ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ. 2002, № 6, с. 32–38

УПРАВЛЕНИЕ В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ

УДК 531.383:62-50

ЭВОЛЮЦИЯ ВРАЩЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВОССТАНАВЛИВАЮЩЕГО И УПРАВЛЯЮЩЕГО МОМЕНТОВ*

© 2002 г. Л. Д. Акуленко, Т. А. Козаченко, Д. Д. Лещенко
Москва, ИПМ РАН

Поступила в редакцию 16.05.02 г.

Исследуются возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа, под действием восстанавливающего момента, зависящего от медленного времени и угла нутации, а также возмущающего момента, медленно изменяющегося во времени. Тело предполагается быстро закрученным, а восстанавливающий и возмущающий моменты предполагаются малыми с определенной иерархией малости компонентов. Получена усредненная система уравнений движения в первом приближении для существенно нелинейной двухчастотной системы в нерезонансном и резонансном случаях. Рассмотрены примеры движения тела под действием конкретного вида восстанавливающего, возмущающего и управляющего моментов сил.

1. Постановка задачи. Рассмотрим движение динамически симметричного твердого тела вокруг неподвижной точки O под действием восстанавливающего момента, зависящего от медленного времени $\tau = \varepsilon t$ и угла нутации θ, а также возмущающего момента, медленно изменяющегося во времени. Уравнения движения имеют вид [1]

$$A\dot{p} + (C-A)qr = k(\tau, \theta)\sin\theta\cos\varphi + M_1,$$
$$A\dot{q} + (A-C)pr = -k(\tau, \theta)\sin\theta\sin\varphi + M_2,$$
$$C\dot{r} = M_3, \quad M_l = M_l(p, q, r, \psi, \theta, \varphi, \tau), \quad \tau = \varepsilon t \quad (l = 1, 2, 3), \tag{1.1}$$
$$\dot{\psi} = (p\sin\varphi + q\cos\varphi)\operatorname{cosec}\theta, \quad \dot{\theta} = p\cos\varphi - q\sin\varphi,$$
$$\dot{\varphi} = r - (p\sin\varphi + q\cos\varphi)\operatorname{ctg}\theta.$$

Здесь p, q, r – проекции вектора угловой скорости тела на главные оси инерции тела, проходящие через точку O. Величины M_l – проекции вектора возмущающего момента на те же оси. Они зависят от медленного времени $\tau = \varepsilon t$ и являются периодическими функциями углов Эйлера ψ, φ, θ с периодами 2π. Здесь A – экваториальный, C – осевой моменты инерции тела относительно точки O, $A \neq C$. Предполагается, что на тело действует восстанавливающий момент $k(\tau, \theta)$, медленно изменяющийся во времени и 2π-периодически зависящий от угла нутации. При отсутствии возмущений, когда $M_l = 0$ и $k(\tau, \theta) = \text{const}$, уравнения (1.1) отвечают случаю волчка Лагранжа.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 02-01-00157, 02-01-00252).

Система (1.1) исследуется при условии выполнения следующих предположений:

$$(p^2+q^2)^{1/2} \ll r, \quad Cr^2 \gg k, \quad |M_{1,2}| \ll k, \quad M_3 \sim k, \tag{1.2}$$

которые означают, что направление угловой скорости тела близко к оси динамической симметрии; угловая скорость осевого вращения достаточно велика, так что кинетическая энергия тела много больше потенциальной энергии, обусловленной восстанавливающим моментом; две проекции вектора возмущающего момента на главные оси инерции тела малы по сравнению с восстанавливающим моментом, а третья – одного с ним порядка.

Неравенства (1.2) позволяют ввести следующие соотношения:

$$p = \varepsilon P, \quad q = \varepsilon Q, \quad k(\tau, \theta) = \varepsilon K(\tau, \theta), \quad \tau = \varepsilon t,$$
$$M_{1,2} = \varepsilon^2 M^*_{1,2}(P, Q, r, \psi, \theta, \varphi, \tau), \tag{1.3}$$
$$M_3 = \varepsilon M^*_3(P, Q, r, \psi, \theta, \varphi, \tau).$$

Новые нормированные переменные P, Q и функции K, M^*_l $(l = 1, 2, 3)$, а также переменные r, ψ, θ и параметры A, C предполагаются ограниченными величинами порядка единицы при $\varepsilon \longrightarrow 0$; угол чистого вращения $\varphi \sim \varepsilon^{-1}$.

Ранее [1, 2] рассматривались быстрые вращения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа, под действием постоянного восстанавливающего момента $k = \text{const}$ [1]. Исследован [3] случай, когда восстанавливающий момент зависит от угла нутации $k = k(\theta)$, а возмущающий момент зависит также и от медленного времени $\tau = \varepsilon t$. Ниже исследуется более общий случай зависимости восстанавливающего момента одновременно от угла нутации и медленного времени $k = k(\tau, \theta)$, в частности $k = k_0(\tau) + k_1(\tau)\cos\theta$. Возмущающий момент предполагается медленно изменяющимся во времени и представляется функциями вида $M_l = M_l(p, q, r, \psi, \theta, \varphi, \tau)$.

Ставится задача исследования асимптотического поведения системы (1.1) при малом ε, если выполнены условия (1.2), (1.3), которое будет проводиться методом усреднения [4, 5] на интервале времени порядка ε^{-1}. Метод усреднения широко применяется в задачах динамики твердого тела. Упрощающие предположения (1.2) или (1.3) дают возможность получить в общем случае довольно простую схему усреднения и исследовать ряд примеров.

