

7. Куликов Г. М. Напряженно-деформированное состояние оболочек из слоистых композитов // Журн. прикл. механики и техн. физики.— 1988.— № 3.— С. 157—162.
8. Рассказов А. О., Соколовская И. И., Шульга Н. А. Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек.— Киев: Вищ. шк., 1986.— 191 с.
9. Расчет неоднородных пологих оболочек и пластин методом конечных элементов.— Киев: Вищ. шк., 1987.— 200 с.
10. Рикардс Р. Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин.— Рига: Зинатне, 1988.— 284 с.
11. Chao W. C., Reddy J. N. Analysis of laminated composite shell using a degenerated 3-D element // Int. J. for Numerical Methods in Engineering.— 1984.— 20, N 10.— P. 1991—2007.
12. Haas D. J., Lee S. W. A nine-node assumed-strain finite element for composite plates and shells // Computers and Structures.— 1987.— 26, N 3.— P. 445—452.

Казанск. ун-т

Поступила 09.04.91

УДК 531.1

Д. Д. Лещенко, С. Н. Саллам

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ВНУТРЕННИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Рассматривается движение динамически симметричного твердого тела со сферической полостью, заполненной жидкостью большой вязкости, и несущего подвижную массу, прикрепленную при помощи упругой связи с вязким трением к точке на оси симметрии. Исследуется совместное влияние вязкой жидкости в полости и подвижной массы, соединенной с телом посредством упругой связи с квадратичной диссипацией, на движение динамически симметричного твердого тела.

§ 1. Рассмотрим движение динамически симметричного твердого тела со сферической полостью, заполненной жидкостью большой вязкости, и несущего подвижную массу m , прикрепленную при помощи упругой связи с вязким трением к точке O_1 на оси симметрии. Начало декартовой системы координат, связанной с твердым телом, поместим в центр инерции O тела Q^* с массой, совмещенной с точкой O_1 , и жидкостью. Орты этой системы e_1, e_2, e_3 направим так, чтобы орт e_3 совпал с осью динамической симметрии тела Q^* . Тогда радиус-вектор точки $O\rho = \rho e_3$, причем, не нарушая общности, примем $\rho > 0$. В этой системе координат тензор инерции твердого тела Q^* имеет вид $\text{diag}(A, A, C)$, где A — экваториальный, C — осевой моменты инерции. Уравнения движения в проекциях на оси e_1, e_2, e_3 имеют вид [2, 3]

$$\begin{aligned} Ap' + (C - A)qr &= Fqr + Br^4p + \frac{\beta P}{vA^2} C(A - C)pr^2; \\ Aq' + (A - C)pr &= -Fpr + Br^4q + \frac{\beta P}{vA^2} C(A - C)qr^2; \quad (1.1) \\ Cr' &= -AC^{-1}Br^3(p^2 + q^2) + \frac{\beta P}{vA}(C - A)r(p^2 + q^2). \end{aligned}$$

Здесь p, q, r — проекции абсолютной угловой скорости ω , β — плотность жидкости, v — кинематический коэффициент вязкости. Постоянный тензор $P = \|P_{ij}\|$, зависящий от формы полости, задается в виде $P_{ij} = P\delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера, а $P > 0$. Так, например, для сферической полости радиуса a $P = \frac{8\pi a^7}{525}$ [2].

© Д. Д. ЛЕЩЕНКО, С. Н. САЛЛАМ, 1992

Основным допущением является предположение о малости числа Рейнольдса $R = l^2 T_*^{-1} \nu^{-1} \ll 1$. Здесь l — характерный линейный размер полости; T_* — характерный масштаб времени относительного движения, обратно пропорциональный характерной угловой скорости ω . Следуя [2], примем l и T_* за единицы измерения длины и времени. В этом случае вязкость является большим параметром, т. е. $\nu \ll 1$.

В (1.1) для сокращения обозначено

$$F = m\rho^2\Omega^{-2}CA^{-3}[A^2(p^2 + q^2) + C^2r^2]; \quad (1.2)$$

$$B = m\rho^2\lambda\Omega^{-4}C^3(A - C)A^{-4},$$

где $\lambda = \delta/m$, $\Omega^2 = c/m$; δ , c — коэффициенты связи точки с телом, имеющие смысл коэффициентов вязкости и жесткости соответственно.

