \tag{1.10}$$

Рівняння (1.10) визначають закон руху точки під дією заданих сил при даних початкових умовах, тобто дають розв‘язок другої задачі динаміки.

Задача побудови розв‘язку системи диференціальних рівнянь руху матеріальної точки ( 1.6.), яка задовольняє певним початковим умовам (1.5) називається задачею Коши.

Ця задача, як доводиться в теорії диференціальних рівнянь, при вельми загальних обмеженнях, які накладаються на праві частини диференціальних рівнянь, має єдине рішення.

Принципове значення другої основної задачі динаміки, що складає зміст лапласовського детермінізму класичної механіки, полягає в можливості однозначно завбачити майбутній рух по заданим силам і початковим умовам.

Відзначимо одну характерну особливість другої задачі динаміки, що відрізняє класичну механіку мікрооб‘єктів від квантової теорії. Згідно з принципом невизначеностей Гейзенберга (1927 р.) $\Delta x \cdot \Delta V_x \geq \dfrac{\hbar}{2m}$ ($\hbar$ - стала Планка) для мікрооб’єкта не можна точно сформулювати початкові умови, тому з точки зору класичної механіки елементарна частка, знаходячись в силовому полі, немов би «розмазана» в деякій області простору (довільні сталі в загальному розв`язку (1.5) невизначені).

## Частинні випадки інтегрування диференціального рівняння прямолінійного руху точки

Прямолінійний (вздовж осі x) рух матеріальної точки визначається одним диференціальним рівнянням: $m\ddot{x} = F_x(t, x, \dot{x})$

і початковими умовами при $t = 0$, $x = x_0$, $\dot{x} = V_0$.

1) Нехай на точку діє стала за модулем і напрямом сила $\overline{F}$.

Тоді $m\frac{dV_x}{dt} = F_x$ ( $F_x$ = const ) або m $dV_x$ = $F_x$ dt. Беручи інтеграли, одержуємо

$$V_x = \frac{F_x}{m}t + C_1 \quad \text{або} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{F_x}{m}t + C_1.$$

Помножимо обидві частини цього рівняння на dt і знову інтегруючи, знаходимо

$$x = \frac{1}{2}\cdot\frac{F_x}{m}t^2 + C_1 t + C_2.$$

Початкові умови визначають сталі інтегрування $C_1 = V_0$, $C_2 = x_0$.

2) Нехай на точку діє змінна сила, яка залежить тільки від часу

$F_x = F_x$ (t), тоді $m\frac{dV_x}{dt} = F_x$ або m $dV_x = F_x$ dt.

Інтегруючи це рівняння в відповідних границях, одержуємо

$$mV_x - mV_{x_0} = \int_0^t F_x(t)dt = S(t). \qquad (1.11)$$

Це **закон зміни кількості руху** матеріальної точки.

Визначаючи звідси $V_x$, одержуємо

$$V_x = \frac{dx}{dt} = V_0 + \frac{S(t)}{m} \quad \text{або} \quad dx = V_0 dt + \frac{S(t)}{m}dt.$$

Інтегруючи останнє рівняння в границях від $x_0$ до x і від 0 до t, знаходимо

$$x = x_0 + V_0 t + \frac{1}{m}\int_0^t S(t)dt.$$

3) Нехай рух точки відбувається під дією сили, яка залежить від положення точки $F_x = F_x$ (x). В цьому випадку для інтегрування диференціального рівняння руху точки $m\frac{dV}{dt} = F_x$ зобразимо це рівняння в вигляді

$$m\frac{dV_x}{dx}\frac{dx}{dt} = F_x \quad \text{або} \quad mV_x\frac{dV_x}{dx} = F_x$$

Звідси m $V_x$ dVx = $F_x$ dx. Інтегруючи це рівняння в відповідних границях, одержуємо

$$\frac{mV_x^2}{2} - \frac{mV_{0x}^2}{2} = \int_{x_0}^{x} F_x(x)dx = A(x) , \qquad (1.12)$$

це **закон зміни кінетичної енергії** матеріальної точки. Звідси

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{V_{0x}^2 + \frac{2}{m}A(x)}.$$

Відокремлюючи змінні, маємо:

$$dt = \frac{dx}{\pm\sqrt{V_{0x}^2 + \frac{2}{m}A(x)}} \ .$$

Інтегруючи це рівняння від $\mathbf{x_0}$ до $\mathbf{x}$ і від 0 до t, одержуємо

$$\pm\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{V_{0x}^2 + \frac{2}{m}A(x)}} = t \ .$$

Це рівняння, розв‘язане відносно **x** , висловлює рівняння руху точки в кінцевому вигляді: $x = \varphi(t)$

4) Нехай рух точки відбувається під дією сили, що залежить від швидкості $F_x = F_x(V)$.

В цьому випадку рівняння руху можна одержати двома способами.

*а) Запишемо диференціальне рівняння руху в вигляді*

$$m\frac{dV}{dt} = F_x(V)$$

*Відокремлюючи змінні, одержуємо* $\frac{m\,dV}{F_x(V)} = dt$.

І після інтегрування в відповідних границях $t = \int_{v_0}^{v} \frac{m\,dV}{F_x(V)} = V(V)$, звідки, роз-в‘язавши це рівняння відносно V, знайдемо швидкість як деяку функцію від часу $V = \frac{dx}{dt} = \varphi(t)$

Звідки повторним інтегруванням знаходимо рівняння руху $x = x_0 + \int_0^t \varphi(t)dt$ .

*б) Запишемо диференціальне рівняння руху в вигляді*

$$mV\frac{dV}{dx} = F_x(V) \ .$$

Відокремлюючи змінні $\frac{mVdV}{F(V)} = dx$, проінтегруємо в відповідних границях:

$$x - x_0 = \int_{v_0}^{v} \frac{mV\,dV}{F_x(V)} = V(V) .$$

Розв‘язавши після цього одержане рівняння відносно V, знайдемо швидкість як деяку функцію від x:

$$V = \frac{dx}{dt} = \psi(x).$$

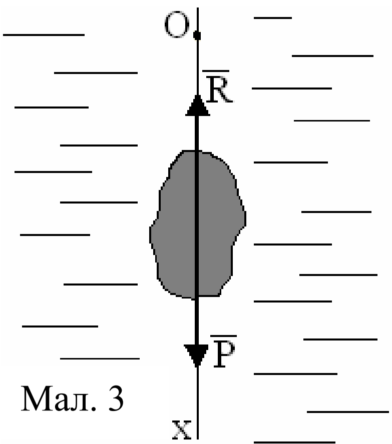
*Звідки* $\frac{dx}{\psi(x)} = dt$ *і, отже,* $\int\limits_{x_0}^{x} \frac{dx}{\psi(x)} = t$.

Виразивши як функцію t, одержимо рівняння руху $x = f(t)$.

*Другу задачу динаміки рекомендується розв`язувати в наступному порядку:*

- *зобразити на малюнку матеріальну точку в поточному положенні;*
- *вказати діючі на точку активні сили і реакції в'язей;*
- *вибрати систему відліку;*
- *скласти диференціальні рівняння руху матеріальної точки;*
- *записати початкові умови руху матеріальної точки*
- *проінтегрувати систему диференціальних рівнянь руху. Використавши почат-кові умови, визначити сталі інтегрування;*
- *скористувавшись отриманими рівняннями руху, визначити шукані величини.*

*Приклад* . Падіння тіла в середовищі з опором (в повітрі). При русі тіла в якому-небудь середовищі воно зазнає опору, що залежить від форми і розмірів тіла і швидкості руху, а також від властивостей самого середовища. Для швидкостей руху, не дуже малих і не близьких до швидкості звука, сила опору, як показує досвід, пропорційна квадрату швидкості V і може визначатися згідно з формулою .



Мал. 3

$$R = \frac{1}{2} C_x \rho S V^2$$

де $\rho$ - густина середовища; S – площа проекції тіла на площину, перпендикулярну до напряму руху; $C_x$ – безрозмірний коефіцієнт опору, що залежить від форми тіла.

Розглянемо задачу падіння тіла в повітрі без початкової швидкості $V_0 = 0$. Направимо вісь Ox по вертикалі вниз, тоді диференціальне рівняння руху буде мати вигляд $m\frac{dV}{dt} = P - \frac{1}{2} C_x \rho S V^2$.

Щоб одержати залежність швидкості падіння від пройденого шляху x, запишемо дане рівняння в вигляді $\frac{P}{q} V \frac{dV}{dx} = P - \frac{1}{2} C_x \rho S V^2$.

Якщо ввести позначення $\frac{2P}{C_x \rho S} = a^2$, те попереднє рівняння прийме

вигляд $$V\frac{dV}{dx} = g(1 - \frac{V^2}{a^2}).$$

*Відокремимо змінні:* $\frac{Vdv}{a^2 - V^2} = \frac{g}{a^2}dt$ *і , інтегруючи, отримаємо*

$$\ln(a^2 - V^2) = \frac{2g}{a^2}x + C_1.$$

Згідно з початковими даними при x = 0: V = 0; $C_1 = \ln\ a^2$

В результаті

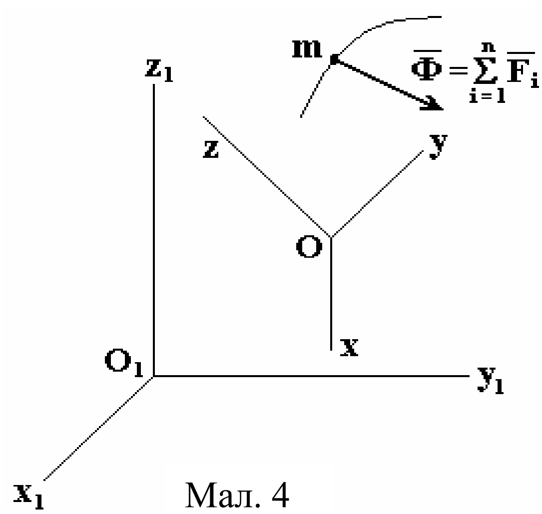
$$\ln\frac{a^2 - V^2}{a^2} = -2\frac{g}{a^2}x \quad \text{і} \quad V = a\sqrt{1 - \exp(-\frac{2g}{a^2}x)}\ .$$

Отримана формула дає закон зміни швидкості тіла, що падає в залежності від пройденого шляху. З цієї формули витікає, що швидкість падіння V з зростанням x зростає від нуля до граничного значення $a = \sqrt{\frac{2P}{C_x \rho S}}$.

Наприклад, гранична швидкість парашутиста, вага якого P = 75 кг при затяжному стрибку, вважаючи S = 0,4 м$^2$, $C_x$ = 1, a = 55 м / с; при стрибку з відкритим парашутом, вважаючи S = 36 м$^2$ , $C_x$ = 1,4 гранична швидкість дорівнює a = 5 м / с .

## §3. Диференціальні рівняння відносного руху матеріальної точки

Розгланемо відносний рух точки, тобто рух відносно неінерціальних рухомих систем координат.




Мал. 4

Нехай матеріальна точка **M** рухається під дією прикладених до неї сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, ..., \bar{F}_n$ , які є результат взаємодії точки з іншими тілами. Будемо вивчати рух цієї точки відносно осей **Oxyz** (мал. 4), які в свою чергу якимось відомим способом рухаються відносно нерухомих осей $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ . Знайдемо залежність між відносним прискоренням точки $\bar{a}_{\text{відн.}}$ та діючими на неї силами. Тобто треба встановити основний закон динаміки відносного руху матеріальної точки.

Для абсолютного руху точки основний закон динаміки (в системі відліку $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$) має вигляд

$$m\overline{a}_{абс} = \overline{\Phi} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i \,. \tag{1.13}$$

З теореми Коріоліса відомо, що

$$\overline{a}_{абс} = \overline{a}_{відн.} + \overline{a}_{пер} + \overline{a}_{кор} \,, \tag{1.14}$$

де $\overline{a}_{відн.}$, $\overline{a}_{пер}$, $\overline{a}_{кор}$ - відносне, переносне і коріолісове прискорення точки.

Підставимо це значення $\overline{a}_{абс}$ (1.14) в (1.13) і одержимо

$$m\overline{a}_{відн.} = \overline{\Phi} - m\overline{a}_{пер} - m\overline{a}_{кор} \,.$$

Введемо позначення

$$\overline{F}^{i}_{пер} = -m\overline{a}_{пер} \,, \quad \overline{F}^{i}_{кор} = -m\overline{a}_{кор} \tag{1.15}$$

Величини $\overline{F}^{i}_{пер}$ і $\overline{F}^{i}_{кор}$ за розмірністю є силами і називаються переносною і коріолісовою силами інерції.

Тоді рівняння руху точки у рухомій системі відліку **Oxyz** приймає вигляд

$$m\overline{a}_{відн.} = \overline{\Phi} + \overline{F}^{i}_{пер} + \overline{F}^{i}_{кор} \,. \tag{1.16}$$

Рівняння (1.16) виражає основний закон динаміки для відносного руху точки.

Цей закон не відрізняється за формулою від основного закону динаміки в інерціальній системі відліку, якщо до числа сил, які діють на точку, додати переносну та коріолісову сили інерції. Таким чином, сили інерції дозволяють перетворити неінерціальну систему відліку в інерціальну систему координат.

В проекціях на рухомі осі координат диференціальні рівняння відносного руху матеріальної точки

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \Phi_x + F^{i}_{пер\,x} + F^{i}_{кор\,x} \\ m\ddot{y} = \Phi_y + F^{i}_{пер\,y} + F^{i}_{кор\,y} \\ m\ddot{z} = \Phi_z + F^{i}_{пер\,z} + F^{i}_{кор\,z} \end{cases} . \tag{1.17}$$

Розглянемо частинні випадки відносного руху точки.

1. Якщо рухомі осі рухаються поступально, то $\overline{F}^{i}_{кор} = -m\overline{a}_{кор} = 0$, тому що в цьому випадку кутова швидкість обертання рухомих осей $\omega_{пер} = 0$ і закон відносного руху набуває вигляд

$$m\overline{a}_{відн} = \overline{\Phi} + \overline{F}^{i}_{пер} \,. \tag{1.18}$$

2. Якщо рухомі осі переміщуються поступально, а також прямолінійно і рівномірно, то з одного боку $\omega_{пер} = 0$, $\overline{F}^{i}_{кор} = -m\overline{a}_{кор} = 0$, а з другого - $\overline{V}_{пер} = \mathrm{const}$, $\overline{a}_{пер} = 0$, $\overline{F}^{i}_{пер} = -m\overline{a}_{пер} = 0$. Тоді

$$m\overline{a}_{відн} = \overline{\Phi} \,. \tag{1.19}$$

Закон відносного руху (1.19) має такий же вигляд, як і закон (1.13) руху відносно нерухомих осей. Отже, така система відліку буде також інерціальною. З одержаного результату випливає, що:

ніяким механічним експериментом не можна виявити, чи знаходиться дана система відліку в спокої або здійснює поступальний, рівномірний та прямолінійний рух.

Це принцип відносності класичної механіки Галілея.

3. Якщо точка знаходиться в спокої відносно рухомих осей, то для неї

$\overline{a}_{\text{відн}} = 0$ і $\overline{V}_{\text{відн}} = 0$, отже $\overline{a}_{\text{кор}} = 2\left[\overline{\omega}_{\text{пер}} \times \overline{V}_{\text{відн}}\right] = 0$ і $\overline{F}^{i}_{\text{кор}} = 0$.

Тоді основний закон динаміки для відносного спокою точки має такий вигляд

$$\overline{\Phi} + \overline{F}^{i}_{\text{пер}} = 0 . \qquad (1.20)$$

З нього витікає, що рівняння відносної рівноваги складаються так як рівняння рівноваги в нерухомих осях, якщо при цьому до діючих на точку сил взаємодії з іншими тілами додати переносну силу інерції.

Глава 2. Вступ до динаміки системи

## §1. Механічна система. Властивості внутрішніх сил системи

Механічною системою матеріальних точок або тіл називається така їх сукупність, в якій положення або рух кожної точки або тіла залежить від положення і руху всіх інших.

Усі сили, які діють на точки будь-якої механічної системи можна поділити на зовнішні $\overline{F}_i^{'}$ і внутрішні $\overline{F}_i^{''}$.

Зовнішніми називаються сили, які діють на точки системи з боку матеріальних точок або тіл, які не входять до складу даної системи. Будемо позначати:

$\overline{R}^{'} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i^{'}$ - головний вектор зовнішніх сил,

$\overline{M}_0^{'} = \sum_{i=1}^{n} \overline{m}_0(\overline{F}_i^{'})$ - головний момент зовнішніх сил.

Внутрішніми силами називаються сили взаємодії між матеріальними точками даної механічної системи.

Позначимо $\bar{R}'' = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i''$ - головний вектор внутрішніх сил,

$\bar{M}_0'' = \sum_{i=1}^{n} \bar{m}_0(\bar{F}_i'')$ - головний момент внутрішніх сил.

Властивості внутрішніх сил

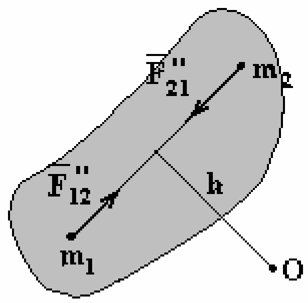
***1. Головний вектор усіх внутрішніх сил системи дорівнює нулю***

$$\boxed{\bar{R}'' = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i'' = 0} \;. \qquad (2.1)$$

Дійсно, згідно з третьою аксіомою динаміки будь-які дві точки системи (мал. 5) діють одна на одну з рівними по модулю і протилежними силами $\bar{F}_{12}''$ і $\bar{F}_{21}''$, сума яких дорівнює нулю. Тому що аналогічний результат має місце для будь-якої пари точок системи, то $\bar{R}'' = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i'' = 0$

2. Головний момент усіх внутрішніх сил системи відносно будь-якого полюса або осі дорівнює нулю

$$\boxed{\bar{M}_0'' = \sum_{i=1}^{n} \bar{m}_0(\bar{F}_i'') = 0} \;. \qquad (2.2)$$




Мал. 5

Дійсно, якщо взяти довільний полюс О, то з мал. 7 бачимо, що $\bar{m}_o(\bar{F}_{12}'') + \bar{m}_o(\bar{F}_{21}'') = 0$. Аналогічний результат отримується при обчисленні моментів відносно осі. Отже і для всієї системи буде

$$\bar{M}_0'' = \sum_{i=1}^{n} \bar{m}_0(\bar{F}_i'') = 0 \quad \text{або} \quad M_x'' = \sum_{i=1}^{n} m_x(\bar{F}_i'') = 0 \;.$$

Як зовнішні, так і внутрішні сили можуть бути активними силами або реакціями в'язей.

На відміну від матеріальної точки, рух механічної системи залежить і обумовлений не тільки діючими силами (зовнішніми і внутрішніми), а також цей рух залежить від розподілу мас в системі.

Наприклад, розглянемо обертання фігуриста. Створюючи початковий обертальний момент і притиснувши руки до тулуба, фігурист робить швидке обертання. Для припинення цього руху він розводить руки в сторони і обертання швидко припиняється. У даному випадку на зміну кутової швидкості впливають не внутрішні сили, а перерозподіл мас у системі.

Інший приклад. Добре відомо, як можна розгойдувати гойдалку без прикладання зовнішніх сил. У цьому випадку людина, що знаходиться на гойдалці, в потрібному положенні наближає або віддаляє свій центр ваги відносно осі обертання, збільшуючи тим самим амплітуду розгойдування.

Розглянемо деякі кількісні міри розподілу мас у системі.

## §2. Геометрія мас

Однією з величин, що характеризує розподіл мас у механічній системі, є центр мас.

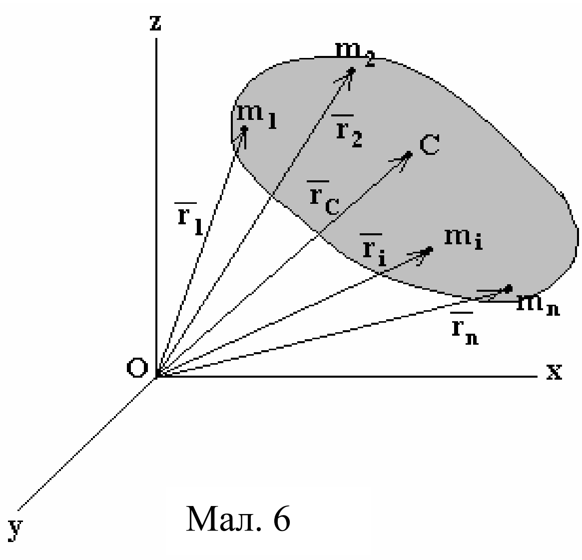
Центр мас

**Маса системи** - це сума мас усіх точок або тіл, з яких складається система

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i \qquad (2.3)$$

**Центр мас системи** - це геометрична точка **C**, радіус-вектор якої визначається за формулою

$$\overline{r}_C = \frac{1}{M} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \overline{r}_i , \qquad (2.4)$$




Мал. 6

де $\overline{r}_C$ - радіус-вектор центра мас;

$\overline{r}_i$ - радіуси-вектори точок системи; **$m_i$** - їх маси ( мал. 6) .

Координати центра мас знаходимо з ( 2.4 ) проектуванням на декартові осі координат

$$x_C = \frac{1}{M} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

$$y_C = \frac{1}{M} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i y_i \qquad (2.5)$$

$$z_C = \frac{1}{M} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i z_i .$$

Центр мас збігається з центром ваги в однорідному полі сили ваги. Однак поняття центра мас є більш загальним, ніж поняття центра ваги, оскільки воно не пов’язане з наявністю однорідного поля ваги.

Якщо будь-яка вісь проходить через центр мас, то вона називається центральною.

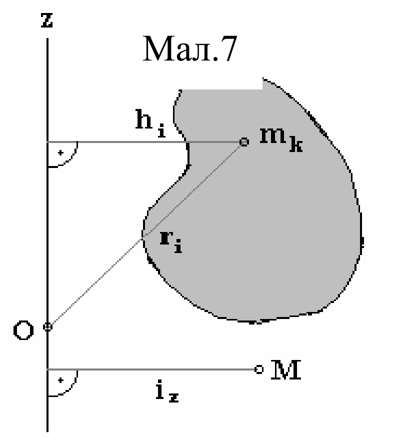
Однак центр мас не повною мірою характеризує розподіл мас у системі, такими додатковими характеристиками є моменти інерції відносно полюса і осі.

