# Труды Одесского политехнического университета

**Научный
и производственно-практический сборник
по техническим и естественным наукам**

Вып.1 (7). 1999

Одесса

**УДК 531. 383**

**А.Е. Зернов,** канд., физ.-мат. наук, доц.,
**Д.Д. Лещенко,** д-р физ.-мат. наук, проф.,
Одес. гос. академия стр-ва. и архит.,
**И.А. Тимошенко,** математик, Одес. гос. академия холода

# ЭВОЛЮЦИЯ ВРАЩЕНИЙ БЛИЗКОГО К ДИНАМИЧЕСКИ-СФЕРИЧЕСКОМУ ТВЕРДОГО ТЕЛА, СОДЕРЖАЩЕГО ВЯЗКОУПРУГИЙ ЭЛЕМЕНТ

*О.Є. Зернов, Д.Д. Лещенко, І.О. Тимошенко.* **Еволюція обертань близького до динамічно-сферичного твердого тіла, яке містить в'язкопружний елемент.** Досліджується рух навколо центра інерції близького до динамічно-сферичного твердого тіла з рухомою масою, з'єднаною з тілом в'язкопружним зв'язком.

*A.E. Zernov, D.D. Leshchenko, I.A. Timoshenko.* **Evolution of rotations of a nearly dynamically spherical rigid body containing viscoelastic element**. The motion of a nearly dynamically spherical rigid body with a moving mass, coupled with it viscoelastically, around the centre of inertia is investigated.

Рассмотрим движение динамически несимметрического тела вокруг центра инерции, к которому в точке $O_1$, расположенной на одной из главных осей инерции, прикреплена при помощи упругой связи точка массы $m$. Начало декартовой системы координат, связанной с твердым телом, располагается в центре инерции — точке $O$ системы, состоящей из тела и подвижной массы, а орты $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ направлены так, что орт $\bar{e}_3$ определяет ось, на которой расположена точка $O_1$. Тогда радиус-вектор точки $\vec{\rho} = \rho\vec{e}_3$, причем, не нарушая общности, будем считать $\rho > 0$.

Если при исследовании эволюции движения твердого тела ограничиться условиями, позволяющими пренебрегать свободными колебаниями точки $m$ и учитывать лишь ее вынужденные движения относительно тела, то имеем [1]

$$\Omega^2 >> \lambda\omega >> \omega^2, (\omega \equiv |\bar{\omega}| \sim 1), \tag{1}$$

где $\Omega^2 = \dfrac{c}{m}$,

$c$ — жесткость упругой связи соединения подвижной точки $m$ с точкой $O_1$ тела;

$\lambda = \dfrac{\delta}{m}$, $\delta$ — коэффициент вязкого трения.

При указанных предположениях уравнение движения твердого тела с тензором инерции $J_0^*$ и подвижной массой $m$ записывается в векторной форме

$$J_0^*\dot{\bar{\omega}} + (\bar{\omega} \times J_0^*\bar{\omega}) = \bar{\Phi}(\bar{\omega}) + O(\Omega^{-4}, \lambda^2\Omega^{-6}). \tag{2}$$

Вектор-функция $\bar{\Phi}$ содержит члены порядков $\Omega^{-2}$, $\lambda\Omega^{-4}$ и представляет собой полином, содержащий четвертые и пятые степени $\bar{\omega}$.