Рассматривается случай, когда коэффициенты связи велики [3]

$$\Omega^2 \gg \lambda\omega \gg \omega^2 \quad (\omega = |\omega| \sim 1). \quad (1.3)$$

Кроме этого считается, что при исследовании эволюции движения твердого тела свободными колебаниями массы m можно пренебречь и учитывать лишь ее вынужденные движения относительно тела.

Домножая три уравнения (1.1) на Ap , Aq и Cr соответственно и складывая их, убедимся, что система (1.1) имеет первый интеграл

$$G^2 = A^2(p^2 + q^2) + C^2r^2 = \text{const}, \quad (1.4)$$

выражающий постоянство в рассматриваемом приближении модуля вектора G кинетического момента твердого тела Q^* с затвердевшей жидкостью относительно точки O .

Вычисляя производную по времени от кинетической энергии

$$H = \frac{1}{2}[A(p^2 + q^2) + Cr^2], \quad (1.5)$$

в силу уравнений движения (1.1) получаем

$$H' = -m\rho^2\lambda\Omega^{-4}C^2A^{-4}(A - C)^2(p^2 + q^2)r^4 - \frac{\beta P}{\nu A^2}(A - C)^2r^2(p^2 + q^2) \leq 0, \quad (1.6)$$

т. е. кинетическая энергия, как и следовало ожидать, убывает.

Введем углы θ , φ , определяющие ориентацию вектора G относительно твердого тела согласно равенствам

$$Ap = G \sin \theta \cos \varphi, \quad Aq = G \sin \theta \sin \varphi, \quad Cr = G \cos \theta. \quad (1.7)$$

Здесь θ — угол нутации, φ — угол собственного вращения.

Перейдем в уравнениях (1.1) к переменным (1.7) учитывая постоянство G . Разрешая полученные уравнения относительно производных φ' , θ' и подставляя формулы (1.2), получаем

$$\theta' = \alpha \sin \theta \cos^3 \theta + \eta \sin \theta \cos \theta, \quad \varphi' = \gamma \cos \theta. \quad (1.8)$$

Здесь введены обозначения

$$\alpha = m\rho^2\lambda\Omega^{-4}C^{-1}A^{-5}(A - C)G^4 = \text{const}, \quad (1.9)$$

$$\eta = \beta PG^2\nu^{-1}A^{-3}C^{-1}(A - C) = \text{const};$$

$$\gamma = G(C - A - m\rho^2\Omega^{-2}CA^{-3}G^2)A^{-1}C^{-1} = \text{const}.$$

Величины α , η , γ имеют размерности угловой скорости и сохраняются постоянными при движении. Заметим, что в случае полной сим-

метрии, т. е. при $A=C$, равенства (1.8), (1.9) переходят в соотношения

$$\omega = \text{const}, \quad \theta = \text{const}, \quad \dot{\varphi} = -m\rho^2\Omega^{-2}A^{-1}\cos\theta = \text{const}, \quad (1.10)$$

что соответствует равномерному вращению вектора ω вокруг орта e . В рассматриваемом случае полной симметрии тела e — орт вектора ρ , т. е. $\rho = \rho e$. Положение вектора ω в системе координат, жестко связанной с твердым телом, характеризуется углом θ с вектором e и углом φ , заключенным между проекцией ω на плоскость, перпендикулярную e , и каким-либо фиксированным направлением в этой плоскости. Уравнение (1.10) записано в этих переменных.

В пределе при $\lambda \rightarrow 0$, $\rho \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow 0$ формулы (1.8), (1.9) совпадают с полученными в [2] для движения твердого тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью. При $v \rightarrow \infty$, $\eta \rightarrow 0$ эти выражения совпадают с соответствующими для движения твердого тела с подвижной массой [3].

Для динамически симметричного тела, интегрируя первое уравнение (1.8), найдем

$$\frac{\alpha}{2\eta(\alpha + \eta)} \ln(\alpha + \eta \sec^2 \theta) + \frac{1}{\alpha + \eta} \ln |\operatorname{tg} \theta| = t + \text{const}, \quad (1.11)$$

где α , η определяются согласно (1.9).