**Моменти інерції відносно полюса та осі**

Моментом інерції механічної системи відносно полюса O називається сума добутків мас цих точок на квадрати їх відстаней до полюса O ( мал. 7 ).

$$J_o = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot r_i^2 \qquad (2.6)$$

Моментом інерції $J_z$ системи матеріальних точок відносно осі Oz називається сума добутків мас цих точок на квадрати їх відстаней до осі Oz (мал. 7)



Мал.7

$$J_z = \sum_{i=1}^{n} m_i h_i^2 \qquad (2.7)$$

Якщо тіло суцільне (однорідне), то розбиваючи його на елементарні частини, знаходимо, що в границі сума, яка знаходиться в рівності ( 2.7 ), обернеться в інтеграл. Враховуючи, що **dm =ρ dv**, де **dm** - елемент маси, ρ- густина, **dv** - елемент об'єму, одержимо

$$J_z = \int h^2 dm = \int \rho \cdot h^2 dv \qquad (2.8)$$

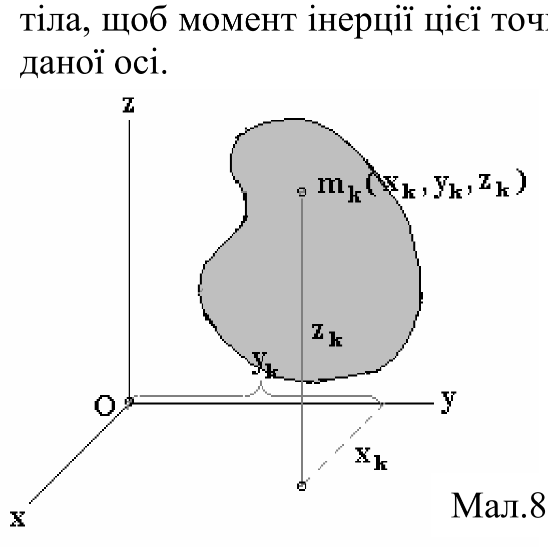
де інтеграл беремо по всьому об'єму тіла.

На практиці для визначення моментів інерції тіл складної конфігурації часто використовують поняття радіуса інерції. Так, момент інерції тіла відносно осі дорівнює $J_z = M \cdot i_z^2$ , ( 2.9 )

де M - маса системи; $i_z$ - радіус інерції механічної системи відносно осі z (вимірюється в одиницях довжини). Тобто, радіус інерції $i_z$ визначає відстань, на якій необхідно примістити матеріальну точку масою M , яка дорівнює масі тіла, щоб момент інерції цієї точки був би рівним моменту інерції тіла відносно даної осі.

Одержимо формули для визначення моментів інерції механічної системи відносно координатних осей x, y, z..

Як бачимо з мал. 8, момент інерції механічної системи відносно полюса O



Мал.8

дорівнює $$J_0 = \sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2 = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) \quad (2.10)$$

Враховуємо, що квадрати найкоротших відстаней до осей x, y, z дорівнюють ( мал. 8 ) величинам $y_k^2 + z_k^2$ , $x_k^2 + z_k^2$, $x_k^2 + y_k^2$

Остаточно одержимо такі вирази для моментів інерції відносно осей

$$J_x = \sum_{k=1}^{n} m_k (y_k^2 + z_k^2), \quad J_y = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k^2 + z_k^2), \quad J_z = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k^2 + y_k^2) \quad (2.11)$$

Додаємо ліві і праві частини виразів (2.11) і врахуємо відповідно (2.10)

$$J_x + J_y + J_z = 2J_0 \quad (2.12)$$

Отже, сума моментів інерції відносно осей координат дорівнює подвоєному моменту інерції відносно початку координат.

Для повноти характеристики міри інерції тіл в механіці розглядають також ще три види моментів інерції відносно осей координат Oxyz. Ці моменти інерції називають відцентровими моментами інерції і визначають за формулами:

$$J_{xy} = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k y_k, \quad J_{xz} = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k z_k, \quad J_{yz} = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k z_k . \quad (2.13)$$

У сукупності розглянуті моменти інерції $J_x$ , $J_y$ , $J_z$ , $J_{xy}$ , $J_{xz}$ , $J_{yz}$ повною мірою визначають розподіл мас у системі, тобто ця сукупність є кількісною мірою інерції системи в даній точці, вона залежить від вибору осей координат, однак сукупність цих величин в цілому не залежить від цього вибору і представляє собою єдину фізичну величину – тензор інерції.

### Моменти інерції відносно паралельних осей

Зв'язок між моментами інерції відносно паралельних осей, одна з яких проходить через центр мас, складає зміст теореми Гюйгенса

**Теорема Гюйгенса**

Момент інерції системи відносно будь-якої осі дорівнює сумі моменту інерції відносно паралельній їй центральної осі і добутку маси всієї системи на квадрат відстані між осями.

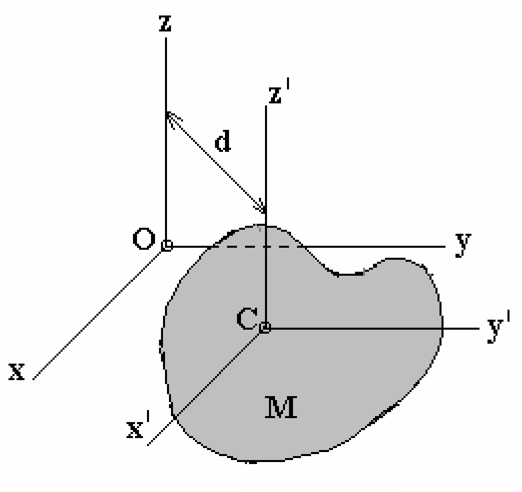
$$\boxed{J_{Oz} = J_{Cz'} + Md^2} \quad (2.14)$$

Доказ.

Маємо дві системи прямокутних взаємно паралельних осей координат Oxyz і Cx\`y\`z\` (мал. 9)

Початок системи координат Cx`y`z` знаходиться в центрі мас системи. Згідно з означенням моменту інерції відносно осі маємо

$$J_{0z} = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + y_i^2), \quad J_{Cz'} = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i'^2 + y_i'^2),$$



Мал. 9

де $m_i$ - маса точки $m_i$, а $x_i$, $y_i$, $z_i$, і $x`_i$, $y`_i$, $z`_i$ – координати цієї точки відносно системи координат Oxyz і Cx`y`z` відповідно.

Якщо позначити a, b, c координати центра мас **C** відносно системи координат Oxyz, то для взаємно паралельних осей координати однієї і тієї ж точки $m_i$ зв'язані співвідношеннями паралельного перенесення

$$x_i = x`_i + a, \quad y_i = y`_i + b, \quad z_i = z`_i + c$$

Підставимо ці значення $x_i$, $y_i$, $z_i$ в вираз моменту інерції ...ржимо

$$J_{Oz} = \sum_{i=1}^{n} m[(x_i' + a)^2 + (y_i' + b)^2] = \sum_{i=1}^{n} m_i (x'^2_i + y_i'^2) + 2a\sum_{i=1}^{n} m_i x_i' +$$

$$+2b\sum_{i=1}^{n} m_i y_i' + (a^2 + b^2)\sum_{i=1}^{n} m_i$$

В цьому співвідношенні $\sum_{i=1}^{n} m_i = M$ - маса системи.

На підставі формул для координат центра мас

$$x_C' = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i'}{M} \qquad y_C' = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i'}{M}$$

тому що $x_C' = 0$, $y_C' = 0$ ( центр мас C знаходиться в початку координат ), маємо

$$\sum_{i=1}^{n} m_i x_i' = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} m_i y_i' = 0 .$$

Величина $a^2 + b^2 = d^2$, де d - відстань між осями Oz і Cz`.

Остаточно $J_{Oz} = J_{Cz'} + M \cdot d^2$

. Зв'язок між радіусами інерції твердого тіла відносно паралельних осей Oz і Cz' згідно з (2.9) і (2.14) має вигляд

$$i^2_{Oz'} = i^2_{Cz'} + d^2. \qquad (2.15)$$

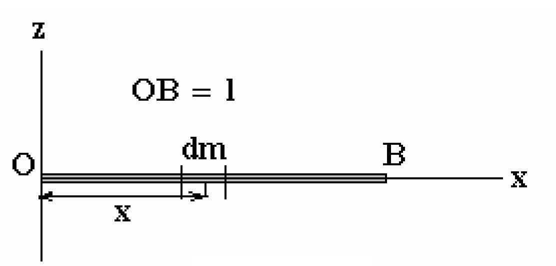
*__Висновок__*. Найменший момент інерції (радіус інерції) відносно паралельних осей буде відносно центральної осі.

Це витікає з виразу теореми (2.14), тому що d = 0.

**Моменти інерції найпростіших однорідних тіл**

1. *Тонкий однорідний стержень довжини l і маси M.*

Обчислимо його момент інерції відносно осі Oz, яка перпендикулярна стержню і проходить через його кінець O ( мал. 10).




Мал. 10

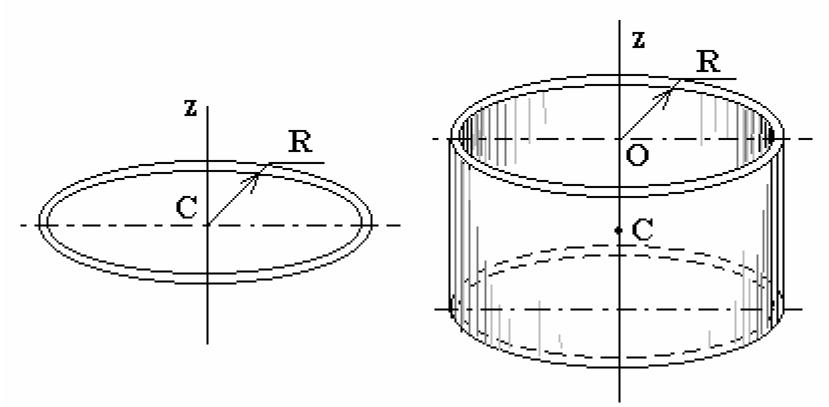
Напрямимо вздовж OB координатну вісь Ox. Тоді для будь-якого елементарного відрізка довжини dx величина його відстані від осі дорівнює h = x, а маса одиниці довжини стержня $m_l$ = M \ l. В результаті формула (2.8)дає

$$J_z = \int x^2 dm = m_l \int_0^l x^2 dx = m_l \frac{l^3}{3}$$

Замінимо $m_l$ його значенням і остаточно знайдемо

$$\boxed{J_z = M\frac{l^2}{3}} \qquad (2.16)$$

2. *Тонке однорідне кільце або порожнистий циліндр радіусом R і масою M.*



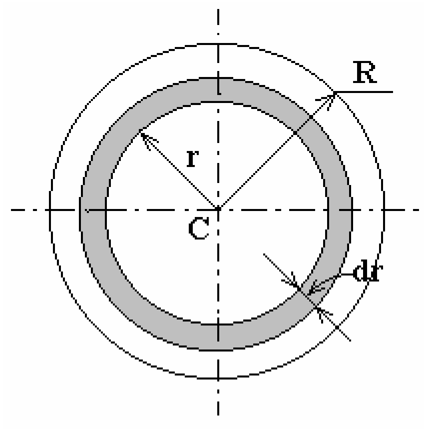

Мал. 11

Знайдемо момент інерції відносно осі Cz , яка перпендикулярна до площини кільця і проходить через його центр (мал. 11). Тому що всі точки кільця знаходяться на відстані h = R від осі Cz, то за формулою (2.7)

$$J_{Cz} = \sum m_k R^2 = (\sum m_k) R^2 = M R^2 . \qquad (2.17)$$

Так само обчислюється момент інерціїї порожнистого циліндра відносно центральної осі Cz.

3. *Кругла однорідна пластина (диск) або суцільний циліндр радіусом R і масою M.*




Мал. 12

Обчислимо момент інерції круглої пластини відносно осі Cz, яка перпендикулярна до пластини і проходить через її центр C. Для цього вилучмо елементарне кільце (мал. 12) радіусом **r** і ширини **dr**. Площа цього кільця dS = 2 π r dr, а маса одиниці площі $\rho_S = \dfrac{M}{\pi R^2}$ .

Тоді маса кільця dm = $\rho_S$ dS і згідно з формулою (2.8)

$$J_{Cz} = \int r^2 dm = \rho_S \int_0^R r^2\, 2\pi r\, dr = 2\pi\rho_S \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi\rho_S R^4}{2}$$

Замінимо $\rho_S$ його значенням і остаточно знаходимо

$$\boxed{J_{Cz} = \frac{M R^2}{2}} \qquad (2.18)$$

Ця формула також виходить і для однорідного суцільного круглого циліндра масою M і радіусом R.

# Глава 3. Загальні теореми динаміки точки і системи

## §1. Диференціальні рівняння руху системи

Розглянемо систему, яка складається з **n** матеріальних точок. Вилучимо будь-яку точку системи з масою $m_i$ . Позначимо рівнодійну всіх прикладених до точки зовнішніх сил (активних і реакцій в'язей) через $\overline{F}_i^{'}$, а рівнодійну усіх внутрішніх сил $\overline{F}_i^{''}$. Якщо точка має при цьому прискорення $\overline{a}_i$, то згідно з основним законом динаміки

$$m_i \overline{a}_i = \overline{F}_i^{'} + \overline{F}_i^{''}$$

Аналогічний результат одержимо для будь-якої точки (i = 1,2,....,n).

*Отже, для всієї системи буде*

$$\begin{cases} m_i \bar{a}_i = \bar{F}_i^{'} + \bar{F}_i^{''} \\ i = 1, 2, ...n \end{cases} \tag{3.1}$$

Ці рівняння ( 3.1 ), з яких можна визначити закон руху кожної точки системи, називаються диференціальними рівняннями руху системи.

Проектуючи вектори обох частин рівності (3.1) на усі осі координат **x, y, z** маємо:

$$\begin{cases} m_i \ddot{x}_i = F_{ix}^{'} + F_{ix}^{''} \\ m_i \ddot{y}_i = F_{iy}^{'} + F_{iy}^{''} \\ m_i \ddot{z}_i = F_{iz}^{'} + F_{iz}^{''} \\ i = 1, 2, ...n \end{cases} \tag{3.2}$$

Для механічної системи, яка складається з **n** точок, одержали **3n** сумісних диференціальних рівнянь руху.

Так як внутрішні сили або реакції в'язей, які прикладені до точок систе-ми, в більшості випадків залишаються невідомими, а число точок системи звичайно велике, то ці **3n** рівнянь можуть бути проінтегровані лише в виняткових випадках (із-за математичних труднощів). Основна роль рівнянь (3.2) полягає в тому, що вони є вихідними для одержання відповідних загальних теорем.

В більшості випадків при розв'язуванні задач механіки буває достатньо знати закони зміни деяких сумарних (інтегральних) характеристик системи в цілому, а не закономірності руху її окремих елементів. Загальні теореми динаміки системи дозволяють визначити ці сумарні характеристики системи, їх зміну або зберігання.

## §2. Теорема про рух центра мас.

В ряді випадків для визначення характеру руху системи достатньо знати рух іі центра мас.

Т е о р е м а. Центр мас системи рухається як матеріальна точка, маса якої дорівнює масі системи, під дією всіх зовнішніх сил системи.

$$\boxed{M \bar{a}_C = \bar{R}'} \tag{I}$$

Щоб довести цей закон руху центра мас, звернемось до рівнянь руху системи (3.1) і додамо почленно їх ліві та праві частини. Одержимо

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \overline{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i' + \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i''$$

Перетворимо ліву частину рівності. З формули (2.4) для визначення радіуса-вектора центра мас маємо

$$. \quad \sum_{i=1}^{n} m_i \overline{r}_i = M \overline{r}_C$$

Повсюди у подальшому припускаємо, що розглядаються тільки механічні системи постійного складу, тобто $M = const$ і $m_i = const$.

Беремо від обох частин цієї рівності другу похідну по часу, знаходимо

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \overline{r}_i\right) = \frac{d^2}{dt^2}(M \overline{r}_C), \quad \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d^2 \overline{r}_i}{dt^2} = M \frac{d^2 \overline{r}_C}{dt^2}, \quad \sum_{i=1}^{n} m_i \overline{a}_i = M \overline{a}_C,$$

$$M \overline{a}_C = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i' + \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i'',$$

де $\overline{a}_C$ - прискорення центра мас системи. Так як згідно з властивістю внутрішніх сил системи $\sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i'' = 0$,

то одержимо остаточно $M \overline{a}_C = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i' = \overline{R}'$ .

Проектуючи обидві частині цієї рівності на координатні осі, визначимо:

$$M \ddot{x} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}', \quad M \ddot{y} = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}', \quad M \ddot{z} = \sum_{i=1}^{n} F_{iz}'. \qquad (3.3)$$

Рівняння (3.3) - диференціальні рівняння руху центра мас в проекціях на декартові осі координат.

Значення теореми полягає в тому, що:

1. Якщо тіло рухається поступально, то його рух повністю визначається ру-хом центра мас. Таким чином, тверде тіло, що рухається поступально, можна завжди розглядати як матеріальну точку, маса якої дорівнює масі всієї системи. В інших випадках тіло можна розглядати як матеріальну точку лише тоді, коли практично для визначення положення тіла достатньо знати положення його центра мас.

2. Диференціальні рівняння (3.3) руху центра мас не містять внутрішніх сил, що значно полегшує їх інтегрування.

***Висновки.*** *1. Закони збереження руху центра мас*

1. Нехай головний вектор зовнішніх сил, діючих на систему, дорівнює нулю

$\bar{R}' = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i' = 0$ . Тоді з ( I ) витікає, що $\bar{a}_C = 0$, $\frac{d\bar{V}_C}{dt} = 0$ , або $\bar{V}_C = \text{const}$ .

Отже, якщо головний вектор зовнішних сил системи дорівнює нулю, то центр мас цієї системи рухається зі сталою за модулем і напрямом швідкістю $\boxed{\bar{V}_C = \text{const}}$ , тобто рівномірно і прямоліниїно.

Зокрема, якщо спочатку центр мас був у спокої, то він і залишиться у спокої, а дія внутрішніх сил рух центра мас системи змінити не може.

2. Нехай головний вектор зовнішніх сил, які діють на систему, не дорів-нює нулю, а проекція головного вектора на яку-небудь вісь (наприклад, вісь x) дорівнює нулю

$$R_x' = \sum_{i=1}^{n} F'_{ix} = 0.$$

Тоді перше з рівнянь (3.3) має вигляд

$$\frac{d^2 x_C}{dt^2} = \frac{dV_{Cx}}{dt} = 0 \quad \text{або} \quad \frac{dx_C}{dt} = V_{Cx} = \text{const}.$$

Отже, якщо проекція головного вектора усіх діючих зовнішніх сил дорівнює нулю, то проекція швидкості центра мас на цю вісь є сталою величиною

$$\boxed{V_{Cx} = \text{const}} \tag{3.4}$$

*2. Закон збереження положення центра мас.*

Зокрема $R_x' = 0$ , якщо спочатку $V_{Cx} = 0$ , то і в подальшому також $V_{Cx} = \frac{dx_C}{dt} = 0$, або $x_C = \text{const}$, тобто положення центра мас системи в цьому випадку відносно осі Ох залишиться незмінним.

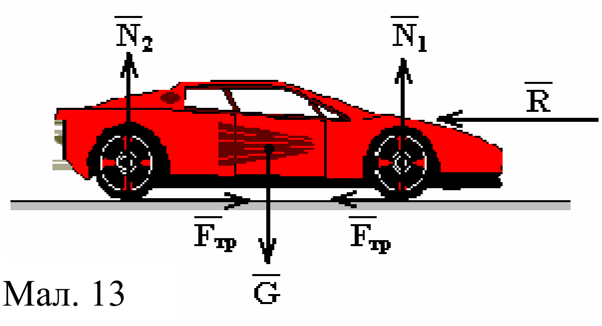
$$\boxed{x_C = \text{const}}. \tag{3.5}$$

Розглянемо деякі приклади цих законів збереження.

1). *Дія пари сил на вільне тверде тіло.* Якщо на вільне тіло, яке спочатку було нерухомим, діє тільки пара зовнішніх сил, то головний вектор зовнішніх сил дорівнює нулю і відповідно першому висновку теореми центр мас тіло залишається в спокої і в подальшому. Тобто, під дією пари сил тіло стане обертатися навколо центра мас.

2). *Рух людини по горизонтальній поверхні.* Людина при відсутності тертя не може рухатись по гладкій горизонтальній поверхні під дією тільки мускуль-ного зусилля. Рух його центра мас виникає під дією сил зчеплення між підошвами ніг і площиною. Ці зовнішні сили реакції поверхні завжди напрямлені в бік руху людини.

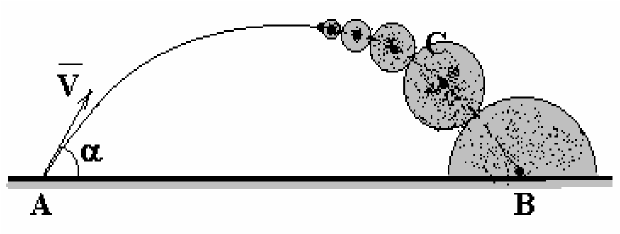
3). *Рух автомобіля по горизонтальному шляху.* Розглянемо рух автомобіля по горизонтальному шляху ( мал. 13); внутрішні сили двигуна автомобіля не можуть привести його в стан руху, тому що тільки зовнішні сили створюють




Мал. 13

зміну руху центра мас. Цими зов-нішніми силами є: сила ваги ав-томобіля $\overline{G}$, реакція поверхні дороги і сила опору повітря $\overline{R}$. Сила опору гальмує рух автомобіля, сила ваги вертикальна і не може спричинювати горизонтальний рух центра мас автомобіля. Розглянемо реакції поверхні дороги по відношенню до переднього відомого і ведучого заднього колеса автомобіля. Реакції ці можна розкласти на напрями, перпендикулярний і паралельний полотну дороги. Перша складова вертикальна і горизонтального прискорення не створює. Єдиною рушійною силою є горизонтальна складова реакції ведучого колеса, тобто сила зчеплення (сила тертя) між ведучим колесом і поверхнею дороги, вона напрямлена в бік руху автомобіля (мал. 13). Ця зовнішня сила і дозволяє центру мас рухатися в необхідному напрямі.

4). *Рух хмари осколків гранати, що розірвалась.* Граната, що не розірвалась і




кинута під кутом до горизонту, летить по параболі. Якщо граната розривається на будь-якій висоті над землею, то утворюється хмара осколків. Розрив гранати виникає під дією внутрішніх сил

Мал. 14

тиску, які не можуть впливати на рух центра мас. Тому хмара осколків рухається так, що центр мас системи осколків залишається на цій параболі, по якій рухалась би граната, що не розірвалась.

Розв'язування задач

Теорема про рух центра мас механічної системи застосовується, якщо відомі зовнішні сили системи і треба знайти закон руху центра мас або рух однієї з точок системи по даному руху решти точок (обернена задача), і навпаки, знаходження головного вектора зовнішніх сил за даним законом руху центра мас (пряма задача). Розглянемо деякі приклади оберненої (другої) задачі.