После вычисления вектор-функции $\bar{\Phi}$ по схеме [1] для рассматриваемой задачи уравнение (2) в проекциях на оси $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ выражается следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&A\dot{p} + (C - B)qr = -\rho^2 m\{\Omega^{-2}qr(Q_1p^2 + K_1q^2 + L_1r^2) + \\
&+ \lambda\Omega^{-4}p[q^2(M_1p^2 + N_1q^2 + R_1r^2) + r^2(S_1p^2 + T_1r^2)]\},\\
&B\dot{q} + (A - C)pr = -\rho^2 m\{\Omega^{-2}pr(Q_2p^2 + K_2q^2 + L_2r^2) + \\
&+ \lambda\Omega^{-4}q[r^2(M_2p^2 + N_2q^2 + R_2r^2) + p^2(S_2p^2 + T_2r^2)]\},\\
&C\dot{r} + (B - A)pq = -\rho^2 m\lambda\Omega^{-4}r^3\,\frac{(A + C - B)(B + C - A)}{AB}\left(\frac{A - C}{B}p^2 + \frac{B - C}{A}q^2\right),
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

где $A$, $B$, $C$ — главные моменты инерции твердого тела, у которого подвижная масса совмещена с $O_1$;

$Q_1$, $K_1$, $L_1$, $M_1$, $N_1$, $R_1$, $S_1$, $T_1$, $Q_2$, $K_2$, $L_2$, $M_2$, $N_2$, $R_2$, $S_2$, $T_2$ — коэффициенты, представляющие собой определенные выражения, составленные из $A$, $B$, $C$ в соответствии с (2).

Различные случаи движения твердого тела с внутренними степенями свободы рассматривались также в работах [2—4].

Пусть главные моменты инерции твердого тела близки друг к другу и представимы в виде

$$A = J_0 + \varepsilon A',\ B = J_0 + \varepsilon B',\ C = J_0 + \varepsilon C',$$

где $0 < \varepsilon << 1$ — малый параметр.

Согласно (1) в уравнениях движения (3) $\Omega^{-2}, \lambda\Omega^{-4}$ — малые параметры. Предполагаем, что они одного порядка $\varepsilon$ с гироскопическими моментами. Тогда, пренебрегая малыми второго порядка и выше, получим из (3) систему уравнений вида

$$
\begin{cases}
J_0\dot{p} = \varepsilon qr[B' - C' + \rho^2 m(p^2 + q^2 + r^2)];\\
J_0\dot{q} = -\varepsilon pr[A' - C' + \rho^2 m(p^2 + q^2 + r^2)];\\
J_0\dot{r} = \varepsilon pq(A' - B').
\end{cases}
\qquad (4)
$$

Заметим, что система (4) близка к системе динамических уравнений Эйлера в случае Эйлера-Пуансо [5], в которой множители, стоящие при произведениях компонент вектора $\bar{\omega}$, $qr$, $rp$, $pq$, малы и отличаются на величины, обусловленные наличием подвижной массы в абсолютно твердом теле.

Первыми интегралами системы (4) являются величины

$$\omega^2 = p^2 + q^2 + r^2 = \text{const},$$
$$q^2(A' - B') + r^2(A' - C' + \rho^2 m\,\omega^2) = c_1 = \text{const},$$
$$p^2(A' - C' + \rho^2 m\,\omega^2) + q^2(B' - C' + \rho^2 m\,\omega^2) = c_2 = \text{const}.$$

Положим
$$c_1 = (A' - B')\,\lambda_1^2,\ \ c_2 = (B' - C' + \rho^2 m\,\omega^2)\,\lambda_2^2,$$

где $\lambda_1^2 = r_0^2\,\dfrac{A' - C' + \rho^2 m\omega^2}{A' - B'} + q_0^2$, $\qquad \lambda_2^2 = p_0^2\,\dfrac{A' - C' + \rho^2 m\omega^2}{B' - C' + \rho^2 m\omega^2} + q_0^2$.

Для определенности будем считать, что $A' > B' > C'$.

