

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/317037490>

Быстрое движение вокруг неподвижной точки тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде

Article · January 1982

CITATIONS

3

READS

3

3 authors, including:



Dmytro Leshchenko

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

219 PUBLICATIONS **230** CITATIONS

[SEE PROFILE](#)



Leonid D Akulenko

Russian Academy of Sciences

541 PUBLICATIONS **1,164** CITATIONS

[SEE PROFILE](#)

Some of the authors of this publication are also working on these related projects:



Numerical Solution of Eigenproblems and Natural Vibrations of Mechanical Systems [View project](#)



Evolution of rotations of a rigid body close to the Lagrange case under the action of nonstationary torque of forces [View project](#)

УДК 531.381

**БЫСТРОЕ ДВИЖЕНИЕ ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ
ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ**

АКУЛЕНКО Л. Д., ЛЕЩЕНКО Д. Д., ЧЕРНОУСЬКО Ф. Л.

Исследуется быстрое вращательное движение тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки при наличии внешнего сопротивления. Момент сил сопротивления предполагается линейной функцией угловой скорости. Анализируется система, полученная после усреднения по движению Эйлера - Пуансо, в случае быстрых вращений.

1. Рассмотрим быстрое движение вокруг неподвижной точки O несимметричного тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде. Быстрыми движениями будем называть такие, для которых момент внешних сил относительно неподвижной точки мал по сравнению с текущим значением кинетической энергии вращений.

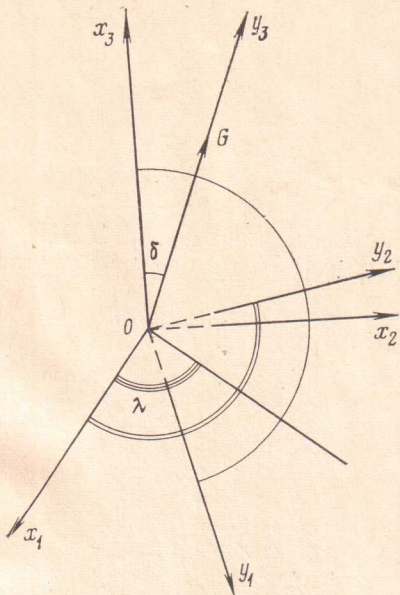
Введем три декартовы системы координат. Оси Ox_i ($i=1, 2, 3$) неподвижны, ось Ox_3 направлена вертикально вверх. Оси Oz_i связаны с главными осями инерции твердого тела. Ось Oy_3 системы Oy_i направлена по вектору кинетического момента твердого тела \mathbf{G} относительно точки O , ось Oy_2 лежит в горизонтальной, а Oy_1 - в вертикальной плоскости. Углы λ и δ определяют направление вектора \mathbf{G} в пространстве, как показано на фиг. 1.

Формулы для косинусов углов между осями приведены в таблице.

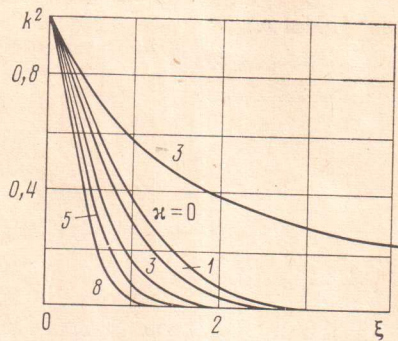
	Oz_1	Oz_2	Oz_3
Oy_1	$\alpha_{11} = \cos \varphi \cos \psi -$ $-\cos \theta \sin \varphi \sin \psi$	$\alpha_{12} = -\sin \varphi \cos \psi -$ $-\cos \theta \cos \varphi \sin \psi$	$\alpha_{13} = \sin \theta \sin \psi$
Oy_2	$\alpha_{21} = \cos \varphi \sin \psi +$ $+\cos \theta \sin \varphi \cos \psi$	$\alpha_{22} = -\sin \varphi \sin \psi +$ $+\cos \theta \cos \varphi \cos \psi$	$\alpha_{23} = -\sin \theta \cos \psi$
Oy_3	$\alpha_{31} = \sin \theta \sin \varphi$	$\alpha_{32} = \sin \theta \cos \varphi$	$\alpha_{33} = \cos \theta$