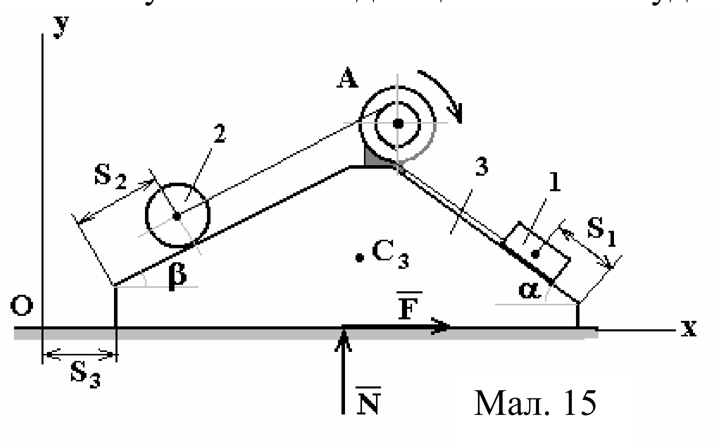
*Методика розв'язування цих задач така:*

1. *Вказати об'єкт руху, тобто визначити, які матеріальні точки (або тіла) треба включити в систему, рух якої розглядається;*
2. *Зобразити на малюнку механічну систему і вказати всі зовнішні сили;*

3. *Вибрати систему координат і скласти диференціальні рівняння руху центра інерції системи в проекціях на осі декартових координат, або відповідні закони збереження руху (або положення) центра мас. Для цього слід записати координати центрів інерції всіх точок системи.*
4. *Визначити закон руху центра мас або закон руху окремих точок системи по даним початковим умовам.*
5. *Після розв'язання задачі треба дослідити одержані результати.*

Приклад . Тіла 1 і 2 рухаються по відношенню до тіла 3 з допомогою механізмів, які встановлені на цьому тілі. Тіло 3 знаходиться на горизонтальній площині (мал. 15). Припускаючи шорсткість горизонтальної площини, записати диференціальне рівняння руху тіла 3; визначити умову, для кутів $\alpha$ і $\beta$ похилих поверхонь призми 3, при яких тіло 3 (при заданих параметрах системи) почне рухатися, і знайти закон руху призми 3 при $\alpha = 0$ і $\beta=15^0$, якщо при такому значенні $\alpha$ і $\beta$ рух з'являється можливим.
Відомі: $m_1$=700 кг, $m_2$=400 кг – маси тіл 1 і 2; $m_3$=800 кг – маса тіла 3; R=20см– більший радіус шківа А приводу; $\varphi_A=15t^2$ рад – рівняння руху шківа А; R/r = 2; $\alpha$ , $\beta$ – кути нахилу граней призми 3 до горизонтальної площини; $f_{зч}$= 0.11 коефіцієнт тертя спокою (зчеплення ), f = 0,1 – коефіцієнт тертя ковзання.

Р о з в' я з а н н я. Дана система складається з трьох тіл, вона зображена на малюнку 15. В'яззю для цієї системи буде шорстка горизонтальна площина.




Мал. 15

Реакція в'язі має дві складові: нормальна реакція $\overline{N}$ напрямлена вертикально і $\overline{F}$ - сила тертя ковзання. Отже, до зовнішніх сил належать сили ваги всіх тіл системи $\overline{m_1 g}$ , $\overline{m_2 g}$ , $\overline{m_3 g}$ і сили реакції $\overline{N}$ і $\overline{F}$.

Складемо диференціальні рівняння руху центра мас системи:

$$M\ddot{x}_C = \sum F'_{ix} = F \ , \qquad M\ddot{y}_C = \sum F'_{iy} = N - Mg \ .$$

Виразимо проекції прискорення центра мас на осі координат через відповідні проекції прискорення центрів мас окремих тіл системи

$$\ddot{x}_C = \frac{m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 + m_3\ddot{x}_3}{M} \ , \qquad \ddot{y}_C = \frac{m_1\ddot{y}_1 + m_2\ddot{y}_2 + m_3\ddot{y}_3}{M} \ ,$$

де $x_1 = x_{10} + s_3 - s_1\cos\alpha$ ,

$x_2 = x_{20} + s_3 + s_2\cos\beta$ ,

$x_3 = x_{30} + s_3$ ,

$y_1 = y_{10} + s_1\sin\alpha$ ,

$y_2 = y_{20} + s_2 \sin\beta$ ,

$y_3 = y_{30}$ .

Зважаючи, що $s_2 = 0.5 \cdot s_1$, маємо

$m_1(\ddot{s}_3 - \ddot{s}_1 \cos\alpha) + m_2(\ddot{s}_3 + 0.5\ddot{s}_1 \cos\beta) + m_3\ddot{s}_3 = F$

$m_1\ddot{s}_1 \sin\alpha + 0.5m_2\ddot{s}_1 \sin\beta = N - Mg$ .

З другого рівняння

$$N = Mg + m_1\ddot{s}_1 \sin\alpha + 0.5m_2\ddot{s}_1 \sin\beta .$$

Знайдемо силу тертя ковзання

$$F = f\,N = f\,(Mg + m_1\ddot{s}_1 \sin\alpha + 0.5m_2\ddot{s}_1 \sin\beta),$$

тоді перше рівняння має вигляд

$$m_1(\ddot{s}_3 - \ddot{s}_1 \cos\alpha) + m_2(\ddot{s}_3 + 0.5\ddot{s}_1 \cos\beta) + m_3\ddot{s}_3 = \\ = f(Mg + m_1\ddot{s}_1 \sin\alpha + 0.5m_2\ddot{s}_1 \sin\beta) ,$$

звідки прискорення тіла 3 визначається виразом

$$\ddot{s}_3 = fg - \frac{\ddot{s}_1}{M}[0.5m_2(\cos\beta - f\sin\beta) - m_1(\cos\alpha + f\sin\alpha)] ,$$

де $\ddot{s}_1 = \ddot{\varphi}_A\,R$ .

Звідси виводимо, що рух тіла 3 по шорсткій поверхні з'являється можливим тільки тоді, коли кут нахилу $\alpha$ задовольняє умові $|\ddot{s}_3(\alpha)| > 0$, тобто

$$\ddot{s}_1\,|\,0.5m_2(\cos\beta - f\sin\beta) - m_1(\cos\alpha + f\sin\alpha)\,| > fMg .$$

Тіло 3 почне рухатися із стану спокою, коли на нього діє максимальна сила тертя спокою (зчеплення) $F_{зч} = f_{зч}\,N$; тому для визначення кута $\alpha_*$ із попереднього співвідношення, слід ввести коефіцієнт зчеплення $f_{зч}$ :

$$m_1(\cos\alpha_* + f_{зч}\sin\alpha_*) = \frac{f_{зч}gM}{\ddot{s}_1} + 0.5m_2(\cos\beta - f_{зч}\sin\beta)$$

і рух тіла 3 має місце при $0 \le \alpha < \alpha_*$.

Розв'язання даного тригонометричного рівняння $\alpha_* = \alpha_*(\beta)$, яке встановлює умову для кута $\alpha$, при якому тіло 3 почне рухатися, проводиться за допомогою математичного пакета Mathcad

$f := 0.11$ $m1 := 700$ $m2 := 400$ $M := 1900$ $a1 := 6$ $g := 9.81$ $d := \frac{\pi}{36}$

$b := 0.10956$ $a := 1.00603$

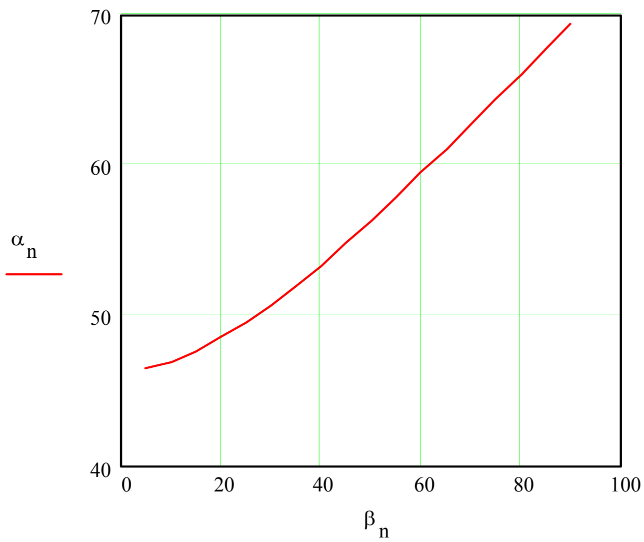
$$F(n, x) := \mathrm{root}\left[\left(\cos(x - b) - f \cdot g \cdot \frac{M}{a1 \cdot m1 \cdot a} - 0.5 \cdot \frac{m2}{m1} \cdot \cos(n \cdot d + b)\right), x\right]$$

$n := 1 .. 18$

$x_0 := 0$ $x_n := F(n, x_{n-1})$ $c_n := 2 \cdot b - x_n$ $\alpha_n := c_n \cdot \frac{180}{\pi}$ $\beta_n := 5 \cdot n$

$$G(n,x) := \cos(x-b) - f\cdot g\cdot\frac{M}{a1\cdot m1a} - 0.5\frac{m2}{m1}\cdot\cos(n\cdot d - b)$$ *

| $\beta_n =$ | $\alpha_n =$ |
|---|---|
| 5 | 46.33153 |
| 10 | 46.85716 |
| 15 | 47.55882 |
| 20 | 48.42412 |
| 25 | 49.43876 |
| 30 | 50.58723 |
| 35 | 51.85339 |
| 40 | 53.22098 |
| 45 | 54.67398 |
| 50 | 56.19692 |
| 55 | 57.77496 |
| 60 | 59.39405 |
| 65 | 61.0409 |
| 70 | 62.70298 |
| 75 | 64.36847 |
| 80 | 66.02621 |




При кутах $\alpha = 0$ і $\beta = 15^0$ рух тіла з'являється можливим. В цьому випадку прискорення тіла 3 має вигляд

$$\ddot{s}_3 = \frac{\ddot{s}_1}{M}[m_1 - 0.5m_2(\cos 15^0 - f\sin 15^0) - fg$$

або $\ddot{s}_3 = B\ddot{s}_1 - fg$, де $B = \frac{1}{M}[m_1 - 0.5m_2(\cos 15^0 - f\sin 15^0)$.

Інтегрування даного рівняння дає

$$\dot{s}_3 = B\dot{s}_1 - fgt$$

$$s_3 = Bs_1 - \frac{fgt^2}{2},$$

зважаючи, що при $t = 0$ $\dot{s}_3 = s_3 = 0$.

Чисельні розрахунки дають

$$\ddot{s}_3 = 0.6358\,\frac{м}{с^2}, \quad \dot{s}_3 = 0.6258\,t\,\frac{м}{с}, \quad s_3 = 0.3179\,t^2\ м.$$

## §3. Теорема про зміну кількості руху.

### Кількість руху точки і системи

**Кількістю руху** (імпульсом) матеріальної точки називається вектор $m\overline{V}$, що дорівнює добуткові маси точки на її швидкість . Вектор $m\overline{V}$ колінеарний з вектором $\overline{V}$ і напрямлений по дотичній до траєкторії матеріальної точки.

**Елементарним імпульсом сили** називається векторна величина $d\overline{S}$, яка дорівнює добуткові вектора сили $\overline{F}$ на елементарний проміжок часу dt

$$d\overline{S} = \overline{F}dt \ . \qquad (3.6)$$

Напрям елементарного імпульсу збігається з лінією дії сили.

**Імпульс сили** за деякий проміжок часу t дорівнює означеному інтегралу від елементарного імпульсу

$$\overline{S}(\overline{F}) = \int_0^t \overline{F}dt \ . \qquad (3.7)$$

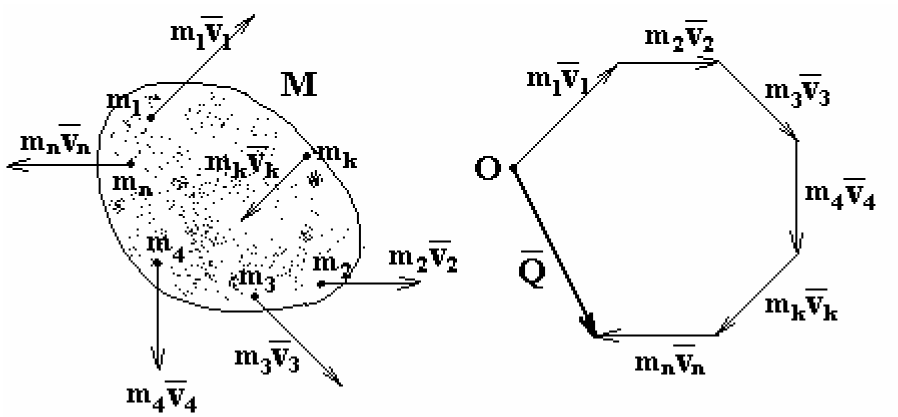
Якщо сила $\overline{F}$ стала по модулю, і по напряму ($\overline{F} = const$), то її імпульс за час t дорівнює $\overline{S} = \overline{F}t$ .

В загальному випадку модуль імпульсу може бути обчислений по його проекціям на осі координат

$$S_x = \int_0^t F_x dt, \quad S_y = \int_0^t F_y dt, \quad S_z = \int_0^t F_z dt \ . \qquad (3.8)$$

**Кількістю руху системи** називається векторна величина $\overline{Q}$, яка дорівнює геометричній сумі кількостей руху всіх точок системи (мал. 16)

$$\overline{Q} = \sum_{i=1}^{n} m_i \overline{V}_i \ . \qquad (3.9)$$




***Мал. 16***

З мал. 16 бачимо, що незалежно від величин швидкостей точок (якщо тільки ці швидкості не паралельні) вектор $\overline{Q}$ може приймати будь-які значення і може

бути рівним нулю, коли многокутник, побудований з векторів $m_i\overline{V}_i$ , зімкнеться.
Отже, по величині $\overline{Q}$ не можна повністю судити про характер руху системи.

Знайдемо формулу, з допомогою якої легше обчислювати величину $\overline{Q}$. З формули для визначення радіуса — вектора центра мас (2.4) витікає, що

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \overline{r}_i = M\,\overline{r}_C ,$$

***Беремо від обох частин похідну по часу і отримуємо***

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\overline{r}_i}{dt} = M\frac{d\overline{r}_C}{dt}, \text{ або } \quad \sum_{i=1}^{n} m_i \overline{V}_i = M\,\overline{V}_C$$

Звідси знаходимо , що

$$\overline{Q} = M\,\overline{V}_C . \qquad (3.10)$$

Кількість руху системи дорівнює добутку маси системи на швидкість її центра мас.

З формули (3.10) бачимо, що якщо тіло рухається так, що центр мас залишається нерухомим, то кількість руху тіла дорівнює нулю. Наприклад, кількість руху тіла, що обертається навколо нерухомої осі, яка проходить через його центр мас, дорівнює нулю.

Якщо рух тіла плоскопаралельний, то величина $\overline{Q}$ не буде характеризувати обертальну частину руху навколо центра мас. Наприклад, для колеса, що котиться $\overline{Q} = M\,\overline{V}_C$ незалежно від того , як обертається колесо навколо центра мас **C**. $\overline{Q}$ характеризує тільки поступальну частину руху системи разом з центром мас.

## Теорема про зміну кількості руху точки

Похідна по часу від кількості руху точки дорівнює рівнодійній всіх сил, прикладених до точки.

$$\boxed{\frac{d}{dt}(m\overline{V}) = \overline{\Phi}} \qquad .$$

(3.11)

Дійсно, основний закон динаміки точки має вигляд $m\overline{a} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i = \overline{\Phi}$ .

Так як маса точки стала, а її прискорення $\overline{a} = \dfrac{d\overline{V}}{dt}$ , то попереднє рівняння можна записати таким чином

$$\frac{d(m\overline{V})}{dt} = \overline{\Phi} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i \, .$$

Рівняння (3.11) – це вираз теореми про зміну кількості руху точки в диференціальній формі.

Нехай точка маси **m**, яка рухається під дією сили $\overline{\Phi}$, має в момент часу $t = 0$ швидкість $\vec{\mathbf{V}}_0$, а в момент часу **t** -швидкість $\vec{\mathbf{V}}$. Помножимо обидві частини рівності (3.11) на dt і беремо від них означені інтеграли. При цьому ліворуч, де інтегрується швидкість, границями інтеграла будуть відповідні значення $\vec{\mathbf{V}}_0$ и $\vec{\mathbf{V}}$, а праворуч, де інтегрування іде по часу, границями будуть 0 і t.

$$\int_{\overline{V}_0}^{\overline{V}} m\,d\overline{V} = \int_0^t \overline{\Phi}\,dt = \int_0^t \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i\,dt = \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \overline{F}_i\,dt \, .$$

Інтеграли правої частини - це імпульси рівнодійної або діючих сил. Остаточно буде

$$m\overline{V} - m\overline{V}_0 = \overline{S}(\overline{\Phi}) = \sum_{i=1}^{n} \overline{S}_i \, . \tag{3.12}$$

Рівняння (3.12) — вираз <u>теореми про зміну кількості руху точки в інтегральній формі:</u>
приріст вектора кількості руху точки за певний час дорівнює імпульсові рівнодійної прикладених до точки сил за цей самий час.

Проектуючи ліву і праву частини векторної рівності (3.12) на координатні осі, дістанемо

$$\begin{aligned} mV_x - mV_{ox} &= S_x \\ mV_y - mV_{oy} &= S_y \\ mV_z - mV_{oz} &= S_z \end{aligned} \tag{3.13}$$

Нехай $\overline{\Phi} = 0$, тоді з (3.11) $\dfrac{d(m\overline{V})}{dt} = 0$, звідки $m\overline{V} = const$.

<u>Висновок.</u> Якщо рівнодійна прикладених до точки сил дорівнює нулю, то кількість руху не змінюється у весь часу руху.

## Теорема про зміну кількості руху системи.

Розглянемо систему, яка складається з **n** матеріальних точок. Диференціальні рівняння руху цієї системи мають вигляд (3.1). Додаємо їх почленно і одержимо

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \overline{a}_i = \sum_{i-1}^{n} \overline{F}_i' + \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i'' \, .$$

Остання сума згідно з властивістю внутрішніх сил дорівнює нулю

( $\sum_{i=1}^{n}\overline{F}_i'' = \overline{R}'' = 0$ ). Крім того $\sum_{i=1}^{n} m_i \overline{a}_i = \sum_{i-1}^{n} m_i \frac{d\overline{V}_i}{dt} = \frac{d}{dt}(\sum_{i=1}^{n} m_i \overline{V}_i) = \frac{d\overline{Q}}{dt}$ .

Остаточно знаходимо

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\overline{F}_i' = \overline{R}'. \qquad \textbf{( II )}$$

Рівняння ( **II** ) — теорема про зміну кількості руху системи в диференціальній формі:

похідна по часу від кількості руху системи дорівнює головному векторові зовнішніх сил, що діють на точки системи.

В проекціях на осі координат маємо

$$\frac{dQ_x}{dt} = R_x', \quad \frac{dQ_y}{dt} = R_y', \quad \frac{dQ_z}{dt} = R_z'. \qquad (3.14)$$

Знайдемо інший вираз теореми. Нехай в момент t = 0 кількість руху системи дорівнює $\overline{Q}_0$, а в момент t дорівнює $\overline{Q}$. Тоді, помножуючи обидві частини рівності ( II ) на d t , після інтегрування одержимо

$$\int_{\overline{Q}_0}^{\overline{Q}} d\overline{Q} = \int_0^t \overline{R}'dt = \int_0^t \sum_{i=1}^{n}\overline{F}_i'dt = \sum_{i=1}^{n}\int_0^t \overline{F}_i'dt = \sum_{i=1}^{n}\overline{S}_i' .$$

Остаточно

$$\overline{Q} - \overline{Q}_0 = \sum_{i=1}^{n}\overline{S}_i' . \qquad (3.15)$$

Рівняння (3.15) — вираз теореми про зміну кількості руху системи в інтегральній формі:

приріст кількості руху системи за даний проміжок часу дорівнює сумі імпульсів усіх зовнішніх сил системи за той самий проміжок часу.

В проекціях на осі координат маємо

$$Q_x - Q_{ox} = \sum_{i=1}^{n} S_{ix}'$$

$$Q_y - Q_{oy} = \sum_{i=1}^{n} S_{iy}'$$

(3.16)

$$Q_z - Q_{oz} = \sum_{i=1}^{n} S_{iz}' .$$

Висновки.

$1^0$. Внутрішні сили системи не змінюють її кількості руху.

$2^0$. Закон збереження кількості руху системи.

1. Нехай головний вектор зовнішніх сил дорівнює нулеві

$\overline{R}' = \sum_{i=1}^{n}\overline{F}_i' = 0$ , тоді з ( II ) витікає, що $\frac{d\overline{Q}}{dt} = 0$. Звідси $\overline{Q} = \text{const}$.

Таким чином, якщо головний вектор зовнішніх сил дорівнює нулеві, то вектор кількості руху системи сталий за величиною і напрямом.

$$\boxed{\bar{Q} = \text{const}}\ . \qquad (3.17)$$

2. Нехай зовнішні сили, які діють на систему такі, що проекція головного вектора на яку-небудь вісь (наприклад вісь **x**) дорівнює нулю $R'_x = \sum_{i=1}^{n} F'_{ix} = 0$.

***Тоді з першого рівняння (3.14) витікає, що*** $\frac{dQ_x}{dt} = 0$***, звідки*** $Q_x = \text{const}$***.***

Якщо проекція головного вектора всіх зовнішніх сил на яку-небудь вісь дорівнює нулю, то проекція кількості руху на цю вісь є сталою величиною.

$$\boxed{Q_x = \text{const}}\ . \qquad (3.18)$$

Розглянемо деякі приклади застосування теореми про зміну кількості руху системи.

$1^0$. Застосуємо закон збереження кількості руху для пояснення реактивного руху.

1). Явище відкочування ствола вогнепальної зброї. Розглянемо “віддачу” рушниці при вибуху. Порохові гази, які викидають своїм натиском кулю в один бік, в цей самий час відштовхують рушницю в протилежний бік, що породжує відому “віддачу”. До вибуху система рушниця-куля знаходиться в спокої. Кількість руху цієї системи дорівнює нулю, причому система зовнішніх сил зрівноважена. Якщо **m** - маса кулі, **v** – її швидкість у час вильоту із ствола, **M** – маса рушниці, тоді швидкість рушниці **u** - при “віддачі” визначається із закону збереження кількості руху

$$Q_x = mv + Mu = \text{const} = 0\ ,$$

тут вісь x напрямлена по руху кулі. Отже $u = -\frac{m}{M} v$, ( * )

Тобто рушниця рухається в бік, протилежний руху кулі.

Аналогічне явище виникає при стрільби з гармати. Старовинні гармати при вибуху відкачувались назад. В сучасних гарматах може ковзати назад тільки ствол, лафет же залишається нерухомим і завдяки противідкочуваним пристроям ствол плавно вертається на колишнє місце.

2). Принцип дії повітряного (гребного) гвинта. Повітряний гвинт літака надає рух масі повітря в напряму до хвостової частини. Якщо розглядати повітряний потік і літак як єдину механічну систему, то сили дії гвинта на повітряне середовище не можуть змінити спільної кількості руху системи. Тому повітряний потік, утворений гвинтом, приводить до руху літака вперед з відповідною швидкістю, яка забезпечує рівність нулю спільної кількості руху системи, оскільки до початку руху вона була рівною нулю.

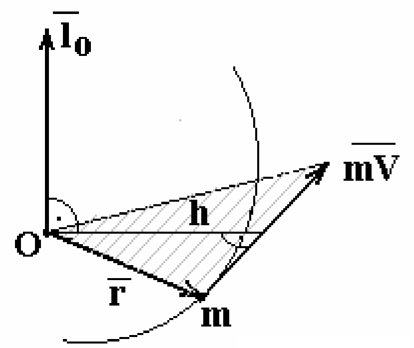
Швидкість літака можливо збільшити відповідно формулі (*) шляхом збільшення маси повітря, яка відкидається гвинтом. Цим пояснюється тенденція до створення багатомоторних літаків. Аналогічно відбувається дія гребного гвинта судна.