Удовлетворяя начальному условию $\theta(t_0) = \theta_0$, получим из (1.11)

$$(1 + \sigma \operatorname{sech}^2 \theta) (\operatorname{tg}^2 \theta)^\sigma = (1 + \sigma \sec^2 \theta_0) (\operatorname{tg}^2 \theta_0)^\sigma \exp [2\eta(1 + \sigma)t]. \quad (1.12)$$

Здесь принято без нарушения общности, что θ лежит в первой четверти, в противном случае можно изменить направления осей на противоположные. В (1.12) обозначено

$$\sigma = \frac{\eta}{\alpha} = \frac{A^2 \beta P \Omega^4}{m v \lambda \rho^2 G^2}. \quad (1.13)$$

Соотношение (1.12) определяет в неявном виде зависимость угла θ от t . Знак величины η определяется, согласно (1.9), знаком разности $A-C$. Из формулы (1.12) видно, что при $A > C$ (вытянутое тело) угол θ монотонно возрастает с ростом t и стремится к $\pi/2$ при $t \rightarrow \infty$. Окончательное движение будет вращением вокруг оси перпендикулярной оси динамической симметрии. Если же $A < C$ (сплюснутое тело), то θ монотонно убывает, стремясь к нулю при $t \rightarrow \infty$. Окончательным движением здесь будет вращение вокруг оси динамической симметрии.

Таким образом, направление вектора кинетического момента G в связанной с телом системе координат стремится к стационарному состоянию: к направлениям осей, соответствующим наибольшим моментам инерции. Зависимость угла φ от времени определяется квадратурой из второго уравнения (1.8).

На рис. 1, 2 приведены графические зависимости угла нутации $\theta(t)$ при начальных значениях $\theta_0 = \pi/6$, $\pi/4$ и различных значениях параметра η , которые указаны на соответствующих кривых. В рассматриваемом приближении можно сделать следующие качественные выводы: при $\eta \rightarrow \pm 0$ величина $\theta(t)$ стремится к прямому углу и нулю соответственно.

Это подтверждает полученные выводы о движении тела.

Кинетический момент всей системы G_0 , который сохраняется постоянным в неподвижной системе координат, отличается от вектора G на вектор кинетического момента массы m k и на гиостатический момент L . Вектор k при условиях (1.3) имеет порядок $O(\Omega^{-2})$ [3]. Вектор L подсчитан в [2] и имеет порядок $O(v^{-1})$. Поэтому полученные результаты означают, что движение системы при наличии внутренней

диссипации стремится при $t \rightarrow \infty$ к вращению вокруг оси наибольшего момента инерции. Этот качественный вывод хорошо известен (см. [2, 3]) и следует из энергетических соображений. В самом деле, кинетическая энергия твердого тела Q^* с использованием замены (1.7) равна

$$H = \frac{1}{2} [A(p^2 + q^2) + Cr^2] = 1/2A^{-1}G^2 [1 + (A - C)C^{-1} \cos^2 \theta]. \quad (1.14)$$

Из равенства (1.14) видно, что минимальное значение H отвечает при $A > C$ углу $\theta = \pi/2$ и при $A < C$ углу $\theta = 0$, это соответствует полученному выше результату. Наличие подвижной массы и полости с жид-

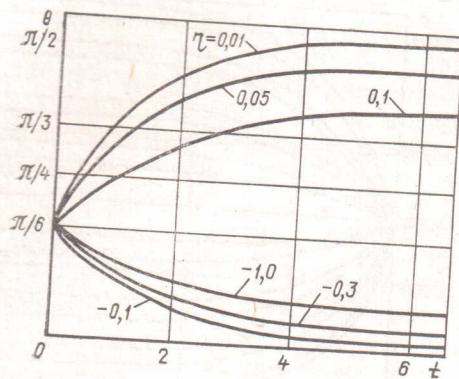


Рис. 1

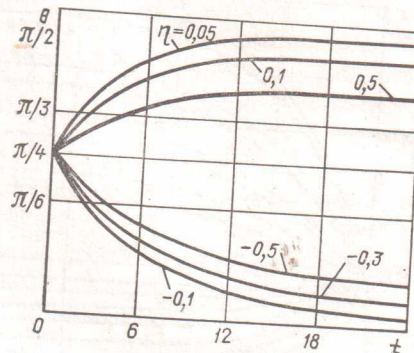


Рис. 2

костью внутри тела в рассматриваемом случае мало меняют его кинетический момент, но могут привести к существенной диссипации энергии.

