ResearchGate

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: https://www.researchgate.net/publication/288828463

Возмущенные вращения твердого тела с распределением масс, близким к случаю Лагранжа

Article · January 1997

CITATIONS
0

READS
3

1 author:

Dmytro Leshchenko
Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

219 PUBLICATIONS 235 CITATIONS

SEE PROFILE

Some of the authors of this publication are also working on these related projects:

Project

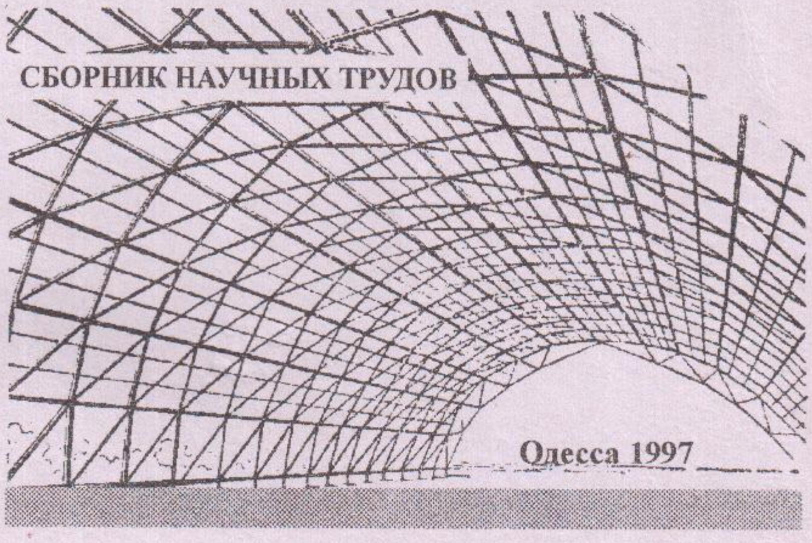
Evolution of rotations of a rigid body close to the Lagrange case under the action of nonstationary torque of forces View project

All content following this page was uploaded by Dmytro Leshchenko on 31 December 2015.

The user has requested enhancement of the downloaded file.

Посвящается памяти академика
Инженерной академии Украины,
доктора технических наук,
профессора М. Л. Бурышкина

МЕХАНИКА СИММЕТРИЧНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ



СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

Одесса 1997

ость $B_0 = E_0 I_0$ определяются до начала воздейств твия.

ремени эксплуатации должно соблюдаться услови

$$t_э); \qquad (29)$$

$$t_э).$$

рвоначальная площадь поперечного сечения пр ли второго условия (29) будет определяться по ф

$$\frac{{}_e(t)[1-\alpha(t)]}{R_0(t)}; \qquad (30)$$

$$\frac{\varphi(t)A_b(t)[1-\alpha(t)]}{(t)R_b(t)}; \qquad (31)$$

нимается наибольшее.

$t_{эс}, t_{эb}, P_e(t_э), P_b(t_э)$ – достаточно в форм $_0(t)$ и $R_b(t)$ умножить на $\varphi(t_э)$.

то в этом случае разрушение области воздей нию гибкости. Ограничивая допускаемое зна лим время достижения этой гибкости

$$2 \qquad (32)$$

изойдет снижение величины критической си

Литерату

чета и проектирования конструкций повышенной ст редах. – Дис. на соиск. учен. степ. д.т.н., 1982. – 525с.

И.С., Рысева О.П. Действие углекислого газа на плиты промышленных зданий и сооруж ектура, 1986, N 12. – С. 4 – 6.

Возмущенные вращения твердого тела с распределением масс, близким к случаю Лагранжа

Лещенко Д.Д., доктор физ.-мат. наук, проф.

Одесская государственная академия холода Украина

Светлой памяти моего старшего товарища
М.Л.Бурышкина посвящается

Исследованию возмущенных вращательных движений твердого тела, близких к случаю Лагранжа, посвящены работы [1-3].

Рассмотрим движение несимметричного тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки О под действием одной только силы тяжести $\vec{G}$. Уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned}
&A\dot{p} + (C-B)qr = mg(z_c \sin\theta\cos\varphi - y_c\cos\theta)\\
&B\dot{p} + (A-C)pr = mg(x_c\cos\theta - z_c\sin\theta\sin\varphi)\\
&C\dot{r} + (B-A)qp = mg\sin\theta(y_c\sin\theta\sin\varphi - x_c\sin\theta\cos\varphi) \qquad (1)\\
&\dot{\psi} = (p\sin\varphi + q\cos\varphi)\operatorname{cosec}\theta,\ \dot{\theta} = \mathrm{p}\cos\varphi - \mathrm{q}\sin\varphi\\
&\dot{\varphi} = \mathrm{r} - (\mathrm{p}\sin\varphi + \mathrm{q}\cos\varphi)\operatorname{ctg}\theta
\end{aligned}$$

Динамические уравнения (1) записаны в проекциях на главные оси инерции тела, проходящие через точку О . Здесь p, q, r, – проекции вектора угловой скорости на эти оси; x_c, y_c, z_c – координаты центра тяжести тела относительно неподвижной точки О ; φ, θ, φ – углы Эйлера [5], m – масса тела, g – ускорение силы тяжести.