## §4. Теорема про зміну моменту кількості руху

Кінетичний момент точки і системи

Моментом кількості руху матеріальної точки відносно полюса **O** є вектор, що дорівнює векторному добуткові радіуса — вектора рухомої точки відносно полюса **O** на кількість руху цієї точки

$$\bar{l}_o = \bar{m}_0(m\bar{V}) = \bar{r} \times m\bar{V}\,. \qquad (3.19)$$



Мал. 17

При цьому вектор $\bar{l}_0$ напрямлений перпендикулярно площині (Мал. 17), яка проходить через вектор $m\bar{V}$ і полюс **O**, а величина

$$\left|\bar{l}_0\right| = rmV\sin\alpha = rmV\sin(180^0 - \alpha) = mV\,h \quad (3.20)$$

Це поняття аналогічно поняттю моменту сили відносно полюса.

Момент кількості руху відносно осі — це проекція моменту кількості руху відносно полюса **O** на вісь системи координат з початком в точці **O**

$$l_x = \Pi p_x \bar{l}_0 \quad (\mathbf{O} \in \mathbf{x})\,. \qquad (3.21)$$

Це аналог поняття моменту сили відносно осі.

Для механічної системи кінетичним моментом $\bar{L}_0$ (або головним моментом кількості руху системи відносно будь-якого полюса **O**) називають векторну суму моментів кількостей руху точок системи відносно цього ж полюса **O**

$$\bar{L}_0 = \sum_{i=1}^{n} \bar{m}_0(m_i\bar{V}_i) = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times m_i\bar{V}_i\,. \qquad (3.22)$$

Тут $\bar{r}_i$ — радіус-вектор **i**-ої точки системи відносно полюса O,

$\bar{V}_i$ — швидкість **i**-ої точки.

Якщо спроектувати (3.22) на прямокутні декартові осі координат, то одержимо проекції кінетичного моменту на ці осі або кінетичні моменти відносно осей координат

$$L_x = \Pi p_x \bar{L}_0 = \Pi p_x \sum_{i=1}^{n} \bar{m}_0(m_i\bar{V}_i) = \sum_{i=1}^{n} \Pi p_x \bar{m}_0(m_i\bar{V}_i) = \sum_{i=1}^{n} m_x(m_i\bar{V}_i)\,. \qquad (3.23)$$

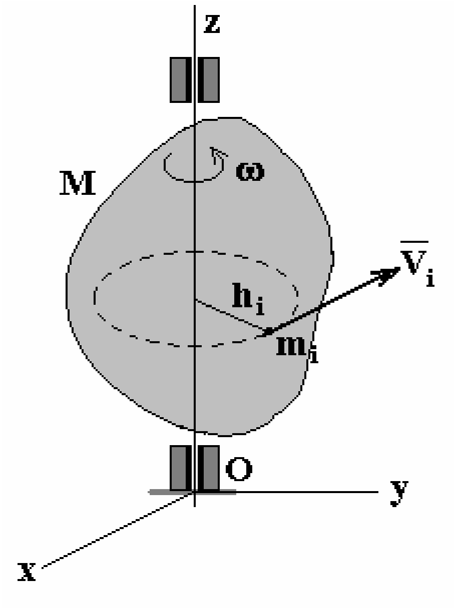
Якщо система матеріальних точок рухається поступально, то $\overline{V}_i = \overline{V}_C$ і, отже,

$$\overline{L}_0 = \sum_{i=1}^{n} \overline{r}_i \times m_i \overline{V}_i = (\sum_{i=1}^{n} m_i \overline{r}_i) \times \overline{V}_C = M\,\overline{r}_C \times \overline{V}_C = \overline{r}_C \times M\overline{V}_C = \overline{r}_C \times \overline{Q}\,.$$

Ми використували властивість сполучності векторного добутку відносно скалярного множника і формулу для визначення радіуса — вектора центра мас (2.4). Таким чином, кінетичний момент системи відносно полюса при поступальному русі дорівнює моменту кількості руху системи відносно цього полюса, при умові, що кількість руху системи прикладена в центрі мас.

### Кінетичний момент твердого тіла відносно осі обертання

Нехай тверде тіло обертається навколо нерухомої осі **Oz** з кутовою швидкістю **ω** (Мал. 18). Виберемо окрему точку $m_i$ в твердому тілі і обчислимо кінетичний момент твердого тіла відносно осі обертання. Згідно з означенням кінетичного моменту навколо осі маємо




Мал. 18

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} m_z(m_i \overline{V}_i)$$

Але при обертанні тіла навколо осі

$$V_i = h_i \omega\,,$$

причому кількість руху точки $m_i$ $m_i\overline{V}_i$ перпендикулярна до відрізка $h_i$ і знаходиться в площині, яка перпендикулярна до осі обертання $Oz$. Отже, момент кількості руху відносно осі **Oz** для однієї точки

$$m_z(m_i\overline{V}_i) = h_i m_i V_i = m_i h_i^2 \omega\,.$$

Для всього тіла

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} m_i h_i^2 \omega = \omega \sum_{i=1}^{n} m_i h_i^2 = \omega\, I_z$$

тобто

$$L_z = I_z \omega\,. \qquad (3.24)$$

Кінетичний момент тіла відносно осі обертання при обертальному русі дорівнює добуткові кутової швидкості тіла на його момент інерції відносно осі обертання.

## Теорема про зміну моменту кількості руху точки

Похідна по часу від моменту кількості руху матеріальної точки відносно полюса або осі дорівнює моментові рівнодійної всіх прикладених до точки сил відносно того самого полюса або осі.

$$\frac{d\bar{l}_0}{dt} = \bar{m}_0(\bar{\Phi}) \ . \tag{3.25}$$

Доведення. Продиференцюємо по часу вираз (3.23)

$$\frac{d\bar{l}_0}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{r} \times m\bar{V}) = \frac{d\bar{r}}{dt} \times m\bar{V} + \bar{r} \times \frac{d(m\bar{V})}{dt} = \bar{V} \times m\bar{V} + \bar{r} \times m\bar{a} \ .$$

Але $\bar{V} \times m\bar{V} = 0$ як векторний добуток двох паралельних векторів , а

$$m\bar{a} = \bar{\Phi} = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i \ .$$

Отже ,
$$\frac{d\bar{l}_0}{dt} = \bar{r} \times \bar{\Phi} = \bar{m}_0(\bar{\Phi}) \ .$$

Якщо спроектувати одержаний вираз на вісь **x,** яка проходить через полюс **O,** то з допомогою (3.25) одержимо

$$Пр_x \frac{d\bar{l}_0}{dt} = Пр_x \bar{m}_0(\bar{\Phi})$$

$$Пр_x \frac{d\bar{l}_0}{dt} = \frac{d}{dt}(Пр_x \bar{l}_0) = \frac{d\bar{l}_x}{dt}$$

$$Пр_x \bar{m}_0(\bar{\Phi}) = \bar{m}_x(\bar{\Phi})$$

Отже,

$$\frac{dl_x}{dt} = m_x(\bar{\Phi}), \quad \frac{dl_y}{dt} = m_y(\bar{\Phi}), \quad \frac{dl_z}{dt} = m_z(\bar{\Phi}) \tag{3.26}$$

<u>Висновок</u>. Закон збереження моменту кількості руху точки. З (3.25) витікає, що якщо $\bar{m}_0(\bar{\Phi}) = 0$ , то $\bar{l}_0 = const$, а з (3.26) витікає, що коли $m_x(\bar{\Phi}) = 0$, то $l_x = const$.

Якщо момент рівнодійної всіх прикладених до точки сил відносно полюса або осі дорівнює нулю , то момент кількості руху відносно полюса або осі не змінюється у весь час руху.

## Теорема про зміну кінетичного моменту.

Похідна по часу від кінетичного моменту відносно якогось нерухомого полюса дорівнює головному моментові всіх зовнішніх сил системи відносно того ж полюса.

$$\frac{d\bar{L}_0}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \bar{m}_0(\bar{F}_i') = \bar{M}_0' \ . \tag{III}$$

Доведення. Теорема про зміну моменту кількості руху має місце для кожної точки системи. Отже, якщо розглянути точку системи з масою $\mathbf{m}_i$ , яка має швидкість $\overline{V}_i$ , то для неї буде

$$\frac{d}{dt}[\overline{m}_0(m_i\overline{V}_i)] = \overline{m}_0(\overline{F}_i') + \overline{m}_0(\overline{F}_i'') ,$$

де $\overline{F}_i'$ і $\overline{F}_i''$ — головні вектори зовнішніх і внутрішніх сил, які діють на дану точку.

Складаємо такі рівняння для всіх точок системи і, додаючи почленно, одержимо

$$\frac{d}{dt}[\sum_{i=1}^{n}\overline{m}_0(m_i\overline{V}_i))] = \sum_{i=1}^{n}\overline{m}_0(\overline{F}_i') + \sum_{i=1}^{n}\overline{m}_0(\overline{F}_i'') = \overline{M}_0' + \overline{M}_0'' .$$

Але $\overline{M}_0'' = 0$ згідно з властивістю внутрішніх сил. Отже, враховуючи рівність (3.22), маємо

$$\frac{d\overline{L}_0}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\overline{m}_0(\overline{F}_i') = \overline{M}_0' .$$

Одержане рівняння виражає закон про зміну кінетичного моменту системи.

Проектуючи обидві частини рівності ( ІІІ ) на осі системи координат **Oxyz**, одержимо

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x^{'}, \quad \frac{dL_y}{dt} = M_y^{'}, \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z^{'} \quad . \qquad (3.27)$$

Рівняння (3.27) — це вираз теореми про зміну кінетичного моменту відносно будь-якої нерухомої осі.

Цією теоремою широко користуються при вивченні обертального руху тіла, а також в теорії гіроскопа і в теорії удару. В кінематиці показано, що рух твердого тіла в загальному випадку складається з поступального руху разом з деяким полюсом і обертального руху навколо цього полюса. Якщо як полюс вибрати центр мас, то поступальна частина руху може бути вивчена з допомогою теореми про рух центра мас, а обертальна — з допомогою теореми про зміну кінетичного моменту. Це показує важливість теореми для вивчення руху вільного тіла (літак, ракета, снаряд) і для вивчення плоскопаралельного руху.

Практична цінність теореми про зміну кінетичного моменту складається в тому, що вона дозволяє при вивченні обертального руху системи виключати з розгляду всі наперед невідомі внутрішні сили.

*Висновки.* ***З а к о н  з б е р е ж е н н я  к і н е т и ч н о г о  м о м е н т у.***

1. Нехай головний момент відносно полюса **O** всіх зовнішніх сил, які діють на систему, дорівнює нулеві $\overline{M}'_0 = \sum_{i=1}^{n} \overline{m}_0(\overline{F}'_i) = 0$

Тоді з рівняння ( ІІІ ) витікає, що при цьому $\overline{L}_0 = \text{const}$. (3.28)

Таким чином, якщо головний момент відносно даного полюса всіх прикладених до системи зовнішніх сил дорівнює нулю, то кінетичний момент системи відносно цього полюса буде чисельно і за напрямом сталим .

2. Нехай зовнішні сили, які діють на систему, такі, що їх головний вектор відносно деякої осі **Oz** дорівнює нулю

$$M'_z = \sum_{i=1}^{n} m_z(\overline{F}'_i) = 0 .$$

Тоді з рівняння (3.27) витікає, що $L_z = \text{const}$.

Отже, якщо головний момент всіх діючих на систему зовнішніх сил відносно будь-якої осі дорівнює нулю, то кінетичний момент системи відносно цієї осі буде сталою величиною.

Розглянемо випадок обертової системи.

Нехай система обертається навколо нерухомої осі **Oz** . Тоді, згідно з формулою (3.24) , $L_z = I_z\omega$. Якщо в цьому випадку $M'_z = 0$, то $I_z\omega = \text{const}$ .

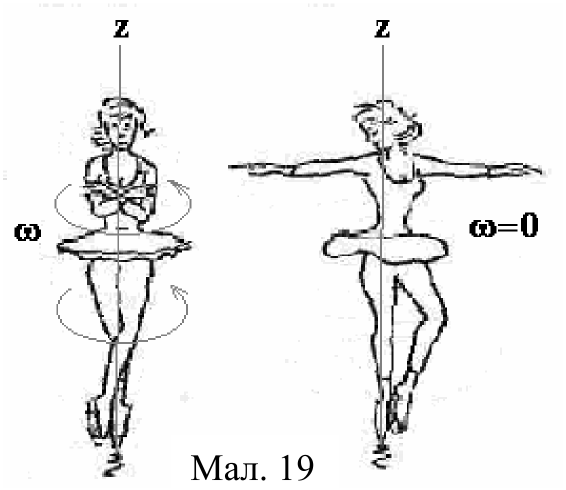
Звідки :

1. Якщо система незмінювана (абсолютно тверде тіло), то $I_z = \text{const}$ і , отже, $\omega = \text{const}$ , тобто тверде тіло , яке закріплене на осі, обертається в цьому випадку зі сталою кутовою швідкістю.
2. Якщо система змінювана, то під дією внутрішніх (або зовнішніх) сил окремі її точки можуть віддалятися від осі, що викликає збільшення $I_z$, або наближатися до осі, що зводить до зменшення $I_z$. Але тому що $I_z\omega = \text{const}$ , то при збільшення моменту інерції кутова швидкість системи буде зменшуватися, а при зменшенні моменту інерції — збільшуватися. Таким чином, дією внутрішніх сил можна змінити кутову швидкість обертання системи, тому що сталість $L_z$ не означає взагалі сталість $\omega$ .

Розглянемо деякі приклади.

1. О б е р т а н н я  ф і г у р и с т а. Якщо фігуристу необхідно зробити швидке обертання, він створює початкову кутову швидкість $\omega_0$ і притискає руки до тулуба. При цьому він буде швидко обертатися навколо вертикальної осі. Для того щоб припинити це обертання, він розводить руки у боки і обертання припинається (Мал. 19). У даному випадку для фігуриста, якій обертається навколо вертикальної осі **z**, головний вектор зовнішніх сил дорівнює нулю ( $M'_z = 0$ ), і, отже, за законом збереження кінетичного моменту

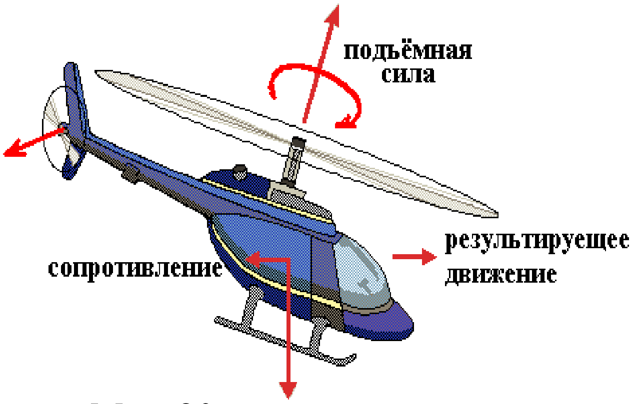
$$I_z\omega = I_{z0}\omega_0 = \mathrm{const} \quad .$$



Мал. 19

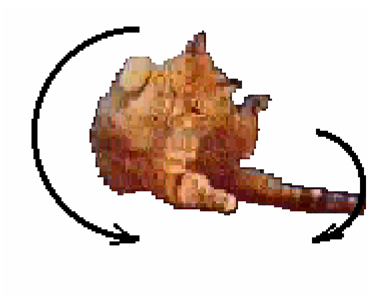
Якщо людина притискує руки до тулуба, то величина $I_z$ зменшується, а кутова швидкість зростає, при розведенні рук в боки, навпаки, $I_z$ збільшується, а $\omega$ - зменшується. Такий спосіб збільшення (зменшення) кутової швидкості обертання широко застосовується в балеті, акробатиці та ін., а також при розкачуванні гойдалки. Коли гойдалка знаходиться в крайньому верхньому положенні $\omega = 0$, людина присідає, і при проходженні через вертикальне положення людина випрямляється, зменшується момент інерції. При цьому кутова швидкість гойдалки збільшується.

2. Р е а к т и в н и й  м о м е н т  п о в і т р я н о г о  г в и н т а. Підйомний повітряний гвинт вертольота надає обертальний рух масі повітря. Розглядаючи рух повітря і вертольота як єдину механічну систему, сили дії гвинта на повітряну масу, як внутрішні, не можуть змінити загальний кінетичний момент системи. Сумарний момент кількості руху маси повітря і вертольота повинен залишатися рівним нулю, так як система з початку була нерухома. Тому корпус вертольота почне обертатися в бік протилежний напряму обертання підйомного гвинта. При цьому, обертальний момент який діє на вертоліт, називається реактивним моментом. Щоб запобігти реактивному обертанню, у вертольоті встановлюють відповідальний рульовий гвинт у хвостовій частині.



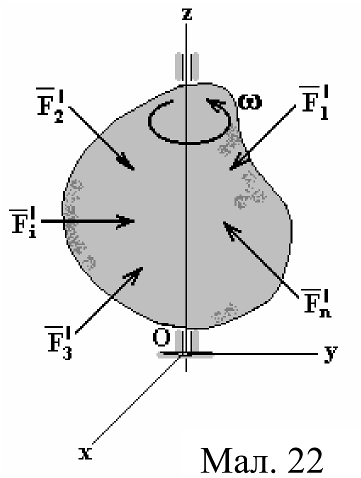
Мал. 20

Для управління орієнтацією тіла тварини при вільному падінні широко застосовують принцип реактивного обертання. Наприклад, при падінні кішка для того, щоб привести тіло в вертикальне положення повертає свій хвіст в відповідний бік, при цьому тіло обертається в протилежному напрямку (Мал. 21). Таким чином відбувається регулювання вільного вертикального падіння, і кішка приземляється на лапи.


Мал. 21

## Диференціальне рівняння обертання твердого тіла навколо нерухомої осі

Розглядається обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі Oz під дією системи зовнішніх сил (Мал. 22). Диференціальне рівняння обертання твердого тіла навколо осі **Oz** одержимо з теореми про зміну кінетичного моменту відносно осі (3.27)




Мал. 22

Маємо $\dfrac{dL_z}{dt} = M_z' = \sum\limits_{i=1}^{n} m_z(\overline{F}_i')$.

Для випадку обертання твердого тіла навколо осі кінетичний момент тіла відносно осі дорівнює $L_z = I_z\omega$ , де $I_z$ - сталий для твердого тіла момент інерції відносно осі обертання, $\omega$ – кутова швидкість.

Враховуючи це, одержимо

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt}(I_z\omega) = I_z\frac{d\omega}{dt} = M_z' = \sum_{i=1}^{n} m_z(\overline{F}_i') \cdot$$

Якщо введемо кут обертання $\varphi$ , то, враховуючи, що $\dot{\omega} = \ddot{\varphi}$, маємо

$$I_z\ddot{\varphi} = M_z' \ . \qquad (3.29)$$

Це диференціальне рівняння обертання твердого тіла навколо нерухомої осі. Воно аналогічно диференціальному рівнянню поступального руху твердого тіла в проекції на яку-небудь вісь, наприклад на вісь **Oz**

$$M\ddot{z}_C = R_z' = \sum_{i=1}^{n} F_{iz}' .$$

В диференціальне рівняння обертання тіла замість координати $\mathbf{z_C}$ входить кут обертання $\varphi$ , замість маси тіла **M** момент інерції відносно осі обертання $I_z$ , замість суми проекцій зовнішніх сил на вісь **Oz** входить головний момент зовнішніх сил відносно осі обертання **Oz** .

Реакції підшипників осі обертання є зовнішніми силами, але їх момент відносно осі обертання дорівнює нулю, тому що вони перетинають вісь, якщо нехтувати силами тертя.

В частинному випадку, коли головний момент зовнішніх сил

$$M_z' = \sum_{i=1}^{n} m_z(\overline{F}_i') = 0 \text{, то } \frac{d\omega}{dt} = \ddot{\varphi} \quad \text{і} \quad \omega = \text{const} .$$

Це випадок рівномірного обертання тіла за інерцію, коли не діють моменти зовнішніх сил.

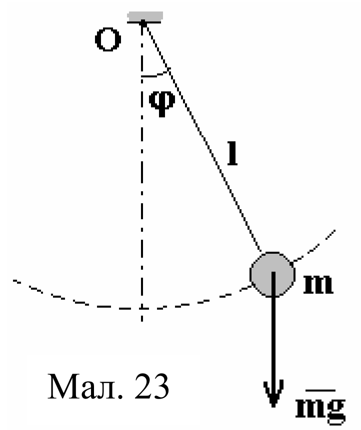
Диференціальне рівняння обертального руху твердого тіла дозволяє розв’язувати дві основні задачі: 1) по заданому обертанню тіла визначити головний момент зовнішніх сил; 2) по заданому головному моменту зовнішніх сил і початковим умовам знайти обертання тіла.

При розв'язуванні другої задачі для знаходження кута обертання, як функції часу, треба інтегрувати диференціальне рівняння обертального руху. Методи його інтегрування аналогічні раніше розглядуваним методам інтегрування диференціального рівняння прямолінійного руху точки.

Як приклад застосування диференціального рівняння обертального руху тіла розглянемо коливання математичного і фізичного маятників.

$1^0$. М а л і  к о л и в а н н я  м а т е м а т и ч н о г о  м а я т н и к а.

Математичним маятником називається матеріальна точка, яка підвішена за допомогою невагомої нерозтягненої нитки до неру-хомої осі **O** і робить розкачування в вертикальній площині під дією сили ваги. Розглянемо розрахунок закону коливань такого маятника, довжина нитки якого дорівнює **l**. У початковий момент маятникові, нитка якого займає прямовисне положення, була надана за допомогою поштовху початкова кутова швидкість $\boldsymbol{\omega_0}$ .



Мал. 23

Для розв'язання задачі застосовуємо диференціальне рівняння обертання твердого тіла навколо нерухомої осі (3.29).

$$I_O\ddot{\varphi} = M'_O$$

Для математичного маятника $I_O = m\,l^2$ , $M'_O = -\,m\,g\,l\sin\varphi$ .

Підставляючи дані значення в диференціальне рівняння обертання, одержимо

$$ml^2\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi\cdot l \text{ , або } \quad \ddot{\varphi} + k^2\sin\varphi = 0 \quad \left( k = \sqrt{\frac{g}{l}} \right) .$$

Отже, одержано нелінійне диференціальне рівняння коливань маятника, яке не може бути розв'язане аналітично в класі звичайних (елементарних) функцій. Для спрощення розв'язування цього рівняння обмежуємось розгляданням малих коливань, зважаючи, що кут відхилення маятника $\varphi$ від положення рівноваги $\varphi_0 = 0$ є малим ( $\varphi < 1$ рад). У цьому випадку можливо приблизно вважати, що $\sin\varphi \approx \varphi$ . Тоді рівняння малих коливань є лінійним диференціальним рівняння

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0 \ , \qquad (3.30)$$

загальний розв'язок якого, зважаючи, що характеристичні числа є уявними $\lambda_{1,2} = \pm\, i\, k$, має вигляд

$$\varphi(t) = C_1\cos(kt) + C_2\sin(kt),$$

а кутова швидкість $\dot{\varphi}(t) = -C_1 k\sin(kt) + C_2 k\cos(kt)$.