Здесь θ, φ, ψ - углы Эйлера, определяющие ориентацию осей Oz_i относительно осей Oy_i .
Уравнения движения тела относительно неподвижной точки запишем в форме [1]:

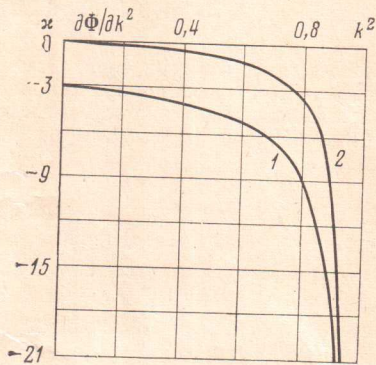
$$\begin{aligned}
 dG/dt &= L_3; \quad d\delta/dt = L_1/G; \quad d\lambda/dt = L_2/(G \sin \delta) \\
 \frac{d\theta}{dt} &= G \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) + \frac{L_2 \cos \psi - L_1 \sin \psi}{G} \\
 \frac{d\varphi}{dt} &= G \cos \theta \left(\frac{1}{C} - \frac{\sin^2 \varphi}{A} - \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right) + \frac{L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi}{G \sin \theta} \\
 \frac{d\psi}{dt} &= G \left(\frac{\sin^2 \varphi}{A} + \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right) - \frac{L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi}{G} \operatorname{ctg} \theta - \frac{L_2}{G} \operatorname{ctg} \delta
 \end{aligned} \tag{1.1}$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Здесь L_i — моменты внешних сил относительно осей Oy_i , G — величина кинетического момента, A, B, C — главные моменты инерции тела относительно осей Oz_i .

Проектирование вектора \mathbf{G} на оси связанной системы координат Oz_i дает

$$Ap = G \sin \theta \sin \varphi, Bq = G \sin \theta \cos \varphi, Cr = G \cos \theta \quad (1.2)$$

Здесь p, q, r — проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ абсолютной угловой скорости вращения тела на оси Oz_i .

В некоторых случаях удобно вместо угла θ использовать в качестве переменной кинетическую энергию

$$T = \frac{G^2}{2} \left[\left(\frac{\sin^2 \varphi}{A} + \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right) \sin^2 \theta + \frac{\cos^2 \theta}{C} \right] \quad (1.3)$$

производная которой имеет вид

$$T' = \frac{2T}{G} L_3 + G \sin \theta \left[\cos \theta \left(\frac{\sin^2 \varphi}{A} + \frac{\cos^2 \varphi}{B} - \frac{1}{C} \right) (L_2 \cos \psi - L_1 \sin \psi) + \sin \theta \cos \varphi \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) (L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi) \right] \quad (1.4)$$

Проекции L_i момента внешних сил, складывающихся из сил тяжести и сил внешнего сопротивления, на оси Oy_i записываются с учетом (1.2) в виде

$$L_i = -mg \cos \delta \sum_{j=1}^3 a_j \alpha_{2j} - G \sum_{i=1}^3 \left(\frac{I_{1i}}{A} \alpha_{31} \alpha_{1i} + \frac{I_{2i}}{B} \alpha_{32} \alpha_{1i} + \frac{I_{3i}}{C} \alpha_{33} \alpha_{1i} \right)$$

Handwritten notes:
 $T \sim G^2/A$
 $T \sim G^2/A + \dots$
 $T \sim G^2/A + \dots$

$$\begin{aligned}
L_2 &= mg \sum_{j=1}^3 a_j (\alpha_{3j} \sin \delta + \alpha_{1j} \cos \delta) - \\
&- G \sum_{i=1}^3 \left(\frac{I_{1i}}{A} \alpha_{31} \alpha_{21} + \frac{I_{2i}}{B} \alpha_{32} \alpha_{22} + \frac{I_{3i}}{C} \alpha_{33} \alpha_{23} \right) \\
L_3 &= -mg \sin \delta \sum_{j=1}^3 a_j \alpha_{2j} - G \sum_{i=1}^3 \left(\frac{I_{1i}}{A} \alpha_{31}^2 + \frac{I_{2i}}{B} \alpha_{32}^2 + \frac{I_{3i}}{C} \alpha_{33}^2 \right)
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Здесь предполагается, что момент сил сопротивления L^* может быть представлен в виде $L^* = I \cdot \omega$, где тензор I имеет постоянные компоненты I_{ij} в системе Oz_i , связанной с телом [2]. Так как изучается быстрое движение, то предполагается малым отношение $mga/T \sim \varepsilon \ll 1$, где a — расстояние от центра масс до неподвижной точки. Сопротивление среды предполагается слабым того же порядка малости: $\|I\|/G \sim \varepsilon \ll 1$, где $\|I\|$ — норма матрицы коэффициентов сопротивления.