Рассмотрим случай тяжелого твердого тела, у которого эллипсоид инерции относительно точки О близок к эллипсоиду вращения, так что его главные моменты инерции имеют вид

$$A = A^0(1+\varepsilon\sigma_1),\ \mathrm{B} = A^0(1+\varepsilon\sigma_2),\ \mathrm{C} \neq \mathrm{A} \qquad (2)$$

где σ_1, σ_2 – безразмерные постоянные порядка единицы, A^0– характерная величина моментов инерции, $\varepsilon << 1$ – малый параметр. Кроме того, центр тяжести смещен относительно точки O^*, лежащей на главной оси инерции, момент инерции относительно которой равен С, на величину порядка ε:

$$x_c = \varepsilon x_1 l,\ y_c = \varepsilon y_1 l,\ z_c = l, \qquad (3)$$

где x_1, y_1 – безразмерные величины, которые считаются конечным сравнению с малым параметром ε, ℓ – расстояние от неподвижной точ O до центра тяжести тела.

Приведем систему уравнений (1) к системе динамических уравнени Эйлера вида (1.1) статьи [3]:

$$A\dot{p} + (C - A)qr = k\sin\theta\cos\varphi + M_1$$

$$A\dot{q} + (A - C)pr = -k\sin\theta\sin\varphi + M_2 \qquad (4)$$

$$C\dot{r} = M_3,\ \mathrm{M_i} = M_i(p,q,r,\psi,\theta,\varphi)\ \ (\mathrm{i}=1,2,3)$$

Последние три кинематические уравнения (1) при этом не изменя ся. Здесь M_i (i = 1, 2, 3) – проекции вектора возмущающего момента главные оси инерции, проходящие через точку O .

Предполагается, что на тело действует восстанавливающий момен максимальная величина которого равна k. В случае тяжелого волч k = mgl.

В данной работе, как и в [3], делаются следующие исходн предположения:

$$p^2 + q^2 << r^2,\ Cr^2 >> k,\ \ |M_i| << k\ (i=1,2,3) \qquad (5)$$

Предположения (5) означают, что направление угловой скорост ла близко к оси динамической симметрии; угловая скорость достаточ велика, так что кинетическая энергия тела много больше потенциаль энергии, обусловленной моментом силы тяжести; возмущающие момен малы по сравнению с моментом силы тяжести.

Неравенства (5) позволяют ввести малый параметр ε<<1 и полож

$$p = \varepsilon P,\ \mathrm{q} = \varepsilon \mathrm{Q},\ \mathrm{k} = \varepsilon \mathrm{K}$$

$$\mathrm{M_i} = \varepsilon^2 M_i^*(p,q,r,\psi,\theta,\varphi)\ \ (\mathrm{i}=1,2,3) \qquad (6)$$

Проекции вектора возмущающего момента на главные оси инерци проходящие через точку O, с учетом предположений (5), (6) имеют ви

$$M_1^* = -K\sigma_1\sin\theta\cos\varphi - Ky_1\cos\theta + Qr[\sigma_1(C - A^0) + \sigma_2 A^0]$$

$$M_2^* = K\sigma_2\sin\theta cKx_1\cos\theta + \Pr[\sigma_2(A^0 - C) - \sigma_1 A^0] \qquad (7)$$

$$M_3^* = K\sin\theta(y_1\sin\varphi - x_1\cos\varphi)$$

Ставится задача исследования асимптотичес
и (4), если выполнены условия (2), (3), (5),
ом усреднения [4] на интервале времени пор
Получены усредненные системы уравнений
м приближении по схеме, предложенной в р
После ряда преобразований решение
ений первого приближения для медленных
вид

$$= a^0\cos\eta t - b^0\sin\eta t,\ b^{(1)} = b^0\cos\eta t$$

$$= 0,\ \psi^{(1)} = \varepsilon KC^{-1}r_0^{-1}t + \psi_0,\ \theta^{(1)} = \theta_0,$$

$$= C(A^0)^{-1}r_0 t - \varepsilon tKC^{-1}r_0^{-1}\cos\theta_0 + \varphi_0$$

$$= n_0 t,$$

a^0. b^0, n_0, δ определяются следующим образом

$$= P_0 - KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\sin\varphi_0,\ \mathrm{b} = -\mathrm{Q} + KC^{-1}r_0$$

$$= n_0 t,\ \mathrm{n_0} = (C - A)A^{-1}r_0 \neq 0,\ |\mathrm{n_0}/r_0| \leq 1,$$