Для визначення сталих інтегрування $C_1$ і $C_2$ скористуємося початковими умовами руху маятника: при $t = 0$ $\varphi_0 = 0$ , $\dot{\varphi}_0 = \omega_0$. Звідки

$$C_1 = 0 \ , \ C_2 = \omega_0 / k .$$

Остаточно рівняння малих коливань математичного маятника:

$$\varphi(t) = \frac{\omega_0}{k}\sin(kt) \quad , \tag{3.31}$$

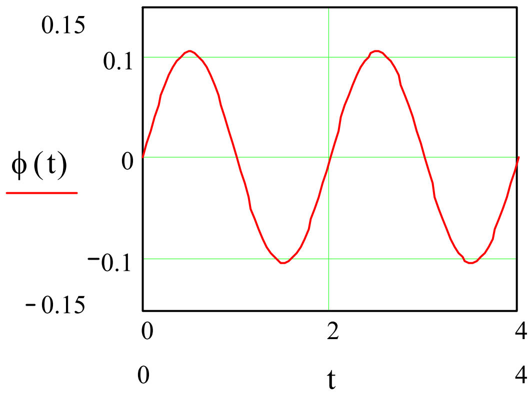
а період коливань
$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \ . \tag{3.32}$$

Отже, малі коливання математичного маятника виявляються гармонічними. Залежність (3.32) широко застосовується в геологічній розвідці для визначення покладів корисних копалин по аномаліям прискорення вільного падіння **g** в даному географічному місці.

Для зображення графіка коливань застосуємо математичний пакет Mathcad, задамо чисельні дані: $l = 1$ м ; $\omega_0 / k = \pi / 30$.

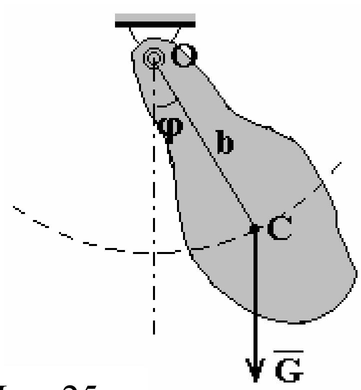
Вихідні дані: $l := 1$ $\quad k := \sqrt{\frac{9.8}{l}}$ $\quad \omega_0 := k\cdot\frac{\pi}{30}$ $\quad C_2 := \frac{\omega_0}{k}$

$T := 2\cdot\frac{\pi}{k}$ $\quad t := 0, 2\cdot\frac{T}{100} .. 2\cdot T$ $\quad \phi(t) := C_2\cdot\sin(k\cdot t)$




Мал. 24

$2^0$. М а л і  к о л и в а н н я  ф і з и ч н о г о  м а я т н и к а. Фізичним маятником називають тверде тіло, яке може коливатися навколо горизонтальної осі під дією сили ваги. Зображаємо переріз маятника площиною, яка перпендикулярна до осі підвісу і проходить через центр мас маятника C ( Мал. 25) . Введемо позначення: **φ** - кут відхилення маятника від вертикалі; **G** - вага маятника; b – довжина маятника (відстань **OC** від центра мас до осі підвісу); $I_O$ – момент інерції маятника відносно осі обертання.




Мал. 25

Для визначення закону малих коливань маятника скористуємося диференціальним рівнянням обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі (3.29) $I_O\ddot{\varphi} = M'_O$ . Для фізичного маятника $M'_O = -Gb\sin\varphi$ , тому рівняння (3.29) має вигляд

$$\ddot{\varphi} + k_\phi^2 \sin\varphi = 0, \quad \text{де} \quad k_\phi^2 = \frac{Gb}{I_O} \quad .$$

Для малих коливань маятника $\sin\varphi \approx \varphi$ . Нехай у початковий момент маятник займає прямовисне положення, і йому надана за допомогою поштовху початкова кутова швидкість $\boldsymbol{\omega_0}$ . Тоді закон коливань маятника визначається рівнянням (3.30), а закон руху - (3.31), причому період коливань дорівнює

$$T_\phi = \frac{2\pi}{k_\phi} = 2\pi\sqrt{\frac{I_O}{Gb}} \tag{3.33}$$

Отже, малі коливання фізичного маятника виявляються гармонічними. Залежність (3.33) широко застосовується в інженерній практиці для визначення моментів інерції тіл $I_O$ складної форми.

$3^0$. Н е л і н і й н і   к о л и в а н н я   м а я т н и к а. Розглянемо нелінійні коливання маятника, коли кут його відхилення від вертикалі не є малим. Диференціальне рівняння таких коливань визначається трансцендентним рівнянням $\ddot{\varphi} + k^2\sin\varphi = 0$, розв’язання даного рівняння визначимо чисельним методом за допомогою системи Mathcad.

Розв'язання рівняння $\quad \phi'' + k^2\sin\phi = 0$

Вихідні дані: $\quad \omega_1 := k\cdot\frac{\pi}{2}$ * $\quad C_2 := k\cdot\frac{\pi}{2}$ *

Вектор початкових умов: $\quad \phi := \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_1 \end{pmatrix}$ *

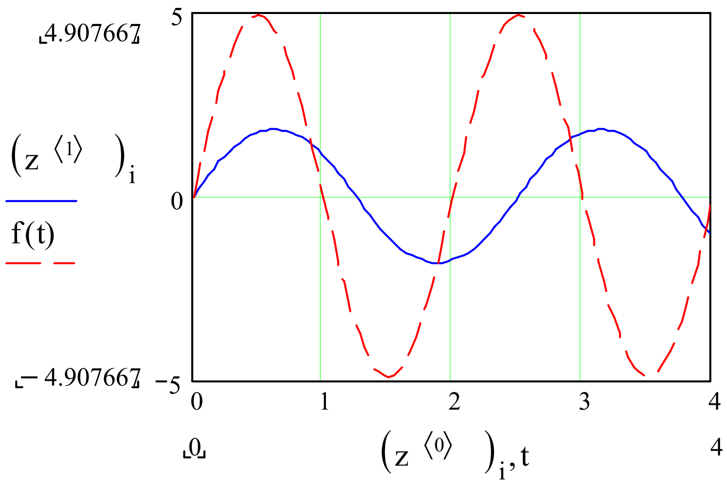
Вектор похідніх: $\quad D(t,\phi) := \begin{pmatrix} \phi_1 \\ -k^2\cdot\sin(\phi_0) \end{pmatrix}$

Розв'язання рівняння чисельним методом

$z := \text{Bulstoer}(\phi, 0, 2\cdot T, 100, D) \qquad k = 3.130495$

$i := 0 .. \text{rows}(z) - 1$

$f(t) := \phi(t) \qquad t := 0, 2\cdot\frac{T}{100} .. 2\cdot T \qquad \phi(t) := C_2\cdot\sin(k\cdot t)$




Мал. 26

Із сполученого графіка 26 бачимо, що похибка наближеного розв'язання зростає при збільшенні кута відхилення маятника $\varphi$ , тобто аналітичне розв'язання дійсно тільки при малих кутах відхилення, крім того період коливань також відрізняються. Для лінійних коливань $T = 2{,}0071$, а нелінійних - $T = 2{,}5289$.

## §5. Теорема про зміну кінетичної енергії.

Попередні поняття.

**<u>Кінетичною енергією матеріальної точки</u>** називається половина добутку маси точки на квадрат її швидкості

$$\frac{mV^2}{2} \tag{3.34}$$

**<u>Кінетичною енергією механічної системи</u>** $T$ називається сума кінетичних енергій всіх точок системи.

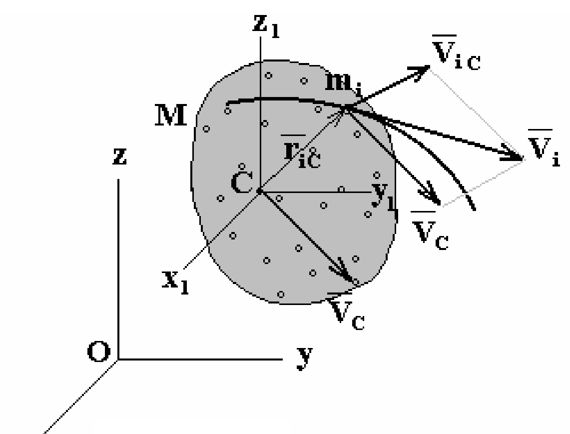
$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i V_i^2}{2} \,. \tag{3.35}$$

Розглянемо обчислення кінетичної енергії системи.

**Теорема Кеніга.** Кінетична енергія механічної системи в абсолютному русі дорівнює сумі кінетичної енергії центра мас системи в припущенні, що в ньому зосереджена вся маса системи, і кінетичної енергії системи відносно центра мас.

$$\boxed{T = \frac{MV_c^2}{2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i V_{ic}^2}{2}} \qquad (3.36)$$

**Доведення.** Виберемо нерухому систему відліку $Oxyz$ (Мал. 26). Рухому систему відліку $Cx_1y_1z_1$ виберемо таким чином, щоб початок координат збігався з центром мас системи $C$, а її осі $Cx_1, Cy_1, Cz_1$ були паралельними нерухомим осям $Oxyz$ і рухалися разом з центром мас $C$ поступально. Тоді абсолютний рух системи точок можна розглядати як сукупність поступального руху системи разом з центром мас (переносний рух) і руху системи відносно центра мас.



Мал. 26

Абсолютний рух $\overline{V}_i$ будь-якої точки $m_i$ механічної системи визначається як геометрична сума швидкості центра мас і швидкості в її русі відносно центра мас. Згідно з теоремою про додавання швидкостей

$$\overline{V}_i = \overline{V}_{i\text{абс..}} = \overline{V}_{i\text{пер.}} + \overline{V}_{i\text{відн.}} = \overline{V}_c + \overline{V}_{ic}$$

Перетворюємо вираз кінетичної енергії системи (3.35), враховуючи попередню формулу

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \overline{V}^2}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i (\overline{V}_c + \overline{V}_{ic})^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i V_c^{\,2} + \sum_{i=1}^{n} m_i \overline{V}_c \overline{V}_{ic} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i V_{ic}^{\,2} =$$

$$= \frac{1}{2} V_c^2 \sum_{i=1}^{n} m_i + \overline{V}_c \sum_{i=1}^{n} m_i \overline{V}_{ic} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i V_{ic}^{\,2} = \frac{MV_c^2}{2} + \overline{V}_c \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\overline{r}_i}{dt} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i V_{ic}^{\,2} =$$

$$= \frac{MV_c^2}{2} + \overline{V}_c \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i \overline{r}_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i V_{ic}^{\,2}$$

Ми враховували, що $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$ - маса системи. Радіус-вектор центра мас

$\overline{r}_c = 0$, звідки $\quad \overline{r}_c = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \overline{r}_i = 0$, отже $\sum_{i=1}^{n} m_i \overline{r}_i = 0$ і $\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i \overline{r}_i = 0$.

Звідси

$$T = \frac{MV_c^2}{2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i V_{ic}^2}{2}\,. \qquad (3.37)$$

де $T_c^{відн.} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i V_{ic}^2}{2}$ – кінетична енергія системи в відносному русі відносно центра мас.

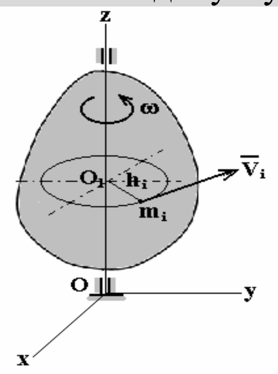
Кінетична енергія твердого тіла

## 1.Поступальний рух.

В цьому випадку всі точки тіла рухаються з однаковими швидкостями, які дорівнюють швидкості руху центра мас. Отже, для будь-якої точки $\overline{V}_i = \overline{V}_c$ і

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i V_i^2}{2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i V_c^2}{2} = \frac{V_c^2}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i = \frac{MV_c^2}{2} \ . \qquad (3.38)$$

Отже, кінетична енергія твердого тіла при поступальному русі дорівнює половині добутку маси тіла на квадрат швидкості центра мас.



Мал. 27

## 2.Обертальний рух.

При обертанні тіла навколо осі Oz (мал. 27) швидкість будь-якої точки дорівнює $V_i = \omega h_i$, де $h_i$ – відстань точки **$m_i$** від осі обертання, $\omega$ – кутова швидкість тіла. Підставимо це значення в формулу для обчислення кінетичної енергії і одержимо

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i V_i^2}{2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \omega^2 h_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i h_i^2 = \frac{I_z \omega^2}{2}, \qquad (3.39)$$

де $I_z$ – момент інерції тіла відносно осі обертання $Oz$. Отже, кінетична енергія тіла при обертальному русі дорівнює половині добутку моменту інерції тіла відносно осі обертання на квадраті його кутової швидкості.

## 3. Плоскопаралельний рух тіла.

Припустимо, що при плоскопаралельному русі твердого тіла його центр мас $C$ рухається в площині малюнка. Як відомо з кінематики, розкладаємо цей рух на поступальний рух разом з центром мас і відносний рух по відношенню до центра мас. В цьому випадку відносний рух – це обертання тіла навколо осі $Cz$, яка проходить через центр мас $C$ перпендикулярно площині малюнка. Визначимо кінетичну енергію згідно теореми Кеніга

$$T = \frac{MV_c^2}{2} + \frac{I_{cz}\omega^2}{2} \ . \qquad (3.40)$$

Тут перший доданок — кінетична енергія тіла в поступальному русі разом з центром мас, а другий — кінетична енергія в обертанні тіла навколо осі $Cz$.

Робота сил

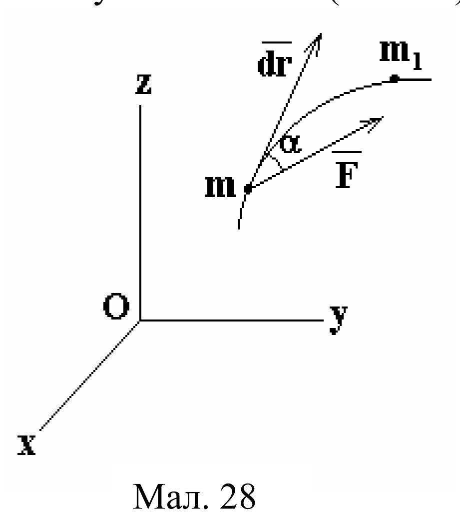
**Елементарною роботою сили** називається скалярний добуток вектора сили на вектор елементарного переміщення точки її прикладання

$$\delta A = \overline{F}d\overline{r} \tag{3.41}$$

або, розкриваючи скалярний добуток,

$$\delta A = F\,dr\cos\alpha \tag{3.42}$$

де $\alpha$ - кут між $\overline{F}$ і $d\overline{r}$ (мал. 28).




Мал. 28

Якщо в формулі (3.41) виразити скалярний добуток через проекції векторів $\overline{F}$ і $d\overline{r}$ на осі координат, то одержимо аналітичний вираз елементарної роботи

$$\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz . \tag{3.43}$$

Припустимо, що кут $\alpha < \pi/2$, тоді з (3.42) одержимо, що $\delta A > 0$. Якщо $\alpha > \pi/2$, то $\delta A < 0$. Коли $\alpha = \pi/2$, то $\delta A = 0$.

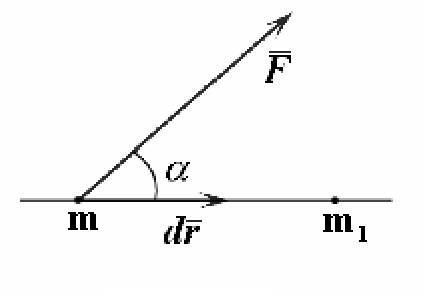
**Робота сили на скінченому переміщенні** дорівнює взятому вздовж цього переміщення криволінійному інтегралу від елементарної роботи

$$A(\overline{F}) = \int\limits_{\cup mm_1} \overline{F}d\overline{r} . \tag{3.44}$$

Якщо $\overline{F} = const$ ($F = const$, $\alpha = const$) і переміщення прямолінійне (мал. 29), відстань $mm_1 = l$, то

$$A = \int\limits_{mm_1} \overline{F}d\overline{r} = \int\limits_{mm_1} F\,dr\cos\alpha = F\cos\alpha\int\limits_0^l dr = Fl\cos\alpha$$

$$A = Fl\cos\alpha \tag{3.45}$$




Мал. 29

Якщо сила стала і переміщення прямолінійне, то робота сили дорівнює добутку величини сили на величину переміщення і на косинус кута між ними.

Припустимо, що $\overline{F} \perp d\overline{r}$. Тоді $\delta A = Fdr\cos 90^\circ$ і $A = 0$.

**Потужністю сили** називається відношення елементарної роботи до елементарного проміжку часу, за який вона здійснюється.

$$N(\overline{F}) = \frac{\delta A}{dt} . \tag{3.46}$$

Але $\delta A = \overline{F}d\overline{r}$, тоді

$$N = \frac{\overline{F}d\overline{r}}{dt} = \overline{F}\cdot\overline{v} . \tag{3.47}$$

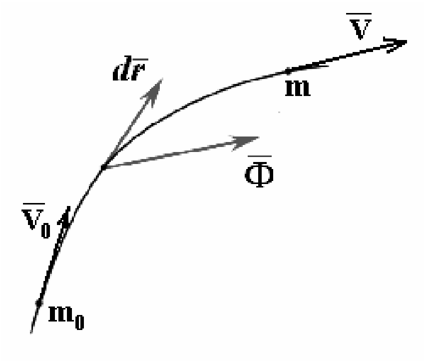
Отже, потужність сили дорівнює скалярному добутку сили на швидкість.

Теорема про зміну кінетичної енергії точки

Зміна кінетичної енергії точки дорівнює роботі рівнодійної прикладених сил на розглядуваному переміщенні

$$\frac{mV^2}{2}+\frac{mV_0^2}{2}=\int\limits_{\cup m_0 m}\bar{\Phi}\,d\bar{r}=A(\bar{\Phi})\ . \qquad (3.48)$$

**Доказ.** Розглядаємо точку з масою $m$, яка переміщується під дією сил з рівнодійною $\bar{\Phi}$ з положення $m_0$, де вона має швидкість $\bar{V}_0$ в положенні $m$, де її швидкість $\bar{V}$. Для доказу теореми розглянемо основний закон динаміки в вигляді




$$m\frac{d\bar{V}}{dt}=\bar{\Phi}$$

Помножимо обидві частини цього співвідношення скалярно на вектор елементарного переміщення точки прикладання рівнодійної $d\bar{r}$ .

$$m\frac{d\bar{v}}{dt}d\bar{r}=\bar{\Phi}\,d\bar{r}$$

Мал. 30

Але $\bar{V}=\frac{d\bar{r}}{dt}$ – швидкість точки, тоді $d\bar{r}=\bar{V}dt$.

Перетворюємо ліву частину одержаної рівності

$$m\frac{d\bar{V}}{dt}d\bar{r}=m\frac{d\bar{V}}{dt}\bar{V}dt=m\bar{V}\cdot d\bar{V}=md\left(\frac{V^2}{2}\right)=d\left(\frac{mV^2}{2}\right)$$

Остаточно

$$d\left(\frac{mV^2}{2}\right)=\bar{\Phi}\,d\bar{r} \qquad (3.49)$$

***Або*** $d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=\delta A$ ***– це математичний вираз теореми про зміну кінетичної енергії точки в диференціальній формі.***

***Проінтегруємо обидві частини рівності (3.49) в границях, відповідних значенням змінних в точках*** $m_0$ ***і*** $m$***, дістанемо остаточно***

$$\frac{mV^2}{2}-\frac{mV_0^2}{2}=\int\limits_{\cup m_0 m}\bar{\Phi}\,d\bar{r}=A(\bar{\Phi})$$

Теорема про зміну кінетичної енергії системи

Зміна кінетичної енергії системи при деякому її переміщенні дорівнює сумі робіт усіх зовнішніх і внутрішніх сил, прикладених до точок системи, на цьому переміщенні

$$\boxed{T - T_0 = \sum_{i=1}^{n} A_i' + \sum_{i=1}^{n} A_i''} \ . \tag{3.50}$$

**Доказ.** Якщо розглядати яку-небудь точку системи з масою $m_i$, яка має швидкість $\overline{V}_i$, то для цієї точки згідно з теоремою про зміну кінетичної енергії точки

$$d\left(\frac{m_i V_i^2}{2}\right) = \delta A_i' + \delta A_i''$$

де $\delta A_i'$ і $\delta A_i''$ – елементарні роботи діючих на точку зовнішніх і внутрішніх сил. Сумуємо такі рівняння для кожної з *n* точок системи почленно, одержимо

$$d\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i V_i^2}{2}\right) = \sum_{i=1}^{n} \delta A_i' + \sum_{i=1}^{n} \delta A_i''$$

або

$$dT = \sum_{i=1}^{n} \delta A_i' + \sum_{i=1}^{n} \delta A_i''$$

Ця рівність – вираз теореми про зміну кінетичної енергії системи в диференціальній формі.

Після інтегрування обох частин цієї рівності в границях, які відповідають переміщенню системи з деякого положення, де кінетична енергія дорівнює $T_0$, в положення, де значення кінетичної енергії стає рівним T , маємо

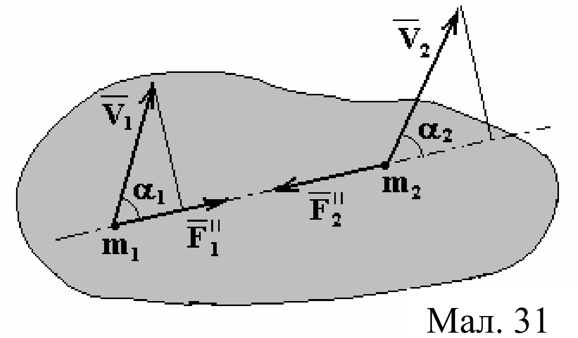
$$T - T_0 = \sum_{i=1}^{n} A_i' + \sum_{i=1}^{n} A_i'' \ . \tag{IV}$$

## Обчислення робіт зовнішніх і внутрішніх сил твердого тіла у найпростіших випадках

### 1.Робота внутрішніх сил.

Треба доказати, що для твердого тіла сума робіт внутрішніх сил дорівнює нулю при будь-якому його переміщенні. Для цього достатньо доказати, що сума елементарних робіт всіх внутрішніх сил дорівнює нулю.

Розглянемо дві будь-які точки твердого тіла $m_1$ і $m_2$ (Мал. 31). Тому що внутрішні сили є силами взаємодії точки тіла, то для цих двох точок $\overline{F}_1'' = -\overline{F}_2''$, $F_1'' = F_2''$.



Мал. 31

Введемо одиничний вектор $\overline{i}^0$, напрямлений вздовж сили $\overline{F}_1''$. Тоді $\overline{F}_1'' = \overline{i}^0 F_1''$, $\overline{F}_2'' = -\overline{i}^0 F_2'' = -\overline{i}^0 F_1''$.

Нехай $d\overline{r}_1$ і $d\overline{r}_2$ – елементарні переміщення точок $m_1$ і $m_2$.

Тоді елементарна робота сил $\overline{F}_1''$ і $F_2''$

$$\delta A'' = \overline{F}_1'' \cdot d\overline{r}_1 + \overline{F}_2'' \cdot d\overline{r}_2 = \overline{F}_1'' \cdot \overline{V}_1 dt + \overline{F}_2'' \cdot \overline{V}_2 dt =$$
$$= F_1'' dt\left(\overline{V}_1 \cdot \overline{i}^0\right) - F_2'' dt(\overline{V}_2 \cdot \overline{i}^0) = F_1'' dt\left(V_1 \cos\alpha_1 - V_2 \cos\alpha_2\right) = 0$$

тому що в кінематиці твердого тіла доказано, що проекція швидкостей будь-яких двох точок твердого тіла на напрям прямої лінії, яка з'єднує ці точки, дорівнюють одна одній при будь-якому русі твердого тіла. В одержаному виразі в дужках знаходиться різниця цих проекцій двох точок, тобто величина, яка дорівнює нулю.