Исследуем решение системы (1.1), (1.4) при малом ε на большом промежутке времени $t \sim \varepsilon^{-1}$. Для решения задачи применим метод усреднения [3]. Погрешность усредненного решения для медленных переменных составляет величину порядка ε на интервале времени, за который тело совершит $\sim \varepsilon^{-1}$ оборотов. Усреднение по движению Эйлера — Пуансо проводим по методике работ [1, 4]. Уравнения усредненного движения были ранее получены в [5].

2. Рассмотрим невозмущенное движение ($\varepsilon = 0$), когда моменты внешних сил равны нулю. В этом случае вращение твердого тела является движением Эйлера — Пуансо. Величины G, δ, λ, T обращаются в постоянные, а θ, φ, ψ — некоторые функции времени t . Медленными переменными в возмущенном движении будут G, δ, λ, T , а быстрыми — углы Эйлера θ, φ, ψ .

Примем для определенности $A > B > C$ и рассмотрим движение при условии $2TA \geq G^2 \geq 2TB$, соответствующем траекториям вектора кинетического момента, охватывающим ось Oz_1 [6]. Введем величину

$$k^2 = \frac{(B-C)(2TA - G^2)}{(A-B)(G^2 - 2TC)} \quad (0 \leq k^2 \leq 1) \tag{2.1}$$

представляющую собой в невозмущенном движении постоянную — модуль эллиптических функций.

Для построения усредненной системы первого приближения подставим решение невозмущенного движения Эйлера — Пуансо [6] в правые части уравнений (1.1), (1.4) и проведем усреднение по переменной ψ , а затем по времени t с учетом зависимости θ, φ от t [1]. При этом для медленных усредненных переменных сохраняются прежние обозначения. В результате получим [5]

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{\pi m g a_1}{2G^2 K(k)} \sqrt{\frac{A(G^2 - 2TC)}{A - C}}, \quad \delta' = 0 \\
G' &= -\frac{G}{A(B-C) + C(A-B)k^2} \left\{ I_{22}(A-C) \left[1 - \frac{E(k)}{K(k)} \right] + \right. \\
&\quad \left. + I_{33}(A-B) \left[k^2 - 1 + \frac{E(k)}{K(k)} \right] + I_{11}(B-C) \frac{E(k)}{K(k)} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T^* = & -\frac{2T}{A(B-C)+C(A-B)k^2} \left\{ I_{22}(A-C) \left[1 - \frac{E(k)}{K(k)} \right] + \right. \\
& + I_{33}(A-B) \left[k^2 - 1 + \frac{E(k)}{K(k)} \right] + \frac{(A-B)(A-C)(B-C)}{B-C+(A-B)k^2} \times \\
& \times \left\{ \frac{I_{33}}{C} \left[k^2 - 1 + \frac{E(k)}{K(k)} \right] + \frac{I_{22}}{B} (1-k^2) \left[1 - \frac{E(k)}{K(k)} \right] \right\} + \\
& \left. + \frac{I_{11}(B-C)[A(B-C)+C(A-B)k^2]}{A[B-C+(A-B)k^2]} \cdot \frac{E(k)}{K(k)} \right\} \quad (2.2)
\end{aligned}$$

Здесь $K(k)$, $E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода. Дифференцируя выражение (2.1) для k^2 и используя два последних уравнения (2.2), получаем дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned}
\frac{dk^2}{d\xi} &= (1-\kappa)(1-k^2) - [(1-\kappa) + (1+\kappa)k^2] \frac{E(k)}{K(k)} \\
\kappa &= (2I_{22}AC - I_{11}BC - I_{33}AB) / [(I_{33}A - I_{11}C)B] \\
\xi &= (t - t_*) / N, \quad N = AC / (I_{33}A - I_{11}C) \quad (2.3)
\end{aligned}$$

Здесь t_* — постоянная. Значению $k^2=1$ отвечает равенство $2TB=G^2$, что соответствует сепаратрисе для движения Эйлера — Пуансо. Если для некоторого решения уравнения (2.3) равенство $k^2=1$ достигается, то выберем t_* так, чтобы $k^2=1$ при $\xi=0$, $t=t_*$.