Здесь P_0, Q_0 – начальные значения новых пере
сно (6), а переменная $\wp = \wp_0$ имеет смысл
На основании приведенных формул опреде
ессии и нутации во втором приближении. Со
ной в [3],

$$) = \psi_0 + \varepsilon KC^{-1}r_0^{-1}t + W^{(1)}$$

$$= \varepsilon^2 tA^0K^2C^{-3}r_0^{-3}\cos\theta_0 - 1/2\varepsilon^2 tKC^{-1}r_0^{-1}(\sigma$$

$$C^{-1}A^0r_0^{-1}\operatorname{cosec}\theta_0(a^{02} + b^{02})^{1/2}\sin(\alpha^{(1)} + \xi)$$

$$\xi = a^{(1)}(a^{02} + b^{02})^{-1/2},\ \theta(\mathrm{t}) = \theta_0.$$

Здесь в выражении для ψ ограниченное осц
ржит ненулевые начальные данные. Характер
малых колебаний виден из формул [8] для a
вой скорости прецессии $\omega_p = KC^{-1}r^{-1}$ изве
рии гироскопов [5]. Найденное слагаемое
мулу для рассматриваемой задачи.

$$, z_c = 1, \qquad (3)$$

ые величины, которые считаются конечными

раметром ε, ℓ – расстояние от неподвижной точ

ела.

уравнений (1) к системе динамических уравне

и [3]:

$$k \sin\theta \cos\varphi + M_1$$

$$-k \sin\theta \sin\varphi + M_2 \qquad (4)$$

$$(p,q,r,\psi,\theta,\varphi) \ \ (i = 1,2,3)$$

нематические уравнения (1) при этом не изменя

3) – проекции вектора возмущающего момент

проходящие через точку O.

то на тело действует восстанавливающий мом

на которого равна k. В случае тяжелого во

, как и в [3], делаются следующие исхо

$$> k, \ \ |M_i| << k \ (i = 1,2,3) \qquad (5)$$

5) означают, что направление угловой скорост

мической симметрии; угловая скорость достат

ическая энергия тела много больше потенциа

й моментом силы тяжести; возмущающие моме

моментом силы тяжести.

озволяют ввести малый параметр ε<<1 и полож

$$= \varepsilon K \qquad (6)$$

$$,\psi,\theta,\varphi) \ \ (i = 1,2,3)$$

а возмущающего момента на главные оси ине

чку O, с учетом предположений (5), (6) имеют

$$s\varphi - Ky_1 \cos\theta + Qr[\sigma_1(C - A^0) + \sigma_2 A^0]$$

$$\cos\theta + \Pr[\sigma_2(A^0 - C) - \sigma_1 A^0] \qquad (7)$$

$$\varphi - x_1 \cos\varphi)$$

Ставится задача исследования асимптотического поведения системы или (4), если выполнены условия (2), (3), (5), (6). Будем пользоваться одом усреднения [4] на интервале времени порядка ε^{-1}.

Получены усредненные системы уравнений движений в первом и ром приближении по схеме, предложенной в работе [3].

После ряда преобразований решение усредненной системы внений первого приближения для медленных и быстрых переменных еет вид

$$= a^0 \cos\eta t - b^0 \sin\eta t, \ b^{(1)} = b^0 \cos\eta t + a^0 \sin\eta t,$$

$$= 0, \ \psi^{(1)} = \varepsilon K C^{-1} r_0^{-1} t + \psi_0, \ \theta^{(1)} = \theta_0, \qquad (8)$$

$$= C(A^0)^{-1} r_0 t - \varepsilon t K C^{-1} r_0^{-1} \cos\theta_0 + \varphi_0,$$

$$= n_0 t,$$

a^0, b^0, n_0, δ определяются следующим образом [3]:

$$= P_0 - KC^{-1} r_0^{-1} \sin\theta_0 \sin\varphi_0, \ b = -Q + KC^{-1} r_0^{-1} \sin\theta_0 \sin\varphi_0,$$

$$= n_0 t, \ n_0 = (C - A) A^{-1} r_0 \neq 0, \ |n_0 / r_0| \leq 1, \ r = r_0 + \varepsilon\delta.$$

Здесь P_0,Q_0 – начальные значения новых переменных P,Q, введенных асно (6), а переменная $\wp = \wp_0$ имеет смысл фазы колебаний.