§ 2. Исследуем движение динамически симметричного твердого тела со сферической полостью, заполненной жидкостью большой вязкости, и несущего подвижную точечную массу m , соединенную с телом в некоторой точке O_1 , на оси симметрии упругой связью при наличии квадратичного трения с коэффициентом μ . Начало декартовой системы координат, связанной с телом, поместим в центр инерции O системы Q^* , состоящей из тела с жидкостью и точечной массы, расположенной в точке O_1 . Орт e_1, e_2, e_3 направим так, чтобы орт e_3 совпадал с осью динамической симметрии системы. Тогда радиус-вектор ρ точки O_1 равен $\rho = \rho e_3$, причем для определенности предполагается, что $\rho > 0$. В этой системе координат тензор инерции системы Q^* имеет вид $\text{diag}(A, A, C)$, где A и C — экваториальный и осевой моменты инерции соответственно. Уравнения движения в проекциях на орты e_1, e_2, e_3 записываются следующим образом [1, 2]:

$$\begin{aligned} Ap' + (C - A)qr &= Nqr + Spr^6 + \frac{\beta P}{\nu A^2} C(A - C)pr^2; \\ Aq' + (A - C)pr &= -Npr + Sqr^6 + \frac{\beta P}{\nu A^2} C(A - C)qr^2; \\ Cr' &= -SAC^{-1}r^5(p^2 + q^2) + \frac{\beta P}{\nu A} (C - A)r(p^2 + q^2). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь p, q, r — проекции абсолютной угловой скорости ω , β — плотность жидкости, ν — кинематический коэффициент вязкости.

Для сферической полости радиуса a $P = \frac{8\mu a^7}{525}$ [2]. Число Рейнольдса предполагается малым, в этом случае вязкость жидкости велика.

В (2.1) для сокращения введены обозначения

$$N = m\rho^2\Omega^{-2}CA^{-3}G^2, \quad G^2 = A^2(p^2 + q^2) + C^2r^2;$$

$$S = m\rho^3\Lambda\Omega^{-3}C^4A^{-4}d|d|(p^2 + q^2)^{1/2}, \quad d = 1 - CA^{-1}, \quad (2.2)$$

где $\Omega_2 = c/m$, c — коэффициент жесткости упругой связи, $\lambda_1 = \mu/m = \lambda\Omega^3$, $\Omega \gg \omega$.

Рассматривается случай, когда коэффициенты связи λ_1 и Ω таковы, что «свободные» движения точки m , вызванные начальными отклонениями, затухают значительно быстрее, чем тело совершит обо-

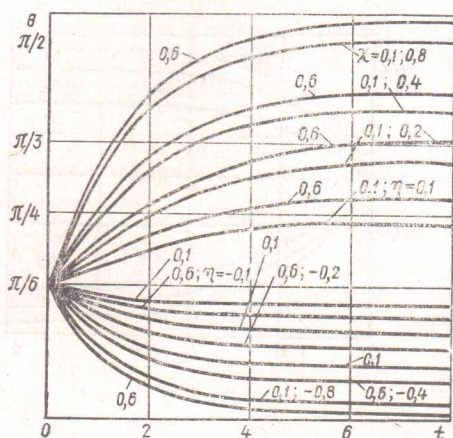


Рис. 3

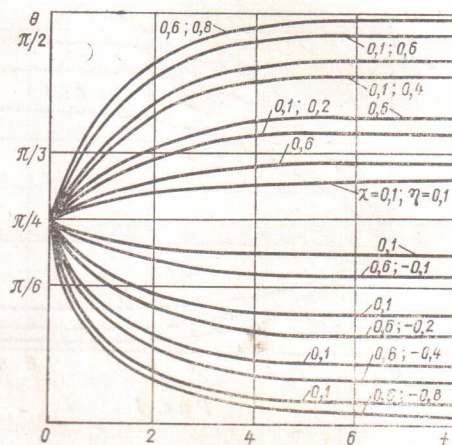


Рис. 4

рот [1]. Движение тела при этом будет близко к движению Эйлера — Пуансо, а относительные колебания точки, вынуждаемые этим движением, будут малы.

Складывая уравнения (2.1), умноженные на Ap , Aq и Cr соответственно, находим первый интеграл движения — модуль кинетического момента $G = |G|$

$$G = \text{const.} \quad (2.3)$$

Для определения величины ω воспользуемся следующим приемом [1—3]. Определим проекции вектора G на главные центральные оси инерции следующим образом:

$$Ap = G \sin \theta \cos \varphi, \quad Aq = G \sin \theta \sin \varphi, \quad Cr = G \cos \theta. \quad (2.4)$$

Здесь θ — угол нутации, φ — угол собственного вращения. Так как согласно (2.3) $G = \text{const}$, то, дифференцируя соотношения (2.4) в силу уравнений движения (2.1) с учетом выражений (2.2) для сферических углов θ , φ , получим дифференциальные уравнения

$$\dot{\varphi} = \kappa \cos \theta, \quad \dot{\theta} = \eta \sin \theta \cos \theta + \xi \sin \theta |\sin \theta| \cos^5 \theta. \quad (2.5)$$