Из уравнений (2.2) следует, что наличие сопротивления среды приводит к эволюции как кинетической энергии тела T , так и величины кинетического момента G . Непосредственно видно, что в первом приближении на изменение T и G оказывает влияние только сила сопротивления, причем в уравнения входят лишь диагональные коэффициенты I_{ii} матрицы момента трения. Члены, содержащие недиагональные компоненты I_{ij} ($i \neq j$), выпадают при усреднении. Угловая скорость вращения вектора кинетического момента вокруг вертикали λ^* зависит как от действия силы тяжести, так и от силы сопротивления среды. Отметим, что действие этих сил не приводит к изменению угловой переменной δ и отклонение от вертикали остается постоянным в указанном приближении.

Уравнение (2.3) описывает усредненное движение конца вектора кинетического момента G на сфере радиуса G . Третье уравнение (2.2) описывает изменение радиуса сферы с течением времени.

Выражение, стоящее в фигурных скобках правой части уравнения (2.2) для G , положительно (при $A > B > C$), так как справедливы неравенства $(1-k^2)K \leq E \leq K$ [7]. Каждый коэффициент при I_{ii} является неотрицательной функцией k^2 , причем одновременно они все в нуль обратиться не могут. Поэтому $dG/dt < 0$ при $G > 0$, т. е. переменная G строго убывает для любых $k^2 \in [0, 1]$. Аналогично показывается, что кинетическая энергия также строго убывает.

Уравнения (2.2), (2.3) для G , T , k^2 допускают интегрирование в квадратурах. Запишем их в виде

$$G' = -Gf_G(k^2), \quad T' = -Tf_T(k^2), \quad k^{2'} = f_k(k^2) \quad (2.4)$$

где f_G , f_T и f_k — функции, определенные в (2.2), (2.3). Отсюда находим

$$G(k^2) = G_0 \exp \left[- \int_{k_0^2}^{k^2} F_G(l) dl \right], \quad T(k^2) = T_0 \exp \left[- \int_{k_0^2}^{k^2} F_T(l) dl \right]$$

$$F_{G,T}(k^2) = \frac{f_{G,T}(k^2)}{f_k(k^2)}, \quad \int_{k_0^2}^{k^2} \frac{dl}{f_k(l)} = t - t_0 \quad (2.5)$$

Оценивая функцию f_G из (2.4), находим, что справедливо дифференциальное неравенство

$$-f_G^- \leq G^*/G \leq -f_G^+, \quad k^2 \in [0, 1] \quad (2.6)$$

где f_G^-, f_G^+ — положительные постоянные. Следовательно, интегрируя (2.6), получим оценку для G

$$G_0 \exp(-f_G^- t) \leq G \leq G_0 \exp(-f_G^+ t). \quad (2.7)$$

Аналогичные неравенства справедливы для T .

3. Основным этапом в исследовании движения тела является анализ уравнения (2.3). Интересно, что (2.3) совпадает с уравнением, полученным для случая свободного пространственного движения тела с полостью, заполненной жидкостью большой вязкости [4]. Отметим, что в уравнение (2.3) не входит ускорение силы тяжести. На эволюцию k^2 оказывает влияние только сопротивление среды, и в силу того, что это уравнение интегрируется самостоятельно, происходит частичное разделение влияний сопротивления и тяжести. Полное разделение в данном случае не имеет места, так как медленно убывающие переменные G, T входят в правую часть выражения для λ . Заметим, что в [8] исследован случай наличия малого возмущающего момента сил тяжести (сопротивление отсутствует), в этом случае G, T сохраняются постоянными.