Тверде тіло можна вважати складеним з пар взаємодіючих точок, для кожної з котрих сума елементарних робіт внутрішніх сил дорівнює нулю. Сумуючи елементарні роботи для всіх пар точок, одержимо

$$\delta A'' = \sum_{i=1}^{n} \delta A_i'' = 0$$

Як вже відомо, головний вектор і головний момент усіх внутрішніх сил для будь-якої механічної системи дорівнюють нулю. Сума робіт внутрішніх сил дорівнює нулю тільки для твердого тіла, а для будь-якої механічної системи в загальному випадку вона не дорівнює нулю.

**2. Робота зовнішніх сил.**

*а) Поступальний рух тіла.*

До твердого тіла, яке рухається поступально, прикладені зовнішні сили $\overline{F}_1'$, $\overline{F}_2'$, …, $\overline{F}_i'$, …, $\overline{F}_n'$.

При поступальному русі твердого тіла траєкторії всіх його точок тотожні і паралельні. Отже вектори елементарних переміщень усіх точок геометрично рівні між собою, тобто $d\overline{r}_i = d\overline{r}$. Це справедливо тому, що при поступальному русі $\overline{V}_i = \overline{V}$, а $d\overline{r}_i = \overline{V}_i dt$, $d\overline{r} = \overline{V} dt$. Елементарна робота сили $\overline{F}_i'$ $\delta A_i' = \overline{F}_i' d\overline{r}$. Елементарна робота всіх сил, які прикладені до тіла, дорівнює елементарній роботі зовнішніх сил

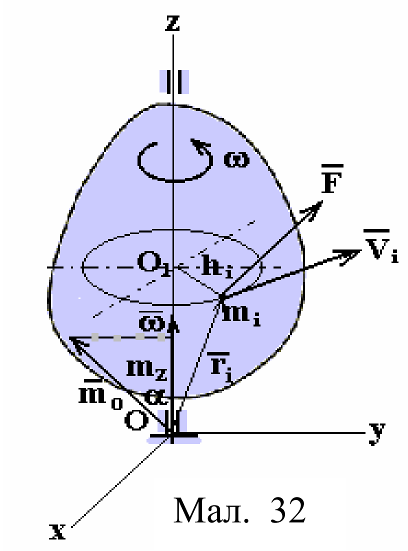
$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} \delta A_i' = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i' d\overline{r} = d\overline{r} \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i'$$

Але $\sum_{i=1}^{n}\overline{F}_i' = \overline{R}'$, де $\overline{R}'$ – головний вектор усіх зовнішніх сил.

Отже, $$\boxed{\delta A = \overline{R}'d\overline{r}} \tag{3.51}$$

Елементарна робота сил, прикладених до твердого тіла, що рухається поступально, дорівнює елементарній роботі головного вектора внутрішніх сил, прикладеного в будь-якій точці тіла.

*б) Обертання твердого тіла навколо нерухомої осі.*




Мал. 32

При обертанні твердого тіла навколо нерухомої осі швидкість точки m можна обчислити згідно векторній формулі Ейлера $\overline{V} = \overline{\omega} \times \overline{r}$ (мал. 32).

Тоді елементарну роботу сили $\overline{F}$ визначимо за формулою

$$\delta A = \overline{F} \cdot d\overline{r} = \overline{F} \cdot \overline{V}dt = \overline{F} \cdot \left(\overline{\omega} \times \overline{r}\right)dt.$$

В мішаному векторному добутку можна переставляти множники в круговому порядку

$$\overline{F} \cdot \left(\overline{\omega} \times \overline{r}\right) = \overline{\omega} \cdot \left(\overline{r} \times \overline{F}\right)$$

і тоді маємо

$$\delta A = \overline{\omega} \cdot \left(\overline{r} \times \overline{F}\right)dt = \overline{\omega} \cdot \overline{m}_0(\overline{F})dt = \omega dt\, m_0 \cos\alpha,$$

тому що $\overline{r} \times \overline{F} = \overline{m}_0\left(\overline{F}\right)$ — це момент сили відносно полюса O.

Враховуючи, що $m_0 \cos\alpha = m_z$ момент сили відносно осі обертання Oz і $\omega\, dt = d\varphi$, одержимо

$$\delta A = m_z d\varphi \tag{3.52}$$

Елементарна робота сили, прикладеної до будь-якої точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі, дорівнює добуткові моменту сили відносно осі обертання на елементарний кут повороту тіла.

### *Повна робота*

$$A = \int_0^{\varphi} m_z(\overline{F})d\varphi \tag{3.53}$$

В частинному випадку, якщо момент сили відносно осі обертання є сталою величиною $m_z\left(\overline{F}\right) = \text{const}$, то робота визначається формулою

$$A = m_z\varphi \tag{3.54}$$

де $\varphi$ – кут повороту тіла, на якому обчислюють роботу сили.

## §6. Елементи теорії потенціального силового поля

**Силовим полем** називається частина простору, в кожній точці якого на матеріальну точку діє певна сила, яка залежить від координат точки. Силове поле називається потенціальним, якщо існує функція U координат точки

$x, y, z$ така, що елементарна робота сил поля дорівнює повному диференціалу цієї функції

$$\delta A = dU \tag{3.55}$$

Функцію $U(x, y, z)$ називають силовою функцією.

**Потенціальною енергією** матеріальної точки в даному силовому полі називається силова функція з оберненим знаком

$$\Pi = -U(x, y, z)$$

Тоді (3.55) має вигляд

$$\delta A = -d\Pi\ , \tag{3.56}$$

де $\Pi = \Pi(x, y, z)$.

***Елементарну роботу сили, коли має місце (3.56), можна записати таким чином***

$$\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z}dz\right).$$

Відносно будь-якого переміщення точки, тобто відносно $dx, dy, dz$, можна покласти, що:

1) $dx \neq 0$, $dy = dz = 0$, тоді $F_x dx = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial x}dx$.

2) $dy \neq 0$, $dx = dz = 0$, тоді $F_y dy = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial y}dy$.

3) $dz \neq 0$, $dx = dy = 0$, тоді $F_z dz - \dfrac{\partial \Pi}{\partial z}dz$.

Отже,

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x},\ F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y},\ F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}\ . \tag{3.57}$$

В потенціальному силовому полі проекції сили на осі координат дорівнюють взятим з від'ємним знаком відповідним частинним похідним від потенціальної енергії.

З відношень (3.57) легко встановити умови потенціальності силового поля $\overline{F}(x, y, z)$. Якщо використати властивості других змішаних похідних від потенціальної енергії

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y\, \partial x}, \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y\, \partial z} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z\, \partial y}, \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x\, \partial z} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z\, \partial x},$$

знайдемо $\dfrac{\partial F_x}{\partial y} - \dfrac{\partial F_y}{\partial x} = 0, \quad \dfrac{\partial F_y}{\partial z} - \dfrac{\partial F_z}{\partial y} = 0, \quad \dfrac{\partial F_x}{\partial z} - \dfrac{\partial F_z}{\partial x} = 0$.

І якщо використовувати вектор вихору

$$\mathrm{rot}\,\overline{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\cdot \overline{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\cdot \overline{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\cdot \overline{k},$$

то попередні умови визначають, що

$$\mathrm{rot}\,\overline{F} = 0\,. \qquad (3.58)$$

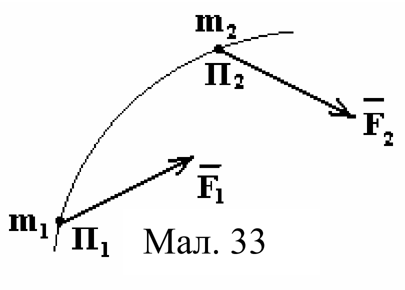
У математичній теорії поля доводиться, що умова (3.58) з`являється необхідною і достатньою для потенціальності силового поля $\overline{F}(x,y,z)$.

Таким чином, для того, щоб силове поле було потенціальним, необхідно і достатньо, щоб воно було безвихровим.

Відзначимо основну властивість потенціального силового поля.

В потенціальному силовому полі робота сили не залежить від шляху, а залежить від початкової і кінцевої точки і дорівнює різниці значень потенціальної енергії (різниці потенціалів) в цих точках.

Дійсно, нехай точка переміщується в потенціальному силовому полі під дією сили $\overline{F}$ з положення $\mathbf{m_1}$, в якому потенціальна енергія $\mathbf{П_1}$, в положення $\mathbf{m_2}$, де потенціальна енергія $\mathbf{П_2}$ (мал. 33).



Мал. 33

***Тоді***

$$A = \int\limits_{\cup m_1 m_2} \delta A = -\int\limits_{m_1}^{m_2} d\Pi = -\left(\Pi_2 - \Pi_1\right) = \Pi_1 - \Pi_2$$

$$A = \Pi_1 - \Pi_2\,. \qquad (3.59)$$

Якщо потенціальні енергії в початковій і кінцевій точках однакові, то робота дорівнює нулю.

Отже, робота сили в потенціальному силовому полі по будь-якому замкнутому шляху дорівнює нулю.

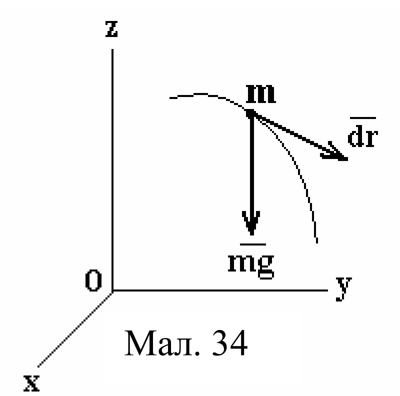
## Важливі приклади потенціальних силових полів матеріальної точки.

Щоб з’ясувати, чи є дане поле потенціальним, треба обчислити елементарну роботу сил поля і перевірити, чи можна її зобразити в вигляді взятого з оберненим знаком повного диференціала від потенціальної енергії.

1. П о л е с и л и в а г и.

Проекції сили ваги $\overline{P}$ і вектора елементарного переміщення $d\overline{r}$ точки її прикладання на осі координат мають вигляд (мал.34)

$$\overline{P}\{0,0,-mg\},\ d\overline{r}\{dx,dy,dz\}.$$



Мал. 34

Обчислимо елементарну роботу сили $\overline{P}$ і одержимо

$$\delta A = P_x dx + P_y dy + P_z dz = -mgdz = -d\left(mg\,z + C\right)$$

***Отже, потенціальна енергія точки дорівнює***

$$\Pi = mg\,z + C, \qquad \mathit{(3.60)}$$

***а робота на скінченому переміщенні***

$$A_{m_1m_2} = \Pi_1 - \Pi_2 = \left(mg\,z_1 + C\right) - \left(mg\,z_2 + C\right) = mg\left(z_1 - z_2\right) = mg\,h\,,$$

де $h = z_1 - z_2$.

$$\boxed{A_{m_1m_2} = mg\,h} \qquad (3.61)$$

Робота сили ваги дорівнює добутку ваги на падіння висоти.

2. П о л е  с и л и  п р у ж н о с т і.

Нехай пружина AB прикріплена в точці A за допомогою сферичного шарніра, і точка **m** описує деяку траєкторію у просторі. Силу пружності $\overline{F} = \overline{F}(r)$ можна розглядати як центральну, яка залежить від віддалі AB = r

$F(r) = -c(r - r_0)$, де $r_0$ – довжина недеформованої пружини.

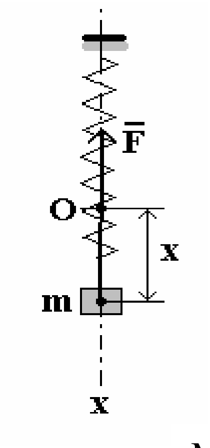
Потенціальна енергія такого поля сил пружності дорівнює

$$\Pi(r) = -\int F(r)dr = c\int (r - r_0)dr = c\int (r - r_0)d(r - r_0) = \frac{c\Delta^2}{2} + \text{const} \quad ,$$

де $\Delta = r - r_0$ - деформація пружини.

Робота сили пружності на скінченому переміщенні –

$$A = \Pi_1 - \Pi_2 = \frac{c}{2}\cdot(\Delta_1^2 - \Delta_2^2)\,. \qquad (3.62)$$




Мал. 35

Зокрема, для точки **m**, яка прикріплена до кінця прямовисної пружини і переміщується із положення O (недеформований стан пружини) до положення **m** вздовж осі Ox, маємо $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = x$. Робота сили пружності на розглядуваному переміщенні

$$A = -\frac{c\,x^2}{2}\,. \qquad (3.63)$$

Закон збереження механічної енергії матеріальної точки

При русі точки в потенціальному силовому полі повна механічна енергія залишається сталою величиною

$$\boxed{\frac{mV^2}{2} + \Pi = \text{const}}\,. \qquad (3.64)$$

Повною механічною енергією матеріальної точки називається сума її кінетичної і потенціальної енергій.

$$E = \frac{mV^2}{2} + \Pi\,.$$

Для доведення закону збереження механічної енергії застосуємо теорему про зміну кінетичної енергії точки на деякому переміщенні її в потенціальному полі із положення $m_0$ в положення $m$ . Для цього переміщення можна записати

$$\frac{mV^2}{2}-\frac{mV_0^2}{2}=A$$

Якщо матеріальна точка рухається в потенціальному силовому полі, то $A=\Pi_0-\Pi$.

Отже,
$$\frac{mV^2}{2}-\frac{mV_0^2}{2}=\Pi_0-\Pi$$

або
$$\frac{mV^2}{2}+\Pi=\frac{mV_0^2}{2}+\Pi_0$$

Таким чином, E = const.

## Випадок консервативних сил механічної системи.

Силовим полем механічної системи називається частина простору, в будь-якій точці якого на будь-яку точку системи діє визначена сила, яка залежить від координат точки.

Силове поле називається **потенціальним**, якщо існує функція $U$ координат точок системи така, що елементарна робота сил поля дорівнює повному диференціалу цієї функції

$$\delta A=dU. \tag{3.65}$$

Функція $U\left(x_1,y_1,z_1,...,x_n,y_n,z_n\right)$ називається **силовою функцією**.

**Потенціальною енергією** системи в даному силовому полі називається силова функція з оберненим знаком

$$\Pi=-U. \tag{3.66}$$

Тоді, згідно (3.65) маємо

$$\delta A=-d\Pi\ . \tag{3.67}$$

Можна показати, що проекції сили, діючої на кожну точку системи, зв'язані з потенціальною енергією таким чином

$$F_{ix}=-\frac{\partial\Pi}{\partial x_i},\ F_{iy}=-\frac{\partial\Pi}{\partial y_i},\ F_{iz}=-\frac{\partial\Pi}{\partial z_i}\ . \tag{3.68}$$

Якщо обчислити суму робіт, яку здійснюють сили поля, що діють на механічну систему при переміщенні системи з положення $m_0$, в якому є силова функція $U_0$ і потенціальна енергія $\Pi_0$ в положення $m$, в якому є силова функція $U$ і потенціальна енергія $\Pi$, то

$$A=\sum\delta A_i=\int\limits_{M_0}^{M}dU=-\int\limits_{M_0}^{M}d\Pi=\Pi_0-\Pi\ ,$$

$$A = \Pi_0 - \Pi$$

(3.69)

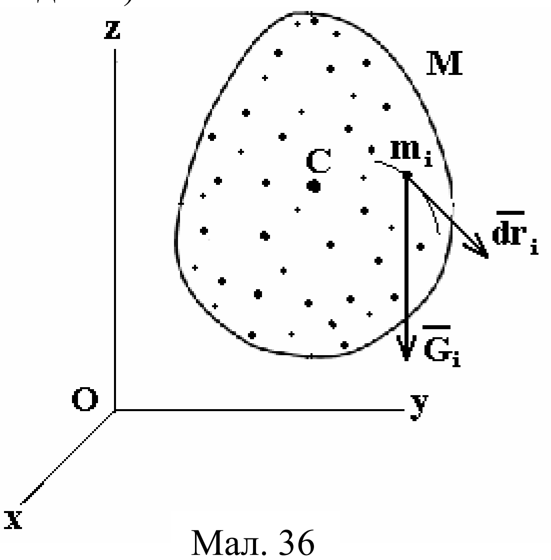
Робота потенціальної сили дорівнює різниці значень потенціальної енергії рухомої системи в початковому і кінцевому її положеннях.

Механічна система, яка рухається в потенціальному полі, називається консервативною.

Розглянемо приклад потенціальних сил механічної системи.

### *Однорідне поле сили тяжіння*

Нехай на кожну точку $\mathbf{m_i}$ механічної системи діють сили ваги $\overline{G}_i$ (мал. 36). Якщо система рухається у просторі під дією тільки цих сил, то вектори сили $\overline{G}_i$ і
вектор елементарного переміщення $d\overline{r}_i$ в системі координат Oxyz мають таки координати: $\overline{G}(0,0,-m_i g)$ , $d\overline{r}_i(dx_i, dy_i, dz_i)$ ( $g$ – прискорення вільного падіння).



Мал. 36

Тому елементарна робота сил ваги для матеріальної системи буде

$$\delta A = \sum \delta A_i = \sum \overline{G}_i d\overline{r}_i =$$
$$= \sum (-m_i g)\cdot dz_i = d\left(-\sum m_i g\, z_i\right).$$

Звідси витикає, що для однорідного поля тяжіння існує силова функція

$$U = -\sum m_i g\, z_i + \text{const}.$$

Отже, таке силове поле є потенціальним, а потенціальна енергія дорівнює

$$\Pi = \sum m_i g\, z_i + \text{const}.$$

Координати центра ваги системи визначаються за формулою статики $z_C = \dfrac{1}{G}\sum m_i g\, z_i$ , звідки $\sum m_i g\, z_i = G\, z_C$ ( G – вага системи). Тоді

$$\boxed{\Pi = G\, z_C + \text{const}} \qquad (3.70)$$

Отже, потенціальна енергія механічної системи, яка знаходиться під дією сил ваги, дорівнює добутку ваги системи на висоту її центра ваги над поверхнею xOy.

## Закон збереження повної механічної енергії

Повна механічна енергія системи при русі в потенціальному силовому полі зберігає своє стале значення.

$$\boxed{T + \Pi = \text{const}}. \qquad (3.71)$$

Доведення. Припустимо, що всі діючі на систему внутрішні і зовнішні сили потенціальні, тобто механічна система консервативна. Тоді для будь-якого переміщення системи має місце теорема про зміну кінетичної енергії

$$T_1 - T_0 = \sum_{i=1}^{n} A_i ,$$

причому робота прикладених потенціальних сил дорівнює

$$A = \sum A_i = \Pi_0 - \Pi_1 .$$

Отже, підставляючи цей вираз роботи в вираз теореми про зміну кінетичної енергії системи, одержимо $T_1 - T_0 = \Pi_0 - \Pi_1$, або $T_1 + \Pi_1 = T_0 + \Pi_0$.
Величина $T + \Pi$ називається повною механічною енергією системи.

Розглянемо приклад застосування теореми про зміну кінетичної енергії системи, в якій застосуємо математичний пакет Mathcad у символьному режимі.

Механічна система (мал. 37) складається з чотирьох тіл: двох ступінчатих шківів (2 і 3), вантажів (1 і 4). Маса кожного шківа рівномірно розподілена по його зовнішньому ободу, причому $m_1$ = 6 кг, $m_2$ = 10 кг, $m_3$ = 8 кг, $m_4$ =1 кг. Ділянка нитки, що з'єднує тіло 1 системи, паралельна похилій площині. Під дією сил ваги і моменту $M_2$ = 0,6 Н м , прикладеному до шківа 2, система починає рухатися зі стана спокою. При русі системи також діють сила тертя ковзання вантажу 1 (коефіцієнт тертя ковзання f = 0,1).

Визначити значення прискорення тіла 1 , при таких даних: $r_2$ = 0,1 м,

$R_2$ = 0,2м; $r_3$ = 0,2м; $R_3$ = 0,4 м, $\alpha_1 = 30^0$ .

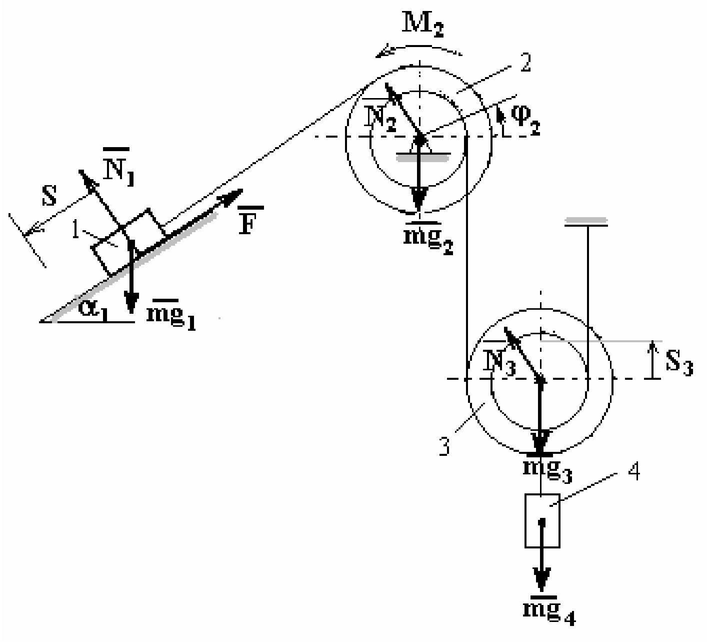
Розв`язання

1. Розглянемо рух механічної системи
2. На систему діють (мал. 37):

**$m_1$g** , **$m_2$g** , **$m_3$g** , **$m_4$g** **-** сили ваги;

$M_2$ - обертаючий момент;

**$N_1$** - нормальна реакція похилої поверхні; **$N_2$** **-** реакція підшипника.




Мал. 37

3. Для визначення прискорення $\mathbf{a_1}$ скористаємося теоремою про зміну кінетичної енергії системи $T - T_0 = \sum A_i^E + \sum A_i^I$

Тому що в початковий момент система знаходилася в спокої, то $T_0 = 0$.

Дорівнює нулю і сума робіт внутрішніх сил ( $\sum A_i^I = 0$), тому що розглядувана система є незмінною. Отже, маємо $T = \sum A_i^E$ . ( а )

4. Перед тим, як визначати кінетичну енергію системи, проведемо кінематичний розрахунок. Оскільки потрібно визначити прискорення тіла 1, задамо $V_1$ і висловимо швидкості всіх ланок механізму через швидкість $V_1$ . З мал. 37 очевидно, що

$$\omega_2 = V_1 / R_2 = 5\ V_1\ , \quad \omega_3 = \omega_2\,[r_2 / (R_3+r_3)] = 0{,}833\ V_1,\ \ V_3 = \omega_3\, r_3 = 0{,}167\ V_1\ ,$$

$$V_4 = V_3 = 0{,}167\ V_1\ .$$

На підставі цих співвідношень (інтегруючи) знаходимо зв'язок між переміщеннями

$$\varphi_2 = 5\ S_1\ , \quad \varphi_3 = 0{,}833\ S_1\ , \quad S_3 = 0{,}167\ S_1\ , \quad S_4 = S_3 = 0{,}167\ S_1\ .$$

5. Визначаємо кінетичну енергію системи як суму кінетичних енергій усіх ланок, що входять до системи $T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$ . (б)

Тіло 1 здійснює поступальний рух, отже $T_1 = m_1 V_1^2 / 2$ .

Тіло 2 обертається навколо нерухомої осі і $T_2 = I_2\, \omega_2^2/2$ , де $I_2 = m_2\, R_2^2$ .