Коэффициенты κ , η , ξ в (2.5) постоянны и равны

$$\kappa = -GC^{-1}(d + m\rho^2\Omega^{-2}CA^{-4}G^2);$$

$$\eta = \beta P(A - C)G^2v^{-1}A^{-3}C^{-1}, \quad \xi = m\rho^3\Lambda\Omega^{-3}C^{-2}A^{-6}d|d|G^7. \quad (2.6)$$

В частном случае сферической симметрии ($A=C$, $d=0$) из (2.6) следует, что постоянные η , ξ равны нулю, а уравнения (2.5) интегрируются явно $\theta = \theta_0$, $\varphi = \kappa t \cos \theta_0 + \varphi_0$, θ_0 , $\varphi_0 = \text{const}$.

Рассмотрим теперь общий случай $\eta \neq 0$, $\xi \neq 0$. Уравнение (2.5) для угла θ можно записать в виде

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sin \theta \cos \theta + \chi \sin^2 \theta \cos^5 \theta} = \theta \int_0^t dt. \quad (2.7)$$

Здесь принято без нарушения общности, что θ лежит в первой четверти

$$\chi = \frac{\xi}{\eta} = \frac{m\rho^3 \Lambda |d| \nu G^5}{\beta P \Omega^3 C A^4}.$$

Решение уравнения (2.7) было определено численно на ЭВМ для различных χ , η . На рис. 3, 4 приведены графические зависимости угла нутации $\theta(t)$ при начальных условиях $\theta_0 = \pi/6$, $\pi/4$ и различных значениях параметров χ , η , которые указаны на соответствующих кривых. Знак величины η определяется, согласно (2.6), знаком разности $A - C$. Из графиков видно, что при $A > C$ ($\eta > 0$, вытянутое тело) с увеличением χ и η угол θ стремится к $\pi/2$. В этом случае $\varphi \rightarrow 0$, как следует из (2.5). При $A < C$ ($\eta < 0$, сплюснутое тело) с увеличением χ и уменьшением η угол θ стремится к нулю. При этом $\varphi \rightarrow \chi = \text{const}$ согласно (2.5).

Таким образом, во всех случаях ось кинетического момента тела G в системе координат, связанной с телом, приближается к оси наибольшего момента инерции.

Авторы благодарят Ф. Л. Черноушко и Л. Д. Акуленко за ценные советы и полезные обсуждения.

РЕЗЮМЕ. Розглядається рух динамічно симетричного твердого тіла із сферичною порожниною, яка заповнена рідиною великої в'язкості, та несучого рухомої масу, прикріплену за допомогою пружного зв'язку з в'язким тертям до точки на осі симетрії. Досліджується сумісний вплив рідини великої в'язкості в порожнині і рухомої маси, з'єднаної з тілом пружним зв'язком з квадратичною дисипацією, на рух динамічно симетричного твердого тіла. В першій задачі аналітично, а в другій з допомогою чисельного інтегрування показано, що вісь кінетичного моменту твердого тіла в системі координат, зв'язаний з тілом наближається до осі найбільшого моменту інерції.

SUMMARY. The motion of the dynamically symmetric rigid body with the spheroidal cavity containing a high viscosity fluid and a moving mass connected with the point on the axis of symmetry by an elastic coupling with viscous friction is considered. The joint effect of a high viscosity fluid and a moving mass connected to the body by an elastic coupling with a square-law friction on the motion of the dynamically symmetric rigid body is investigated. It is demonstrated in the first problem analytically and in the second one by a numerical integration that the axis of the angular momentum of the rigid body in the coordinate system connected with the body approaches the axis of the maximal moment of inertia.

1. Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д. Некоторые задачи движения твердого тела с подвижной массой // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.—1978.— № 5.— С. 29—34.
2. Черноушко Ф. Л. Движение твердого тела с полостями, заполненными вязкой жидкостью, при малых числах Рейнольдса // Журн. вычисл. матем. и матем. физ.—1965.— 5, № 6.— С. 1049—1070.
3. Черноушко Ф. Л. О движении твердого тела с подвижными внутренними массами // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.—1973.— № 4.— С. 33—44.

Одес. ин-т
низкотемператур. техники и энергетики

Поступила 11.03.91