Нетрудно проверить, что κ из (2.3) можно представить в виде

$$\kappa = \frac{C\kappa_1 - A\kappa_2}{C\kappa_1 + A\kappa_2}, \quad \kappa_1 = I_{22}A - I_{11}B, \quad \kappa_2 = I_{33}B - I_{22}C$$

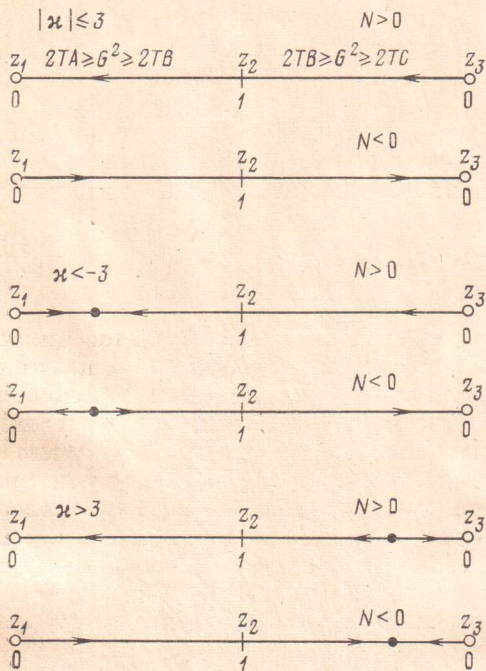
Так как величины κ_1, κ_2 могут принимать любые значения, то в зависимости от параметров задачи величина κ изменяется в диапазоне от $-\infty$ до $+\infty$. В работе [4] выполнялись неравенства $\kappa_1 > 0, \kappa_2 > 0$ и, следовательно, $|\kappa| \leq 1$. В статье [9] рассматривалось уравнение вида (2.3) для твердого тела с полостью произвольной формы, заполненной сильно вязкой жидкостью, где κ изменялось в пределах $|\kappa| \leq 3$. В указанных работах проведено численное интегрирование уравнения (2.3) при начальном условии $k^2(0) = 1$. Показано, что функция k^2 монотонно убывает от 1 до 0 с ростом ξ , причем тем быстрее, чем больше κ .

Далее исследуется семейство решений уравнения (2.3), соответствующее различным $\kappa \in (-\infty, \infty)$. Заметим, что для $\kappa < -3$ появляются новые качественные эффекты, а при $\kappa > 3$ характер решения тот же, что и при $|\kappa| \leq 3$. Действительно, как видно из графиков функций $k^2(\kappa, \xi)$, приведенных на фиг. 2 для $\kappa = -3, 0, 1, 3, 5, 8$, большим κ соответствуют более быстро убывающие функции аргумента ξ .

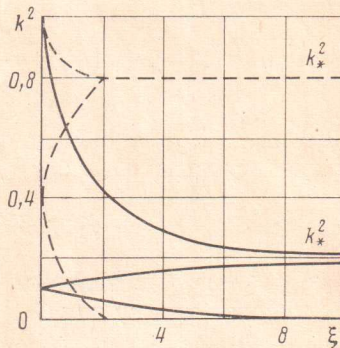
При $\kappa < -3$ уравнение (2.3) для k^2 допускает стационарные точки $k^2 = k_*^2$, т. е. независимо от G и T величина k^2 в силу уравнения (2.3) остается постоянной при соответствующем выборе начальных условий. Отметим, что при $\kappa > -3$ таких стационарных точек (кроме $k=0, k=1$) не существует.

Определим квазистационарные решения $k^2 = k_*^2$, для чего приравняем правую часть (2.3) нулю. Полученное равенство разрешим относительно κ

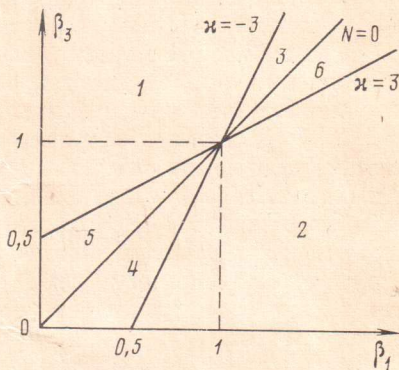
$$\kappa = \frac{k^2 - 1 + (1 + k^2) \mathbf{E}(k) / \mathbf{K}(k)}{(1 - k^2) [\mathbf{E}(k) / \mathbf{K}(k) - 1]} \quad (3.1)$$