При $\lambda_1 > \lambda_2$ решение системы (4) для проекций угловой скорости выражается в эллиптических функциях Якоби в виде

$$
\begin{aligned}
p &= \lambda_2\beta_1\, cn\,(\lambda_1\sigma t + \alpha_1),\\
q &= \lambda_2\, sn\,(\lambda_1\sigma t + \alpha_1),\\
r &= \lambda_1\beta_2\, dn\,(\lambda_1\sigma t + \alpha_1),
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

где $\alpha_1$ — постоянная интегрирования;

$$\sigma = \sqrt{\frac{(B' - C' + \rho^2 m\omega^2)(A' - B')}{J_0}};\ \ \beta_1 = \sqrt{\frac{B' - C' + \rho^2 m\omega^2}{A' - C' + \rho^2 m\omega^2}};\ \ \beta_2 = \sqrt{\frac{A' - B'}{A' - C' + \rho^2 m\omega^2}}.$$

В рассматриваемом случае величина $r$ всегда отлична от нуля и полодии заключают в себе наибольшую ось $Oz$ эллипсоида инерции. Из (5) следует, что функции $p$, $q$ и $r$, а следовательно, и $\omega$ — периодические с действительным периодом $\tau_1 = \dfrac{4K}{\lambda_1\sigma}$, где $K$ — полный эллиптический интеграл первого рода [6].

Сравнивая (5) с соответствующим решением в случае Эйлера-Пуансо [5], заметим, что амплитуды периодических движений $p$, $q$, $r$ уменьшаются при наличии в теле подвижных масс, а период $\tau_1$ принимает значение, намного превосходящее единицу.

В случае $\lambda_2 > \lambda_1$ величина $p$ во все время движения отлична от нуля. Здесь полодии заключают в себе наименьшую ось $Ox$ эллипсоида инерции, и решение системы (4) записывается следующим образом:

$$
\begin{aligned}
p &= \lambda_2\beta_1\, dn\,(\lambda_2\sigma t + \alpha_2),\\
q &= \lambda_1\, sn\,(\lambda_2\sigma t + \alpha_2),\\
r &= \lambda_1\beta_2\, cn\,(\lambda_2\sigma t + \alpha_2),
\end{aligned} \tag{6}
$$

где $\alpha_2 = const$; $\sigma$, $\beta$, $\beta_2$ выражаются, как в (5).

Как и в первом случае величины $p$, $q$ и $r$ — периодические функции с действительным периодом $\tau_2 = \dfrac{4K}{\lambda_2\sigma}$, значение которого намного больше единицы, что объясняется наличием величины $\varepsilon << 1$ в знаменателе $\tau_2$.

Заметим, что в двух рассмотренных случаях полодии представляют собой замкнутые кривые, охватывающие оси $Oz$ и $Ox$, соответственно, что следует из периодичности функций $p$, $q$, $r$. Причем картина расположения полодий на эллипсоиде инерции симметрична относительно его главных плоскостей. Каждому движению твердого тела соответствует одна вполне конкретная полодия, зависящая от начальных значений величин $p$, $q$, $r$.

При $\lambda_1 = 0$ имеем $q = 0$, $r = 0$, $p = p_0 = const$. Тело совершает равномерное вращение вокруг оси $Ox$. Полодии вырождаются в точки, совпадающие с вершинами эллипсоида инерции, лежащими на оси $Ox$.

В случае $\lambda_2 = 0$, $A' > B' > C'$ имеем $q = 0$, $p = 0$, $r = r_0 = const$. Тело совершает равномерное вращение вокруг оси $Oz$. Полодии вырождаются в точки, которые лежат на оси $Oz$.

Можно отметить, что при $A' > B' > C'$ в случаях $\lambda_1 = 0$ или $\lambda_2 = 0$ функции $p$, $q$, $r$ выражаются через гиперболические функции времени и, следовательно, не являются периодическими. В обоих этих случаях полодии представляют собой четыре сепаратрисы, разделяющие эллипсоид инерции на области с отличающимся характером поведения полодий. Сепаратрисы соединяют соответственно точки на осях $Ox$ или $Oz$ — вершины элипсоида инерции. Так, например, при $\lambda_1 = 0$ решение системы (4) выражается в виде

$$
\begin{aligned}
p &= \lambda_2\beta_1 th(\lambda_2\sigma_1 t + \alpha_3),\\
q &= \frac{\lambda_2}{ch(\lambda_2\sigma_1 t + \alpha_3)},\\
r &= \frac{\lambda_2\beta_3}{ch(\lambda_2\sigma_1 t + \alpha_3)},
\end{aligned} \tag{7}
$$