На основании приведенных формул определена эволюция углов ессии и нутации во втором приближении. Согласно процедуре, изложной в [3],

$$) = \psi_0 + \varepsilon K C^{-1} r_0^{-1} t + W^{(1)}$$

$$= \varepsilon^2 t A^0 K^2 C^{-3} r_0^{-3} \cos\theta_0 - 1/2 \varepsilon^2 t K C^{-1} r_0^{-1} (\sigma_1 + \sigma_2) -$$

$$C^{-1} A^0 r_0^{-1} \operatorname{cosec}\theta_0 (a^{02} + b^{02})^{1/2} \sin(\alpha^{(1)} + \xi) \qquad (9)$$

$$\xi = a^{(1)} (a^{02} + b^{02})^{-1/2}, \ \theta(t) = \theta_0.$$

Здесь в выражении для ψ ограниченное осциллирующее слагаемое ржит ненулевые начальные данные. Характер медленного изменения малых колебаний виден из формул [8] для $a^{(1)}$,$\alpha^{(1)}$. Выражение для вой скорости прецессии $\omega_p = KC^{-1} r^{-1}$ известно из приближенной ии гироскопов [5]. Найденное слагаемое $W^{(1)}(\varepsilon,t)$ уточняет эту мулу для рассматриваемой задачи.

Отметим, что в формуле (9) для $W^{(1)}$ нет зависимости от [illegible] центра масс от оси тела, задаваемой выражениями (3). Безра[illegible] личины x_1,y_1 выпадают при усреднении. Кроме того, действи[illegible] возмущений не приводит к изменению угла нутации даже [illegible] приближении.

Заметим, что если в рассмотренном примере ограни[illegible] строением первого приближения, то в формулу для угла пре[illegible] войдут параметры возмущающих моментов и поэтому влияние [illegible] ний на регулярную прецессию тела не будет учтено. Таким обра[illegible] строение второго приближения является в данном случае суще[illegible]

Литература

1. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноусько Ф.Л. Возмущенные [illegible] твердого тела, близкие к случаю Лагранжа // ПММ. – 1979. – Т.43, N 5. – [illegible] – 778.
2. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноусько Ф.Л. Возмущенные [illegible] твердого тела, близкие к регулярной прецессии // Изв. АН СССР. МТТ. – [illegible] – N 5. – С. 3 – 10.
3. Лещенко Д.Д., Шамаев А.С. Возмущенные вращательные движения тв[illegible] ла, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа // Изв. АН СССР. МТТ. [illegible] 1987. – N 6. – С. 8 – 17.
4. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории [illegible] линейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 503 с.
5. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. Ч.2. – М.: Наука, [illegible] 332 с.

Метод фрагментов при уточнении расчета в локальных зонах

Перельмутер А.В., доктор техн. [illegible]

УКРНИИПРОЕКТСТАЛЬКОНСТРУКЦИЯ, Г. КИЕВ. УКРАИНА

То, что мы обычно называем симметричной конструкцией, ча[illegible] го является таковой лишь с определенной степенью идеализации. На [illegible] тике конструкции, отличающиеся от строго симметричных наличием [illegible] кальных особенностей, встречаются очень часто, и это обстоятельств[illegible] связано с определенными затруднениями. Явный учет указанных осо[illegible] ностей лишает нас преимуществ, которые связаны с использовани[illegible] свойств симметрии при расчете упругих систем [1]. Поэтому естестве[illegible] представляется следующая двухэтапная процедура:

а) Пренебрегая локальными особенност
ния, строится загрубленная расчетная схема
рая обладает всеми свойствами симметрии, и

б) Выделяется фрагмент конструкции,
ная особенность. К этому фрагменту прикла
ные при отбрасывании остальной части конст
венно приложенные к выделенному фрагмен
с использованием более детальной расчетной
ким образом решения используется та часть,
расположенным на некотором удалении от гр

Такой подход согласуется с практикой
для анализа различных особенностей поведе
но, он требует определенной интуиции и о
сти, связанной с наличием неустранимой
ленной задачи. Представленный ниже анал
погрешности должен облегчить выбор реше

Анализ основан на сопоставлении дву
торых является подробной и детализирова
жит полное описание локальной особенно
потом рассматривается при расчете фрагме
ная схема описывается системой уравнений

$$[K]\{u\} = \{p\}.$$

Вторая расчетная схема загрублена и
для нее выбран вектор основных неизвест
много меньше размерности вектора $\{u\}$,
терполяционным соотношением

$$\{u\} = [D]\{u_o\}.$$

Тогда сужение матрицы жесткости $[K]$ на

выглядит как

$$[K_o] = [D]^T[K][D],$$

при этом $[K_o]$ – матрица симметризованн
с использованием методов из [1] легко

уравнений

$$[K_o]\{u_o\} = [D]^{\mathrm{T}}p\}$$

или может быть получена обратная матр

Если считать, что искомое решен
через решение системы (4) как интерпо