Фиг. 5



Фиг. 4



Фиг. 6

График зависимости κ от k^2 , определенный численно, изображен кривой 1 на фиг. 3, из которой следует, что при любом $\kappa < -3$ существует единственное значение $k_*^2 \in (0, 1)$, отвечающее квазистационарному движению $k^2 = k_*^2 = \text{const}$. Был проведен численный анализ уравнения (2.3) при $\kappa < -3$. Для заданных значений $k_*^2 \in (0, 1)$, отвечающих квазистационарному движению, соответствующие значения κ определялись по формуле (3.1). На фиг. 4 изображены типичные графики функций $k^2(\kappa, \xi)$, полученные в результате численного интегрирования уравнения (2.3). Здесь $k_*^2 = 0,2$ для сплошных кривых и $0,8$ для пунктирных. Каждый график содержит три ветви. В качестве начального условия для верхних ветвей выбиралось $k^2(0) = 1$. Две нижние ветви на каждом графике были построены при начальных условиях $k^2(0) = 1/2 k_*^2$. При этом возрастающая ветвь отвечает интегрированию для $\xi > 0$, а убывающая ветвь есть зеркальное отражение относительно оси $\xi = 0$ зависимости $k^2(\kappa, \xi)$, полученной для $\xi < 0$.

Изображенные кривые позволяют для указанных значений параметров исследовать уравнение (2.3) и построить решение при любом начальном условии. Действительно, ввиду автономности уравнения (2.3) для k^2 решение $k^2(\kappa, \xi)$ при любых начальных условиях определяется сдвигом начала отсчета по оси ξ . Поэтому при любом начальном значении $k^2 = k_0^2$ можно, выбрав соответствующую ветвь графиков, описать дальнейшее изменение k^2 этой ветвью. Если $k_0^2 > k_*^2$, берется верхняя ветвь, если $1/2 k_*^2 \leq k_0^2 < k_*^2$ — средняя.

Если же $k_0^2 < 1/2 k_*^2$, берется нижняя ветвь, движение по которой происходит с ростом ξ в отрицательную сторону до $k^2 = 1/2 k_*^2$, после чего переходим на среднюю ветвь. При $k_0^2 = k_*^2$ имеем стационарное решение.

4. Рассмотрим некоторые частные случаи движения. При $I_{33}A = I_{11}C$ в соотношениях (2.3) имеем $|N|, |\kappa| \rightarrow \infty$. После раскрытия неопределен-

ности вместо уравнения (2.3) получим

$$\frac{dk^2}{dt} = \frac{2}{AB} (I_{11}C - I_{22}A) (1 - k^2) \left[1 - \frac{E(k)}{K(k)} \right] \quad (4.1)$$

Следовательно, при $I_{11}C > I_{22}A$ переменная k^2 возрастает и стремится к единице; при $I_{11}C < I_{22}A$ величина k^2 убывает и стремится к нулю, т. е. движение стремится к вращению вокруг оси с моментом инерции A .

Из (2.3) следует, что решение $k^2 = 0$ удовлетворяет уравнению. Такое квазистационарное движение отвечает замедленному вращению вокруг оси с наибольшим моментом инерции.

Из уравнений (2.2) для переменных G и T при $k^2 = 0$ получаются выражения

$$G = G_0 \exp\left(-\frac{I_{11}}{A} t\right), \quad T = T_0 \exp\left(-2\frac{I_{11}}{A} t\right)$$

Формально полагая $k^2 = 1$, что соответствует движению по сепаратрисе движения Эйлера — Пуансо, имеем

$$G = G_0 \exp\left(-\frac{I_{22}}{B} t\right), \quad T = T_0 \exp\left(-2\frac{I_{22}}{B} t\right)$$

Таким образом, в указанных частных случаях вращения твердого тела вокруг оси A и движения по сепаратрисе наличие силы сопротивления среды приводит к тому, что величина кинетического момента и кинетическая энергия убывают по экспоненциальному закону.

Аналогичные рассуждения могут быть проведены в области $2TB \geq G^2 \geq 2TC$. При этом значение $k^2 = 0$ отвечает вращению вокруг оси с минимальным моментом инерции C .

При малых k^2 , отвечающих движениям твердого тела, близким к вращениям вокруг оси A , правую часть уравнения (2.3) можно упростить используя разложения полных эллиптических интегралов [7] в ряды по k^2 . В этом случае (2.3) интегрируется и асимптотическое решение записывается в виде

$$k^2 = C_1 \exp\left[-\frac{(3+\kappa)\xi}{2}\right] = C_2 \exp\left[-\frac{C\kappa_1 + B(I_{33}A - I_{11}C)}{ABC} t\right] \quad (4.2)$$

где $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ — постоянные.