где $\alpha_3 = const$; $\beta_1$ выражается, как в (5);

$$\sigma_1 = \varepsilon\frac{\sqrt{(B' - C' + \rho^2 m\omega^2)(B' - A')}}{J_0};$$

$$\beta_3 = \sqrt{\frac{B' - A'}{A' - C' + \rho^2 m\omega^2}}.$$

При $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $A' > B' > C'$, производя соответствующие вычисления, получим выражения для проекций угловой скорости в виде

$$p = \frac{\lambda\beta_1}{ch(\lambda\sigma t + \alpha_5)},$$

$$q = \lambda th(\lambda\sigma t + \alpha_5), \tag{8}$$

$$r = \frac{\lambda\beta_2}{ch(\lambda\sigma t + \alpha_5)},$$

$\alpha_5 = const; \sigma, \beta_1, \beta_2$ принимают значения, как и ранее.

[illegible]ак и в двух предыдущих случаях полодии представляют собой четыре сепаратрисы, [illegible]ые соединяют точки на оси $Oy$. Уравнение каждой сепаратрисы определяется из систе[illegible] в результате изменения знаков у $p$, $q$, $r$.

### [illegible]итература


[illegible]ерноусько Ф.Л. О движении твердого тела с подвижными внутренними массами // [illegible]зв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1973. — № 4. — С. 33 — 44.

[illegible]ещенко Д.Д. О движении твердого тела с подвижной точечной массой // Изв. АН [illegible]СССР. Механика твердого тела. — 1976. — № 3. — С. 37 — 40.

[illegible]куленко Л.Д., Лещенко Д.Д. Некоторые задачи движения твердого тела с подвижной [illegible]ассой // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1978. — № 5. — С. 29 — 34.

[illegible]ещенко Д.Д., Саллам С.Н. Некоторые задачи движения твердого тела с внутренними [illegible]тепенями свободы // Прикладная механика. — 1992. — Т. 28, № 8. — С. 81 — 86.

[illegible]ухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. — Т. 2. — М.: Наука, 1966.

[illegible]радштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — [illegible]: Наука, 1971.


[illegible]544


**А.Л. Комарницкий,** канд. физ.-мат. наук


# [illegible]ЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА КАРЛЕМАНА ДЛЯ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ


[illegible]*марницький.* **Періодична задача [illegible] для функції двох змінних.** Розг[illegible]райова задача Карлемана для [illegible] змінних. Невідома функція міс[illegible] в двох доданках крайової умо[illegible]ляє розв'язувати задачу за до[illegible]ду факторизації. Але для коре[illegible]овки задачі вимога аналітично[illegible]мінюється більш слабкою умо-

*A.L. Komarnitsky.* **Periodical problem of Karleman for function of two variables.** The boundary problem of Karleman for function of two variables is considered. The unknown function is contained only in two components of boundary condition. It allows to solve the problem by factorization method. However, for the analitical conditions of unknown function are changed by the more weak conditions for covrectnes of problem statement.


[illegible]нии краевой задачи Карлемана в полосе [1] важную роль играет метод факто[illegible]ой задаче определяется неизвестная аналитическая функция $\Phi(z)$, заданная в [illegible] и удовлетворяющая краевому условию

$$\Phi(x) = A(x)\Phi(x + i) + G(x), \quad x \in R,$$

[illegible]кция непрерывная не сомкнутая числовой прямой;

[illegible]

[illegible]естная функция аналитическая в поле $0 < \mathrm{Im}z < 1$.

[illegible]оризации здесь применим, поскольку задача двухэлементная: неизвестная [illegible]тся в двух слагаемых краевого условия. Аналогичную задачу можно рас-