Тіло 3 здійснює плоскопаралельний рух, отже

$$T_3 = m_3 V_3^2 / 2 + I_3\, \omega_3^2 / 2\ , \quad \text{де } I_3 = m_3\, R_3^2\ .$$

Тіло 4 рухається поступально і $T_4 = m_4\, V_4^2/2$ .

<u>Примітка:</u> моменти інерції шківів 2 і 3 визначилися за формулою $I_z = \Sigma\, m_i\, R_i^2$ , тому що їхня маса рівномірно розподілена по зовнішньому ободу; момент інерції тіла 1, як суцільного однорідного циліндра визначається за формулою $I_z = 1/2 \cdot \Sigma\, m_i\, R_i^2$ .

Виразимо кінетичну енергію системи через швидкість тіла 1, для цього застосовуємо математичній пакет Mathcad.

Вихідні дані

$m1 := 6 \quad m2 := 10 \quad m3 := 8 \quad m4 := 1 \quad f := 0.1 \quad M2 := 0.6$

$r2 := 0.1 \quad R2 := 0.2 \quad r3 := 0.2 \quad R3 := 0.4 \quad \alpha := \frac{\pi}{6} \quad g := 9.807$

Кінематичний аналіз

$$\omega 2 := \frac{v1}{R2} \qquad \omega 3 := \omega 2 \cdot \frac{r2}{r3 + R3} \qquad v3 := \omega 3 \cdot r3 \qquad v4 := v3$$

Кінетична енергія

6. Тепер знайдемо суму робіт усіх зовнішніх сил, що діють на систему, при

$$\phi2 := \frac{S1}{R2} \qquad \phi3 := \phi2\cdot\frac{r2}{r3 + R3} \qquad S3 := \phi3\cdot r3 \qquad S4 := S3$$

заданому переміщенні тіла 1 $S_1$.

$$T1 := m1\cdot\frac{v1^2}{2} \qquad I2 := m2\cdot R2^2 \qquad T2 := I2\cdot\frac{\omega2^2}{2}$$

$$I3 := m3\cdot R3^2 \qquad T3 := m3\cdot\frac{v3^2}{2} + I3\cdot\frac{\omega3^2}{2} \qquad T4 := m4\cdot\frac{v4^2}{2}$$

$$\Sigma T := T1 + T2 + T3 + T4 \qquad \Sigma T \left|\begin{array}{l}\text{expand}, v1 \\ \text{float}, 6\end{array}\right. \rightarrow 8.56944 v1^2$$

$$\sum Ai = A(\mathbf{m_1g}) + A(\mathbf{F_{тр}}) + A(M_2) + A(\mathbf{m_3g}) + A(\mathbf{m_4g}) \ .$$

Виразимо роботу усіх зовнішніх сил системи через переміщення тіла 1

$$AG1 := m1\cdot g\cdot S1\cdot\sin(\alpha) \qquad AF := -f\cdot m1\cdot g\cdot S1\cdot\cos(\alpha) \qquad AM2 := M2\cdot\phi2$$

$$AG3 := -m3\cdot g\cdot S3 \qquad AG4 := -m4\cdot g\cdot S4$$

$$\Sigma A := AG1 + AF + AM2 + AG3 + AG4 \qquad \Sigma A \left|\begin{array}{l}\text{expand}, S1 \\ \text{float}, 6\end{array}\right. \rightarrow 12.6146 S1$$

Підставивши значення T і $\sum A_i$ у рівняння (а), одержимо

$$\frac{d}{dS1}\Sigma A \ \ \text{float}, 6 \ \rightarrow 12.6146$$

$$\left(\frac{d}{dv1}\Sigma T\right)\cdot a1 - \left(\frac{d}{dS1}\Sigma A\right)\cdot v1 \left|\begin{array}{l}\text{solve}, a1 \\ \text{float}, 6\end{array}\right. \rightarrow .736024$$

або $$8{,}569\ V_1^{\,2} = 12{,}615\ S_1\ .$$

Диференціюємо дане співвідношення за часом, одержимо

$$8{,}569\cdot 2\cdot V_1\cdot a_1 = 12{,}584\ V_1\ ,$$

звідти, скоротивши на $V_1$, знаходимо $a_1$ , отже $a_1 = 0{,}736$ м / с$^2$ .

# Глава IV. Аналітичні принципи механіки

## § 1. Принцип Даламбера

Усі методи, які ми вивчали, грунтуються на рівняннях, які випливають або безпосередньо з законів Ньютона, або з загальних теорем, які являються висновком цих законів. Однак цей шлях не є єдиним. Рівняння руху або умови рівноваги механічної системи можна одержати, поклавши в основу замість законів Ньютона інші загальні положення, які називаються принципами механіки. В ряді випадків застосування цих принципів дозволяє знайти більш ефективні методи розв'язування задач. Розглянемо один з загальних принципів механіки - принцип Даламбера.

Нехай система складається з **n** матеріальних точок. Виділимо яку-небудь з точок системи з масою $\mathbf{m_i}$ . Під дією прикладених до неї зовнішніх і внутрішніх сил $\overline{F}'_i$ і $\overline{F}''_i$ ( в які входять активні сили і реакції в'язей) точка одержує відносно інерціальної системи відліку деяке прискорення $\mathbf{a_i}$ .

Введемо в розгляд величину

$$\overline{\Phi}_i = - m_i \, \overline{a}_i \, , \tag{4.1}$$

яка має розмірність сили.

Векторна величина, яка дорівнює по модулю добуткові маси точки на її прискорення і напрямлена протилежно цьому прискоренню, називається даламберовою **силою інерції** точки.

Тоді виявляється, що рух точки має загальну властивість: якщо в кожний момент часу до фактично діючих на точку сил $\overline{F}'_i$ і $\overline{F}''_i$ додати силу інерції $\overline{\Phi}_i$ , то одержана система сил буде зрівноваженою, тобто буде

$$\overline{F}'_i + \overline{F}''_i + \overline{\Phi}_i = 0 \, . \tag{4.2}$$

Це положення висловлює принцип Даламбера для однієї матеріальної точ-ки. Неважко переконатися, що воно еквівалентне другому закону Ньютона і навпаки. Дійсно, другий закон Ньютона для розглядуваної точки дає

$$m_i \, \overline{a}_i = \overline{F}'_i + \overline{F}''_i$$

Якщо ми перенесемо член $m_i \, \overline{a}_i$ в праву частину і згідно з позначенням (4.1), приходимо до співвідношення (4.2) .

Навпаки, якщо ми перенесемо в рівнянні (4.2) член $\overline{\Phi}_i$ в другу частину рівності, згідно з позначенням (4.1) одержимо вираз другого закону Ньютона.

Повторюючи міркування відносно кожної з точок системи, одержимо **принцип Даламбера** для системи:

якщо в будь-який момент часу до кожної з точок системи, крім фактично діючих на неї зовнішніх і внутрішніх сил, прикласти відповідні сили інерції, то одержана система сил буде знаходитися в рівновазі і до неї можна буде застосовувати усі рівняння статики.

Математично принцип Даламбера для системи виражається системою **n** векторних рівностей вигляду (4.2), які еквівалентні диференціальним рівнянням руху системи. Отже, з принципу Даламбера, як і з диференціальних рівнянь руху, можна одержати усі загальні теореми динаміки .

Значення принципу Даламбера полягає в тому, що при безпосередньому його застосуванні для розв'язування задач динаміки рівняння руху системи склада-ються в формі добре відомих рівнянь рівноваги.

При застосуванні принципу Даламбера треба мати на увазі, що він, як і основний закон динаміки, відноситься до руху, який розглядається відносно інерціальної системи відліку. При цьому на точки механічної системи, рух якої ми вивчаємо, діють тільки зовнішні та внутрішні сили $\overline{F}_i'$ та $\overline{F}_i''$, які виникають в результаті взаємодії точок системи одна з одною та з тілами, які не входять в систему; під дією цих сил точки системи і рухаються з відповідними прискореннями $\overline{a}_i$.

Сили інерції, про які говориться в принципі Даламбера, на рухомі точки не діють. Інакше, згідно рівнянням (4.2), ці точки знаходились б в спокої або рухались без прискорень і тоді, як ми бачимо з рівності (4.1), не було би і самих сил інерції. Введення сил інерції - це прийом, який дозволяє складати рівняння динаміки з допомогою більш простих методів статики. При застосуванні принципу Даламбера розглядається мислено зупинена механічна система.

## Рівняння кінетостатики

Головний вектор і головний момент відносно довільного полюса зовнішніх сил і сил інерції дорівнюють нулю.

З статики відомо, що геометрична сума сил, які знаходяться в рівновазі, і сума їх моментів відносно довільного полюса 0 дорівнюють нулеві. Тоді на підставі принципу Даламбера повинно бути

$$\sum_{i=1}^{n}(\overline{F}_i' + \overline{F}_i'' + \overline{\Phi}_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\overline{m}_o(\overline{F}_i') + \overline{m}_o(\overline{F}_i'') + \overline{m}_o(\overline{\Phi}_i)\right] = 0$$

Введемо позначення $$\overline{R}^{in} = \sum_{i=1}^{n}\overline{\Phi}_i, \quad \overline{M}^{in} = \sum_{i=1}^{n}\overline{m}_o(\overline{\Phi}_i) \qquad (4.3)$$

Величини $\overline{R}^{in}$, $\overline{M}_O^{in}$ - це головний вектор і головний момент відносно полюса O сил інерції.

Враховуючи, що геометрична сума внутрішніх сил і сума їх моментів дорівнюють нулеві, одержимо

$$\begin{cases} \overline{R}' + \overline{R}^{in} = 0 \\ \overline{M}_O' + \overline{M}_O^{in} = 0 \end{cases}, \qquad (4.4)$$

Застосування рівнянь (4.4), які випливають з принципу Даламбера, спрощує процес розв’язування задач, тому що ці рівняння не містять внутрішніх сил. Рівняння (4.4) еквівалентні рівнянням, які виражають теореми про зміну кількості руху і кінетичного моменту системи, і відрізняються від них тільки по формі .

Рівняннями (4.4) зручно користуватись при вивченні руху твердого тіла або системи твердих тіл. В проекціях на осі координат рівності (4.4) дають рівняння, аналогічні відповідним рівнянням статики .

Одержані як висновок два векторних або шість скалярних рівнянь рівноваги (4.4) не еквівалентні початковим **n** векторним або **3n** скалярним рівнянням (4.2). Тому математично вони не виражають принцип Даламбера для системи і рух системи повністю не описують. Винятком є випадок, коли системою є абсолютно тверде тіло. Щоб користуватися рівняннями (4.4) треба при розв'язуванні задач знати вираз головного вектора і головного моменту сил інерції .

## ***Головний вектор і головний момент сил інерції твердого тіла***

Головний вектор системи сил, як відомо, не залежить від центра приведення і може бути обчислений заздалегідь .

З рівностей (4.3) витікає, що систему сил інерції твердого тіла можна замінити однією силою, яка дорівнює $\overline{R}^{in}$ і прикладена в полюсі O, і парою з моментом, який дорівнює $\overline{M}_O^{in}$ . Використовуємо теорему про рух центра мас

$$M\overline{a}_C = \overline{R}' .$$

Тоді з першого рівняння (4.4)

$$\overline{R}^{in} = -\overline{R}' ,$$

таким чином

$$\overline{R}^{in} = -M\,\overline{a}_C . \tag{4.5}$$

Головний вектор сил інерції тіла дорівнює добутку маси тіла на прискорення його центра мас і напрямлений протилежно цьому прискоренню .

Для визначення головного моменту сил інерції використовуємо теорему про зміну кінетичного моменту системи $\dfrac{d\overline{L}_O}{dt} = \overline{M}'_O$ .

З другого рівняння (4.4) $\overline{M}_O^{in} = -\overline{M}'_O$ тобто

$$\overline{M}_O^{in} = -\frac{d\overline{L}_O}{dt} \tag{4.6}$$

Головний момент сил інерції твердого тіла відносно полюса O дорівнює взятій з від'ємним знаком похідній по часу від кінетичного моменту тіла відносно того ж полюса.

Головний момент сил інерції знайдемо для деяких частинних випадків.

1. *Поступальний рух*. В цьому випадку прискорення усіх точок тіла геометрично дорівнюють прискоренню його центра мас $\overline{a}_i = \overline{a}_C$ .

При цьому

$$\overline{M}_C^{in} = -\frac{d\overline{L}_C}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\left[\overline{r}_i \times m_i\overline{V}_i\right]\right) = -\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{d\overline{r}_i}{dt} \times m_i\overline{V}_i\right] - \sum_{i=1}^{n}\left[\overline{r}_i \times m_i\overline{a}_i\right] =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}\left[\overline{V}_i \times m_i\overline{V}_i\right] - (\sum_{i=1}^{n} m_i\overline{r}_i) \times \overline{a}_C = -M\,\overline{r}_C \times \overline{a}_C = 0,$$

тому що векторний добуток колінеарних векторів дорівнює нулю і радіус – вектор центра мас $\overline{r}_C = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\overline{r}_i$ дорівнює нулю ( центр мас - полюс ).

В цьому випадку сили інерції точок твердого тіла зводяться до рівнодійної, яка прикладена в центрі мас і дорівнює головному вектору сил інерції, тому

$$\overline{R}^{in} = -M\,\overline{a}_C \ .$$

При поступальному русі сили інерції точок твердого тіла зводяться до рівнодійної сили, яка прикладена в центрі мас тіла, дорівнює по модулю добутку маси тіла на прискорення його центра мас і напрямлена протилежно цьому прискоренню.

2. *Обертання твердого тіла навколо нерухомої осі*. Нехай тверде тіло обертається навколо осі Oz з кутовою швидкістю ω. Спроектуємо на вісь Oz векторну рівність (4.6)

$$M_z^{in} = -\frac{dL_z}{dt} \ . \qquad (4.7)$$

В випадку обертання твердого тіла навколо нерухомої осі $L_z = I_z\omega$.

Підставимо цей вираз в (4.7) і одержимо

$$M_z^{in} = -I_z\frac{d\omega}{dt} = -I_z\varepsilon \ .$$

Таким чином , цей момент створюють тільки дотичні сили інерції, тому що нормальні сили інерції для кожної точки тіла перетинають вісь обертання і, отже, моменту не створюють.

## *§ 2. Принцип можливих переміщень Лагранжа*

*Розглянемо деякі попередні поняття.*

### 1. Класифікація в‘язей.

Рух точок системи може бути вільним і невільним. Якщо на рух не накладено ніяких обмежень, то він зветься вільним , а якщо накладені обмеження, то невільним. Кожне обмеження на рух точок системи в просторі зветься в'яззю. В'язі здійснюються з допомогою тіл, з якими взаємодіє дана система.

Сили, з якими в'язі діють на точки системи, називаються реакціями в'язей. Усі інші сили, виключаючи реакції в'язей, називаються активними.

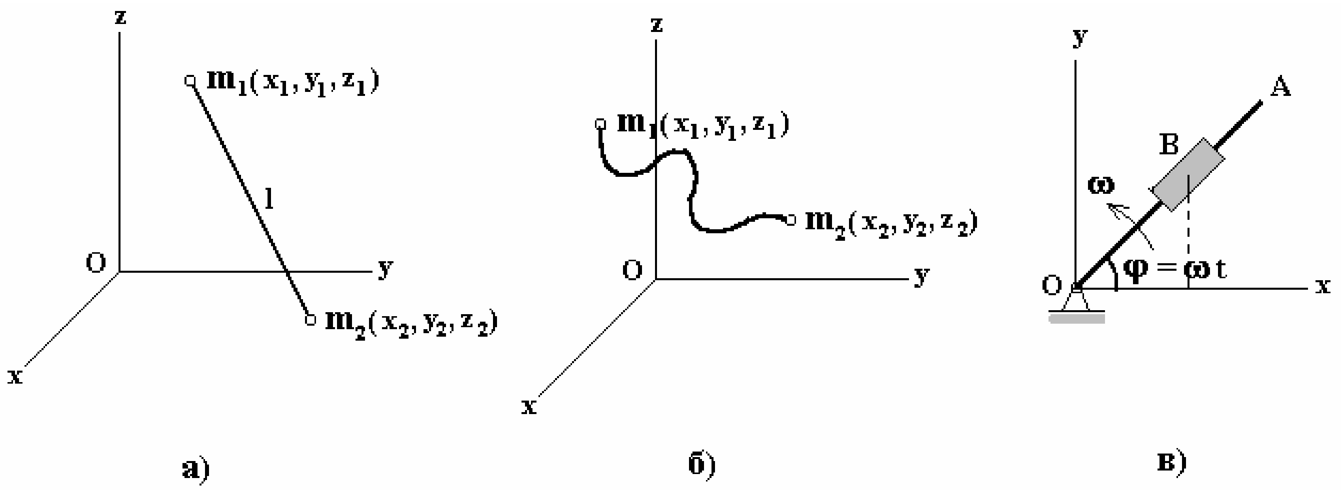
В'язі описуються математично з допомогою рівностей і нерівностей.

Позначимо $\overline{Q}_i$ - активні сили, $\overline{N}_i$ – реакції в'язей. Співвідношення, які зв'язують координати і швидкості точок системи, називаються рівняннями в'язей.

$$f_\nu(t, x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i) = 0$$
$$\nu = 1, 2, ..., s \text{ ( s - кількість в'язей ).}$$

Проведемо класифікацію в'язей по їх рівнянням.

1) Рівняння в'язі, накладеної на дві матеріальні точки, які з'єднані нерозтяжним стержнем довжини $l$ (мал. 38 а). В цьому випадку відстань між двома точками - стала величина $m_1m_2 = l$.




Мал. 38

Використуємо формулу для відстані між двома точками в просторі. Тоді рівняння в'язі в декартовій системі відліку можна записати в вигляді:

$$\left(x_1 - x_2\right)^2 + \left(y_1 - y_2\right)^2 + \left(z_1 - z_2\right)^2 = l^2. \qquad (4.8)$$

2) Нерозтяжна нитка, якою зв'язані дві матеріальні точки (мал. 38 б). В цьому випадку відстань між точками не може перевищувати довжину відповідного відрізка нитки $m_1m_2 \le l$ і рівняння в'язі має вигляд:

$$\left(x_1 - x_2\right)^2 + \left(y_1 - y_2\right)^2 + \left(z_1 - z_2\right)^2 \le l^2. \qquad (4.9)$$

3) Повзун (Мал. 38 в). В цьому випадку по відношенню до повзуна **B** в'язь здійснюється за допомогою кривошипа **OA** , який обертається навколо осі **O** з постійною кутовою швидкістю $\omega$ . Тому координата повзуна **B** повинна бути координатою стержня **OA**

$$y_B = x_B \cdot tg(\omega t) \; . \qquad (4.10)$$

В‘язі, рівняння яких не містять явно час t називаються стаціонарними в‘язями (приклади 1, 2). В протилежному випадку в‘язі називаються нестаціонарними (приклад 3).

В‘язі називаються двосторонніми або затримуючими, якщо рівняння в‘язі виражено рівністю (приклади 1, 3) В протилежному випадку в‘язі називаються односторонніми або незатримуючими (приклад 2).

В‘язі, рівняння яких містить тільки координати точок системи називаються геометричними в’язями. Ці в‘язі накладають обмеження тільки на положення точок системи в просторі. Якщо рівняння в‘язей містять похідні від координат точок, тобто швидкості , то в‘язі називаються кінематичними. Вони накладають обмеження на швидкості точок системи. Розрізняють інтегровані і неінтегровані кінематичні в‘язі. Інтегровані кінематичні в‘язі шляхом інтегрування зводяться до геометричних в‘язей. Геометричні та інтегровані кінематичні в‘язі називаються голономними . В подальшому будемо розглядати тільки голономні в‘язі.

### *2. Поняття можливих переміщень механічної системи.*

При вивченні рівноваги системи тіл методами статики треба розглядати рівновагу кожного з тіл зокрема, замінюючи накладені в‘язі відповідними наперед невідомими реакціями. Коли число тіл в системі велике цей шлях стає громіздким і зв‘язаний з необхідністю розв‘язувати велике число рівнянь з багатьма невідомими.

Принцип можливих переміщень в найбільш загальному вигляді встановлює умови рівноваги кожної механічної системи. Характерна особливість принципу можливих переміщень полягає в тому, що при його застосуванні ефект дії в‘язей враховується не шляхом введення невідомих наперед реакцій, а шляхом розгляду переміщень, які можна надати точкам системи, якщо вивести систему з зайнятого положення (можливих переміщень).

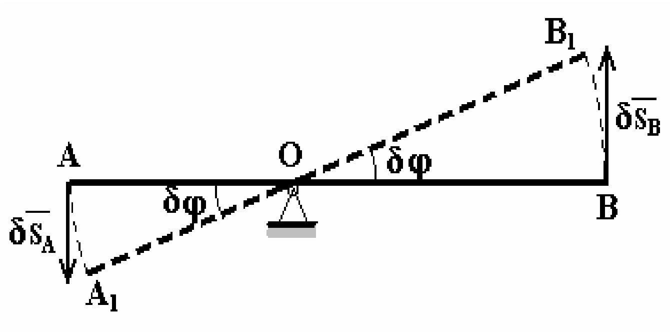
Можливими переміщеннями точок системи називаються нескінченно малі переміщення, які допускаються в‘язями в певний, фіксований момент часу. Можливі переміщення – це уявлювані переміщення, при розгляді яких сили вважаються незмінними, нестаціонарні в‘язі – “зупиненими”. Ці переміщення не залежать від діючих сил.

Можливі переміщення повинні задовольняти наступним умовам: 1) вони повинні бути нескінченно малими, тому що при скінченних переміщеннях система перейде в інше положення, де умови рівноваги можуть бути іншими;

2) вони повинні бути такими, щоб при цьому всі накладені на систему в‘язі зберігались, тому що інакше ми змінимо вигляд розглядуваної механічної системи (система стане іншою).

На відміну від можливих переміщень дійсні переміщення не є уявлюваними, вони відповідають справжньому руху точок системи у просторі та часі під дією сил, які, взагалі кажучи, залежать від часу; нестаціонарні в‘язі при розгляді дійсних переміщень вважаються незупиненими. Отже, при розгляді дійсних переміщень час не фіксується. Надалі дійсне переміщення точки ми позначимо через $d\overline{r}$, можливе – через $\delta\overline{r}$. Відомо, що нескінченно мала зміна функції, яка відбувається внаслідок зміни аргументу є диференціалом цієї функції; коли ж зміна функції відбувається внаслідок зміни вигляду самої функції, то така зміна називається **варіацією функції**. Отже, дійсне переміщення $d\overline{r}$ можна розглядати як диференціал функції $\overline{r} = \overline{r}(t)$, а можливе $\delta\overline{r}$ – як варіацію цієї функції.

Можливі переміщення точок механічної системи розглядають як величини першого порядку мализни, нехтуючи при цьому величинами вищого порядку мализни. Тому криволінійні переміщення точок замінюють прямолінійними відрізками, відкладеними по дотичним до траєкторій точок і позначають $\delta\overline{s}$ (елементарний вектор, напрямлений в сторону переміщення). Так, наприклад, можливим переміщенням важеля **AB** (мал. 39) є його поворот на нескінченно малий кут $\delta\varphi$ навколо точки **O**.