В случае малых k^2 аналитическое выражение для величины кинетического момента и кинетической энергии (2.5) можно получить в явном виде. Так, например, формула (2.5) для G в этом случае с погрешностью $O(k^4)$ может быть записана в явном виде

$$G = G_0 \exp\left\{-\frac{I_{11}}{A} t + b \exp\left[-\frac{C\kappa_1 + B(I_{33}A - I_{11}C)}{ABC} t\right]\right\}$$

$$b = C_2 \frac{[I_{22}A(A-C) + I_{33}A(A-B) + I_{11}(AB+AC-2BC)]BC}{2A(B-C)(I_{22}AC + I_{33}AB - 2I_{11}BC)} \quad (4.3)$$

Аналогичным образом может быть выражена зависимость $T(t)$.

Для величин k^2 , близких к единице и отвечающих движениям твердого тела вблизи сепаратрисы, правую часть (2.3) можно записать применяя асимптотические разложения $E(k)$, $K(k)$ при $k^2 \sim 1$ [7]. В результате разложения и последующего интегрирования уравнения (2.3) получим

$$\xi = \frac{(1-k^2)}{2} \left(\ln \frac{4}{\sqrt{1-k^2}} + \frac{1}{2} \right) \quad (4.4)$$

Отметим, что производная функции k^2 при $\xi = 0$ равна нулю. Кроме того, уравнение (2.3) допускает точное частное решение $k^2 = 1$, поэтому

при $k^2=1$ теряется единственность решения. Это обстоятельство связано с тем, что при $k^2=1$ периодические движения Эйлера — Пуансо вырождаются в апериодическое движение по сепаратрисе и условия применимости метода усреднения нарушаются. Однако, как следует из работ [10, 11], метод усреднения пригоден для описания движений при всех начальных условиях, кроме множества малой меры; ухудшается лишь точность метода.

5. Устойчивость квазистационарных движений, найденных в пп. 3, 4, проанализируем в рамках усредненного уравнения (2.3). Для этого определим знак функции $\partial\Phi/\partial k^2$ при значении κ , соответствующем квазистационарным движениям (здесь $\Phi(k^2, \kappa)$ — правая часть (2.3)). На фиг. 3 кривая 2 изображает график функции $\partial\Phi/\partial k^2$, полученный в результате численного расчета. Как следует из графика, $\partial\Phi/\partial k^2 < 0$, т. е. все квазистационарные движения п. 3 асимптотически устойчивы по отношению к переменной k^2 (в смысле [12]) для $\xi \geq 0$. Это видно также из графика фиг. 4.

В истинном времени $t \geq t_*$ имеет место устойчивость при $N > 0$ или $I_{33}A > I_{11}C$, см. (2.3). В обратном случае, при $N < 0$, $I_{33}A < I_{11}C$, эти квазистационарные движения неустойчивы.

Квазистационарное движение $k^2=0$, согласно (4.2), для $\xi > 0$ асимптотически устойчиво при $\kappa > -3$ и неустойчиво при $\kappa < -3$. В истинном времени для $t \geq t_*$ данное движение может быть как асимптотически устойчивым, так и неустойчивым — в зависимости от величины κ и знака параметра N .

На основе проведенного анализа получаем следующую качественную картину движения. Рассмотрим сначала случай $N > 0$. Функцией (4.2) и формулами (2.1) для k^2 , (2.2), (2.3) движение описывается при $t \geq t_*$, т. е. в области $2TA \geq G^2 \geq 2TB$. При $t \leq t_*$ выполняются неравенства $2TB \geq G^2 \geq 2TC$, соответствующие траекториям вектора кинетического момента, охватывающим ось C . В этом случае нужно поменять местами A и C , I_{11} и I_{33} в формулах (2.1), (2.2), (2.3), а также заменить a_1 на a_3 в (2.2). Тогда уравнение (2.3) сохранит свой вид, но в нем нужно будет заменить κ на $-\kappa$, N на $-N$. Аналогично определяется движение при $N < 0$. Предполагается, что в момент $t=t_*$ движение (одна из ветвей на фиг. 4) переходит через сепаратрису; однако, как уже отмечалось, здесь возможно «застревание» на неопределенно долгое время для множества начальных данных малой меры [10, 11].

На фиг. 5 показан характер изменения величины k^2 в зависимости от κ , N в истинном времени t . Указаны точки, соответствующие квазистационарным движениям, а стрелками показано направление движения. Буквы z_1, z_2, z_3 — оси тела, которым соответствует данное значение k^2 , причем слева от z_2 расположена область, где $2TA \geq G^2 \geq 2TB$, а справа — область, в которой $2TB \geq G^2 \geq 2TC$.

Полученным результатам можно дать следующую интерпретацию. Введем обозначения

$$I_{11}/A = \alpha_1, I_{22}/B = \alpha_2, I_{33}/C = \alpha_3, \alpha_i/\alpha_2 = \beta_i \quad (i=1, 2, 3) \quad (4.5)$$

Вращение тела вокруг одной из главных осей, например Oz_1 , под действием диссипативного момента описывается соотношениями $A\dot{\omega} = -I_{11}\omega$, $\omega = \text{const} \exp(-\alpha_1 t)$.

Поэтому величины α_i в (4.5) имеют смысл коэффициентов затухания вращений вокруг главных осей инерции Oz_i . Безразмерные величины β_i равны соответствующим коэффициентам, отнесенным к α_2 ; при этом $\beta_2 = 1$. Соотношения (2.3) для κ, N перепишем через β_i в виде

$$\kappa = \frac{2 - \beta_1 - \beta_3}{\beta_3 - \beta_1}, \quad N = \frac{1}{(\beta_3 - \beta_1) a_2} \quad (4.6)$$

В плоскости β_1, β_3 проведем прямую $\beta_3 = \beta_1$, на которой N меняет знак, и прямые $1 + \beta_1 = 2\beta_3$ и $1 + \beta_3 = 2\beta_1$, отвечающие согласно (4.6) равенствам $\kappa = \pm 3$. Эти прямые разбивают квадрант $\beta_1 > 0, \beta_3 > 0$ на шесть областей, изображенных на фиг. 6. Номера областей отвечают порядковому номеру качественных картин движения, изображенных на фиг. 5. Отсюда видно, что число квазистационарных режимов движения и их устойчивость зависят от относительной величины коэффициентов затухания вращений α_i вокруг главных осей инерции.

Итак, в рассматриваемом приближении возмущенное движение тела складывается из быстрого движения Эйлера — Пуансо вокруг вектора \mathbf{G} и из медленной эволюции параметров этого движения. Величины кинетического момента и кинетической энергии строго убывают, и их изменение зависит только от наличия сопротивления среды. Движение самого вектора \mathbf{G} в пространстве описывается первыми двумя уравнениями системы (2.2) и происходит с постоянным отклонением от вертикали $\delta = \text{const}$. В отличие от случая воздействия только малой тяжести [8] скорость вращения вектора \mathbf{G} вокруг вертикали переменна. Эволюция параметров движения Эйлера — Пуансо в системе координат, связанной с телом, описывается уравнением (2.3) и качественно представлена на фиг. 5.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черноусько Ф. Л. О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов. — ПММ, 1963, т. 27, вып. 3, с. 474–483.
2. Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
3. Волосов В. М., Моргунов Б. И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.
4. Черноусько Ф. Л. Движение твердого тела с полостями, заполненными вязкой жидкостью, при малых числах Рейнольдса. — Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1965, т. 5, № 6, с. 1049–1070.
5. Леценко Д. Д. О движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в слабо сопротивляющейся среде. — Прикл. механика, 1975, т. 11, вып. 3, с. 89–94.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 1. Механика. М.: Наука, 1973. 208 с.
7. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
8. Климов Д. М., Космодемьянская Г. Н., Черноусько Ф. Л. О движении гироскопа с неконтактным подвесом. — Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 2, с. 3–8.
9. Смирнова Е. П. Стабилизация свободного вращения асимметрического волчка с полостями, целиком заполненными жидкостью. — ПММ, 1974, т. 38, вып. 6, с. 980–985.
10. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.
11. Нейштадт А. И. Прохождение через сепаратрису в резонансной задаче с медленно изменяющимся параметром. — ПММ, 1975, т. 39, вып. 4, с. 621–632.
12. Румянцев В. В. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости по отношению к части переменных. — ПММ, 1971, т. 35, вып. 1, с. 138–143.

Москва, Одесса

Поступила в редакцию
7.1.1980