При цьому повороті точки **A** і **B** повинні переміститися по дугам кіл $\cup$**AA1** і $\cup$**BB1** . З точністю до величин першого порядку мализни - ці переміщення замінюють можливими переміщеннями $\delta\overline{s}_A$ і $\delta\overline{s}_B$ в вигляді прямолінійних відрізків, відкладених по дотичним траєкторії

Мал. 39

точок, а по величині рівних:

$\delta s_A = OA\ \delta\varphi$ , $\delta s_B = OB\ \delta\varphi$ .

Якщо в‘язь стаціонарна, то дійсне переміщення є одним з можливих. В випадку нестаціонарних в‘язей дійсні переміщення системи не відносяться до числа її можливих переміщень (тому що в‘язь в цей час рухається).

### *3. Ідеальні в‘язі.*

Накладені на систему в‘язі називаються ідеальними, якщо сума елементарних робіт реакцій цих в‘язей при будь – якому можливому переміщенні системи дорівнює нулю

$$\sum_{i=1}^{n}\delta A_{\bar{N}_i} = 0\ . \qquad (4.11)$$

Ідеальними в‘язями є ідеальна гладка поверхня, ідеальні шарніри, підшипники, підп‘ятники, абсолютно тверді стержні, нерозтяжні абсолютно гнучкі нитки. Абсолютно тверде тіло можна вважати системою з ідеальними в‘язями.

**Принцип можливих переміщень Лагранжа**

Для того, щоб механічна система зі стаціонарними, голономними, затримуючими, ідеальними в‘язями знаходилась в рівновазі, необхідно і достатньо, щоб сума робіт активних сил на будь–якому можливому переміщенні точок системи дорівнювала нулю.

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\delta A_{\overline{Q}_i}=0}. \qquad (4.12)$$

Рівновагою механічної системи називається такий її стан, коли будучи зупиненою, а потім наданою сама собі вона залишається у спокої (не вийде з цього положення під дією прикладених сил).

Доведення:

*Необхідність*. Зупинимо механічну систему. Так як система знаходиться в рівновазі, то вона залишається в спокої, отже кожна точка залишається в спокої. Для " і "- ої точки згідно з основною теоремою статики

$$\overline{Q}_i+\overline{N}_i=0\ , \qquad (4.13)$$

де $\overline{Q}_i$ - головний вектор активних сил, що діють на "і" точку системи; $\overline{N}_i$ - головний вектор реакцій в‘язей, що діють на "і" точку системи. Отже , $\overline{Q}_i$ і $\overline{N}_i$ рівні прямо протилежні сили.

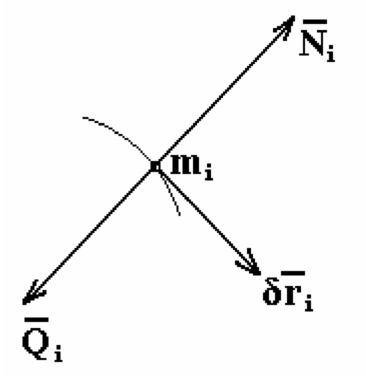
Надамо системі можливе переміщення, тоді " і "- та точка одержить переміщення $\delta\overline{r}_i$ (мал. 40)

Згідно з (4.13) сума робіт сил $\overline{Q}_i$ і $\overline{N}_i$ на переміщенні $\delta\overline{r}_i$ дорівнює нулю.

$$\delta A_i=\overline{Q}_i\delta\overline{r}_i+\overline{N}_i\delta\overline{r}_i=0\,.$$

Такі рівності мають місце для кожної з **n** точок системи. Підсумуємо всі n рівнянь, складених для сил, прикладених до кожної точки системи

$$\sum_{i=1}^{n}\delta A_i=\sum_{i=1}^{n}\overline{Q}_i\delta\overline{r}_i+\sum_{i=1}^{n}\overline{N}_i\delta\overline{r}_i=0$$



Мал. 40

або

$$\sum_{i=1}^{n}\delta A_{\overline{Q}_i}+\sum_{i=1}^{n}\delta A_{\overline{N}_i}=0$$

Якщо накладені на систему в‘язі є ідеальними , то $\sum_{i=1}^{n}\delta A_{\overline{N}_i}=0$

і, отже, $\sum_{i=1}^{n}\delta A_{\overline{Q}_i}=0$

Таким чином, необхідність умови рівноваги (4.12) доведена.

*Достатність*. Доведення проводимо методом від противного. Припустимо, що положення механічної системи, для якого має місце формула (4.12), не є положенням рівноваги. Тоді, будучи зупиненою, система вийде з положення рівноваги під дією сил, одержавши деяке дійсне переміщення.

На цьому переміщенні застосуємо теорему про зміну кінетичної енергії для механічної системи

$$T - T_0 = \sum_{i=1}^{n} \delta A_{\bar{Q}_i} + \sum_{i=1}^{n} \delta A_{\bar{N}_i} .$$

Якщо система з початку була у спокої, то $T_0 = 0$. Тому що в'язі стаціонарні, то дійсне переміщення є одним з можливих і згідно з умовою теореми

$$\sum_{i=1}^{n} \delta A_{\bar{Q}_i} = 0 .$$

З другого боку тому, що система знаходиться під дією ідеальних в`язей маємо

$$\sum_{i=1}^{n} \delta A_{\bar{N}_i} = 0 .$$

Отже прийшли до суперечності, з теореми про зміну кінетичної енергії виті-кає $T = 0$, а з другого боку на дійсному переміщенні ( $V_i^2 \neq 0$ ) $T = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i V_i^2}{2} > 0$. Суперечність випливає з початкового припущення. Отже, механічна система знаходиться в рівновазі, тобто доказана достатність умови рівноваги (4.12) принципу Лагранжа.

Значення принципу можливих переміщень Лагранжа полягає в тому, що він дає в загальній формі умову рівноваги для будь - якої механічної системи, в той час як методи статики потребують розглядання кожного з тіл системи зокрема. При цьому його застосування потребує врахування одних тільки активних сил і дозволяє завчасно виключати з розгляду усі невідомі реакції в‘язей, коли в‘язі ідеальні.

З допомогою принципу можливих переміщень можна:

1) Знаходити яку-небудь невідому силу, не відшукуючи реакції в‘язей.

2) Знайти реакцію в‘язей, не відшукуючи реакції інших. Для цього треба використати принцип звільнення від в‘язей, тобто відкинути в‘язь і прикласти діючу в цій точці силу, отже, цю реакцію переводимо в розряд активних сил.

3) Принцип можна застосовувати для незатримуючих в‘язей, якщо вони не слабнуть.

4) Принцип вірний тільки для ідеальних в‘язей , але його можна застосовувати для в'язей з тертям, якщо усі сили тертя перевести в розряд активних сил.

## § 3. Узагальнений принцип Даламбера – Лагранжа

Принцип можливих переміщень дає загальний метод розв‘язування задач статики. З другого боку, принцип Даламбера дозволяє використовувати методи статики для розв‘язування задач динаміки. Отже, застосовуючи ці два принципи одночасно, ми можемо одержати метод розв‘язування задач динаміки.

Узагальнений принцип Даламбера – Лагранжа.

У випадку руху механічної системи зі стаціонарними, голономними, затримуючими, ідеальними в‘язями сума робіт активних сил і сил інерції на довільному можливому переміщенні системи дорівнює нулю.

$$\sum_{i=1}^{n}\delta A_{\bar{Q}_i}+\sum_{i=1}^{n}\delta A_{\bar{F}_i^{in}}=0\ . \qquad (4.14)$$

Рівняння (4.14) називається <u>загальним рівнянням динаміки</u> .

Доведення.

Розглянемо систему матеріальних точок, на яку накладені стаціонарні, голономні, затримуючі, ідеальні в‘язі. Якщо до всіх точок системи, крім діючих на них активних сил $\bar{Q}_i$ і реакцій в`язей $\bar{N}_i$, додати відповідні сили інерції

$$\bar{F}_i^{in}=-m_i\bar{a}_i\ ,$$

то згідно принципу Даламбера одержана система сил буде знаходитися в рівновазі.

$$\bar{Q}_i+\bar{N}_i+\bar{F}_i^{in}=0\quad (\ i = 1, 2,\ldots,n)$$

Придамо “ i “ – ій точці можливе переміщення $\delta\bar{r}_i$. Система знаходиться в рівновазі, тому має місце принцип можливих переміщень. Помножимо (4.13) на $\delta\bar{r}_i$ і підсумуємо рівняння для n точок розглядуваної механічної системи.

Одержимо
$$\sum_{i=1}^{n}\bar{Q}_i\delta\bar{r}_i+\sum_{i=1}^{n}\bar{N}_i\delta\bar{r}_i+\sum_{i=1}^{n}\bar{F}_i^{in}\delta\bar{r}_i=0\ ,$$

або
$$\sum_{i=1}^{n}\delta A_{\bar{Q}_i}+\sum_{i=1}^{n}\delta A_{\bar{N}_i}+\sum_{i=1}^{n}\delta A_{\bar{F}_i^{in}}=0$$

Так як розглядається система з ідеальними в‘язями, то $\sum_{i=1}^{n}\delta A_{\bar{N}_i}=0$ .

Отже ,
$$\sum_{i=1}^{n}\delta A_{\bar{Q}_i}+\sum_{i=1}^{n}\delta A_{\bar{F}_i^{in}}=0\ .$$

Розглянемо деякі вигляди загального рівняння динаміки. Підставимо значення елементарних робіт

$$\sum_{i=1}^{n}\bar{Q}_i\delta\bar{r}_i+\sum_{i=1}^{n}\bar{F}_i^{in}\delta\bar{r}_i=0\ , \qquad (4.15)$$

або
$$\sum_{i=1}^{n}\bar{Q}_i\delta\bar{r}_i-\sum_{i=1}^{n}m_i\bar{a}_i\delta\bar{r}_i=0 \quad і \quad \sum_{i=1}^{n}(\bar{Q}_i-m_i\bar{a}_i)\delta\bar{r}_i=0. \qquad (4.16)$$

В заданій системі координат активні сили і сили інерції в проекціях на осі мають наступний вигляд $\bar{Q}_i(Q_{ix},Q_{iy},Q_{iz})$ і $\bar{F}_i^{in}(-m_i\ddot{x}_i,-m_i\ddot{y}_i,-m_i\ddot{z}_i)$. Позначимо також через $\delta x_i$ , $\delta y_i$ , $\delta z_i$ - проекції векторів можливих переміщень $\delta\bar{r}_i$ на ті ж осі. Тоді попереднє рівняння робіт можна записати у вигляді

$$\sum_{i=1}^{n}\Big[(Q_{ix}-m_i\ddot{x}_i)\delta x_i+(Q_{iy}-m_i\ddot{y}_i)\delta y_i+(Q_{iz}-m_i\ddot{z}_i)\delta z_i\Big]=0. \qquad (4.17)$$

Рівняння (4.15) - (4.17) дозволяють скласти диференціальні рівняння руху будь - якої механічної системи. Якщо система являє собою сукупність яких – не- будь твердих тіл, то для складання рівнянь потрібно до діючих сил додати прикладену в будь-якому центрі силу, яка дорівнює головному вектору сил інерції і пару з моментом, який дорівнює головному моменту сил інерції відносно цього центра, а потім застосувати принцип можливих переміщень.

**Приклад**. Механічна система (мал. 41) складається з чотирьох тіл: двох ступінчатих шківів (2 і 3), вантажів (1 і 4). Маса кожного шківа рівномірно розподілена по його зовнішньому ободу, причому $m_1$ = 6 кг, $m_2$ = 10 кг, $m_3$ = 8 кг, $m_4$ =1 кг. Ділянка нитки, що з'єднує тіло 1 системи, паралельна похилій площині. Під дією сил ваги і моменту $M_2$ = 0,6 Н м , прикладеного до шківа 2, система починає рухатися зі стану спокою. При русі системи також діє сила тертя ковзання вантажу 1 (коефіцієнт тертя ковзання f = 0,1).

Визначити: значення прискорення тіла 1 , при таких даних: $r_2$ = 0,1 м,

$R_2$ = 0,2м; $r_3$ = 0,2м; $R_3$ = 0,4 м, $\alpha_1 = 30^0$ .

Розв`язання

1. Розглянемо механічну систему в поточний момент часу. Система складається із тіла 1, яке здійснює поступальний рух, ступінчатого шківа 2 , який обертається навколо нерухомої осі, ступінчатого шківа 3, який здійснює плоскопаралельний рух, і тіла 4, яке рухається поступально.

2. Проведемо кінематичний розрахунок. Оскільки потрібно визначити прискорення тіла 1, задамо $V_1$ і виразимо швидкості всіх ланок механізму через швидкість $V_1$ . З мал. 41 очевидно, що

$$\omega_2 = V_1 / R_2 = 5\ V_1 , \qquad \omega_3 = \omega_2\,[r_2 / (R_3+r_3)] = 0{,}833\ V_1,$$
$$V_3 = \omega_3\, r_3 = 0{,}167\ V_1 , \qquad V_4 = V_3 = 0{,}167\ V_1 .$$

На підставі цих співвідношень, інтегруючи, знаходимо зв'язок між можливими переміщеннями

$$\delta\varphi_2 = 5\ \delta S_1 ,\ \delta\varphi_3 = 0{,}833\ \delta S_1 ,\ \delta S_3 = 0{,}167\ \delta S_1 ,\ \delta S_4 = \delta S_3 = 0{,}167\ \delta S_1 .$$

Диференціювання за часом попереднього співвідношення дає залежність між прискореннями

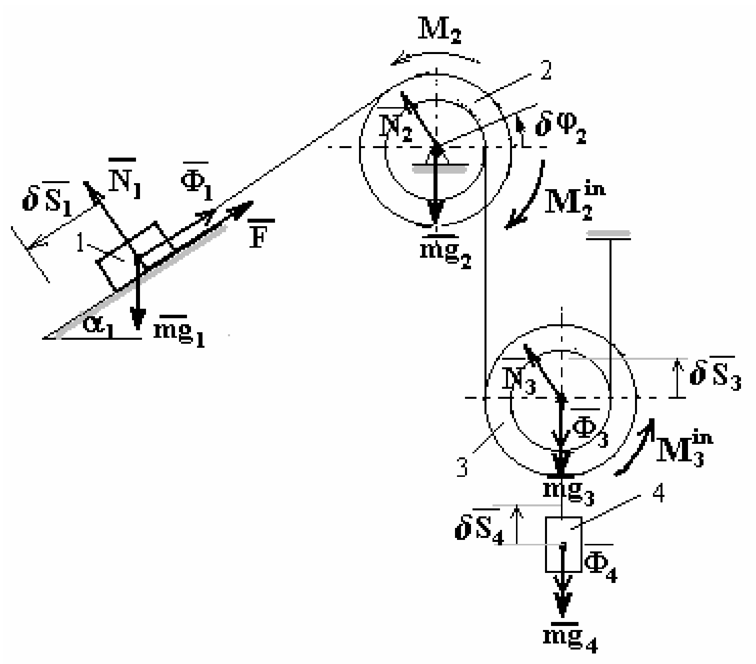
$$\varepsilon_2 = 5\ a_1 ,\ \varepsilon_3 = 0{,}833\ a_1 ,\ a_3 = 0{,}167\ a_1 ,\ a_4 = a_3 = 0{,}167\ a_1 .$$

3. На систему діють активні сили (мал. 41):

$\mathbf{m_1}\overline{g}$, $\mathbf{m_2}\overline{g}$, $\mathbf{m_3}\overline{g}$, $\mathbf{m_4}\ \overline{g}$ **-** сили ваги;

$M_2$ - обертаючий момент;

$\overline{F}$ – сила тертя ковзання.




Мал. 41

4. Умовно до системи прикладаємо сили інерції:

$\overline{\Phi}_1$ - сила інерції, яка обумовлена прискореним поступальним рухом тіла 1;

$M_2^{in}$ - момент сил інерції, який обумовлений прискореним обертанням блока 1;

$\overline{\Phi}_3$ - сила інерції, яка пов'язана з переносним поступальним прискореним рухом тіла 3;

$M_3^{in}$ - момент сил інерції, який обумовлений прискореним відносним обертанням ступінчатого шківа 3;

$\overline{\Phi}_4$ - сила інерції, яка обумовлена прискореним поступальним рухом тіла 4 .

5. Надамо системі можливе переміщення – тіло 1 переміщується на відстань $\delta S_1$ , при цьому блок 2 повернеться на кут $\delta\varphi_2$ , шків 3 - на кут $\delta\varphi_3$ , а його центр переміщується на відстань $\delta S_3$ і тіло 4 одержить переміщення $\delta S_4$ .

3. Для визначення прискорення $\mathbf{a_1}$ скористаємося загальним рівнянням динаміки

$$\sum_{i=1}^{n} \delta A_{\overline{Q}_i} + \sum_{i=1}^{n} \delta A_{\overline{F}_i^{in}} = 0$$

$$m_1 g \sin\alpha\, \delta S_1 - F\delta S_1 - \Phi_1\, \delta S_1 + M_2 \delta\varphi_2 - M_2^{in}\delta\varphi_2 -$$
$$-m_3 g\, \delta S_3 - \Phi_3\, \delta S_3 - M_3^{in}\delta\varphi_3 - m_4 g\, \delta S_4 - \Phi_4\, \delta S_4 = 0 \text{ ,}$$

або

$$m_1 g \sin\alpha - F - \Phi_1 + 5M_2 - 5M_2^{in} -$$
$$-0{,}167 m_3 g - 0{,}167\Phi_3 - 0{,}833 M_3^{in} - 0{,}167 m_4 g - 0{,}167\Phi_4 = 0$$

Для того, щоб отримати із цієї рівності рівняння відносно прискорення першого тіла $\mathbf{a_1}$ , застосуємо математичний пакет Mathcad у символьному режимі

$m1 := 6 \quad m2 := 10 \quad m3 := 8 \quad m4 := 1 \quad f := 0.1 \quad M2 := 0.6$

$r2 := 0.1 \quad R2 := 0.2 \quad r3 := 0.2 \quad R3 := 0.4 \quad \alpha := \frac{\pi}{6} \quad g := 9.807$

$\varepsilon 2 := \frac{a1}{R2} \quad \varepsilon 3 := \varepsilon 2 \cdot \frac{r2}{r3 + R3} \quad a3 := \varepsilon 3 \cdot r3 \quad a4 := a3 \quad I2 := m2 \cdot R2^2 \quad I3 := m3 \cdot R3^2$

$\Phi 1 := m1 \cdot a1 \quad M2in := I2 \cdot \varepsilon 2 \quad \Phi 3 := m3 \cdot a3 \quad M3in := I3 \cdot \varepsilon 3 \quad \Phi 4 := m4 \cdot a4$

$AG1 := m1 \cdot g \cdot \sin(\alpha) \quad AF := -f \cdot m1 \cdot g \cdot \cos(\alpha) \quad A\Phi 1 := -\Phi 1$

$AM2 := M2 \cdot 5 \quad AM2in := -5 \cdot M2in$

$AG3 := -m3 \cdot g \cdot 0.167 \quad A\Phi 3 := -0.167 \cdot \Phi 3 \quad AM3in := -0.833 \cdot M3in$

$AG4 := -m4 \cdot g \cdot 0.167 \quad A\Phi 4 := -0.167 \cdot \Phi 4$

$\Sigma A := AG1 + AF + A\Phi 1 + AM2 + AM2in + AG3 + A\Phi 3 + AM3in + AG4 + A\Phi 4$

$\Sigma A \left| \begin{matrix} expand, a1 \\ float, 6 \end{matrix} \right. \rightarrow 12.5852 - 17.1390 a1$

отже маємо $12{,}5852 - 17{,}139\, a_1 = 0$ , або $a_1 = 0{,}734$ м / с$^2$ .

# ЛІТЕРАТУРА


1. Айзенберг Т.Б., Воронков И.М., Осецкий В.М. Руководство к решению задач по теоретической механике . – М: Высш. шк., 1961.- 390с.
2. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах: – М.: Наука , 1972 ; Т.2. 1972- 640 с.
3. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики : В 2т. - М: Наука, 1979. – Т.2.- 544с.
4. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики : В 2ч, - М. : Наука, 1972. ч.1. - 467с.; ч.2. - 332с.
5. Дьяконов В.П., Абраменкова И.В. Mathcad 7 в математике, физике и в Internet. – М.: Изд-во “Нолидж”, 1998.- 352с.
6. Дьяконов В. П. Mathcad 8 / 2000: специальный справочник. – С.-Петербург: Изд-во «Питер», 2000. – 592с.
7. Ишлинский А.Ю. Механика : идеи, задачи, приложения. – М.: Наука, 1985.- 624с.

8. Кабальский М.М., Кривошей В.Д., Савицкий Н.И., Чайковский Г.Н. Типовые задачи по теоретической механике и методы их решения. - К.: ГИТЛ УССР, 1956, - 511с.
9. Кильчевский Н.А. Курс теоретической механики : В 2т. – М.: Наука, 1972-1977. - Т.1.-1972.- 456с.; Т.2 –1977. - 544с.
10. Кирилов В.Х., Лещенко Д.Д. Курс теоретической механики.–Одесса: Астропринт, 2001. – 264с.
11. Климов Д.М. , Руденко В.М. Методы компьютерной алгебры в задачах механики . – М: Наука, 1989.- 215с.
12. Кошляков В.Н. Краткий курс теоретической механики. Кинематика, кинетика. - К.: Вища шк., 1993.- 311с.
13. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики В 2т. – М.: Наука, 1982. - Т.2. - 640с.
14. Маркеев А.П. Теоретическая механика. – М.: Наука, 1990. – 416с.
15. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. – М.: Наука, 1986.- 448с.
16. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. – М.: Высш. шк., 1990.- 607с.
17. Новожилов И.В, Зацепин М.Ф. Типовые расчеты по теоретической механике на базе ЭВМ. – М.: Высш. шк., 1986.-134с.
18. Павловский М.А., Путята Т.В. Теоретическая механика. – К: Вища шк., 1985.-328с.
19. Павловский М.А., Акинфиева Л.Ю., Бойчук О.Ф. Теоретическая механи-ка. Динамика. – К.: Вища шк., 1990.- 480с.
20. Павловский М.А., Акінфієва Л.Ю., Юрокін А.І., Свістунов С.Я. Кінематика та динаміка точки. Комп`ютерний курс. – К.: Либідь, 1993.- 248 с. +дискета.
21. Павловский М.А. Теоретична механіка.– Київ: Техніка, 2002.–510с.
22. Путята Т.В., Фрадлін Б.Н., Методика розв'язування задач з теоретичної механіки. – К.: Рад. шк., 1952.- 366с.
23. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / Под ред. А.А. Яблонского. – М.: Высш. шк., 1985.- 366с.
24. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Наука, 1986.- 416с.
25. Теоретическая механика. Вывод и анализ уравнений движения на ЭВМ / В.Г. Веретенников, И.И. Карпов, А.П. Маркеев и др. - М.: Высш. шк., 1990.- 174с.
26. Тюлина И.А. История и методология механики. – М.: Изд-во МГУ, 1979.- 282с.
27. Харламов П.В. Очерки об основаниях механики. – К.: Наук. думка, 1995.- 407с.
28. Яблонский А.А. Курс теоретической механики Ч.2. Динамика. –М.: Высш. шк., 1977.- 531с.
29. Mathcad 6.0 + Финансовые , инженерные и научные расчеты в среде Windows 95. – Перевод с анг. – М.: Информац. – издательский дом “Филинъ”, 1996. - 712с.