2. Построение усредненных уравнений движения. Сделаем в системе (1.1) замену переменных (1.3). Сократив обе части первых двух уравнений (1.1) на ε, получим

$$\begin{gathered} A\dot{P} + (C - A)Qr = K(\tau, \theta)\sin\theta\cos\varphi + \varepsilon M_1^*, \\ A\dot{Q} + (A - C)Pr = -K(\tau, \theta)\sin\theta\sin\varphi + \varepsilon M_2^*, \\ C\dot{r} = \varepsilon M_3^*, \quad \dot{\psi} = \varepsilon(P\sin\varphi + Q\cos\varphi)\operatorname{cosec}\theta, \quad (2.1) \\ \dot{\varphi} = r - \varepsilon(P\sin\varphi + Q\cos\varphi)\operatorname{ctg}\theta, \\ \dot{\theta} = \varepsilon(P\cos\varphi - Q\sin\varphi). \end{gathered}$$

По терминологии [4, 5] система (2.1) является двухчастотной и существенно нелинейной, поскольку частоты зависят от медленной переменной r.

Рассмотрим сначала систему первого приближения и положим $\varepsilon = 0$ в (2.1). Из последних четырех уравнений находим

$$\begin{gathered} r = r_0, \quad \psi = \psi_0, \quad \theta = \theta_0, \\ \varphi = r_0 t + \varphi_0, \quad K_0 = K(\tau_0, \theta_0). \end{gathered} \qquad (2.2)$$

Здесь $r_0, \psi_0, \theta_0, \varphi_0, \tau_0$ – постоянные, равные начальным значениям переменных при $t = 0$. Подставим равенства (2.2) в первые два уравнения (2.1) при $\varepsilon = 0$ и проинтегрируем полученную систему линейных уравнений для P, Q. Получим

$$\begin{gathered} P = a\cos\gamma + b\sin\gamma + KC^{-1}r^{-1}\sin\theta\sin\varphi, \\ Q = a\sin\gamma - b\cos\gamma + KC^{-1}r^{-1}\sin\theta\cos\varphi, \\ a = P_0 - K_0C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\sin\varphi_0, \\ b = -Q_0 + K_0C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\cos\varphi_0, \qquad (2.3) \\ \dot{\gamma} = n, \quad \gamma(0) = 0, \quad n = (C - A)A^{-1}r \neq 0, \\ |n/r| \leq 1, \quad \alpha = \varphi + \gamma. \end{gathered}$$

Здесь a, b – оскуллирующие переменные типа Ван дер Поля, введенные вместо (1.3), а переменная γ имеет смысл фазы колебаний.

Рассмотрим систему (2.1) при $\varepsilon \neq 0$ и соотношения (2.3) как формулы замены переменных (содержащие переменную γ), определяющие переход от переменных P, Q к переменным a, b и обратно. Пользуясь этими формулами, перейдем в системе (2.1) от переменных $P, Q, r, \psi, \theta, \varphi, \tau$ к новым переменным $a, b, r, \psi, \theta, \alpha, \gamma, \tau$. Отметим, что фазы φ, α, γ связаны конечным соотношением, которое оказывается более удобным для дальнейших исследований стандартной системы с двумя вращающимися фазами γ, α. После преобразований получим систему вида

$$\begin{gathered} \dot{a} = \varepsilon A^{-1}(M_1^0\cos\gamma + M_2^0\sin\gamma) + \\ + \varepsilon K(\tau, \theta)C^{-2}r^{-2}M_3^0\sin\theta\sin\theta - \\ - \varepsilon K(\tau, \theta)C^{-1}r^{-1}\cos\theta(b - K(\tau, \theta)C^{-1}r^{-1}\sin\theta\cos\alpha) - \\ - \varepsilon C^{-1}r^{-1}\sin\theta\sin\alpha\left[\frac{\partial K}{\partial\theta}(a\cos\alpha + b\sin\alpha) + \frac{\partial K}{\partial\tau}\right], \\ \dot{b} = \varepsilon A^{-1}(M_1^0\sin\gamma - M_2^0\cos\gamma) - \\ - \varepsilon K(\tau, \theta)C^{-2}r^{-2}M_3^0\sin\theta\cos\alpha + \\ + \varepsilon K(\tau, \theta)C^{-1}r^{-1}\cos\theta(a + K(\tau, \theta)C^{-1}r^{-1}\sin\theta\sin\alpha) + \qquad (2.4) \\ + \varepsilon C^{-1}r^{-1}\sin\theta\cos\alpha\left[\frac{\partial K}{\partial\theta}(a\cos\alpha + b\sin\alpha) + \frac{\partial K}{\partial\tau}\right], \\ \dot{r} = \varepsilon C^{-1}M_3^0, \quad \dot{\theta} = \varepsilon(a\cos\alpha + b\sin\alpha), \\ \dot{\psi} = \varepsilon(a\sin\alpha - b\cos\alpha)\operatorname{cosec}\theta + \varepsilon K(\tau, \theta)C^{-1}r^{-1}, \\ \dot{\alpha} = CA^{-1}r - \varepsilon(a\sin\alpha - b\cos\alpha)\operatorname{ctg}\theta - \\ - \varepsilon K(\tau, \theta)C^{-1}r^{-1}\cos\theta, \quad \dot{\gamma} = (C - A)A^{-1}r, \\ M_l^0(a, b, r, \psi, \theta, \alpha, \gamma, \tau) = \\ = M_l^*(P, Q, r, \psi, \theta, \varphi, \tau) \quad (l = 1, 2, 3). \end{gathered}$$

Отметим, что при $K = \text{const}$ и M_l, не зависящим от τ, система (2.4) совпадает с соответствующей системой, исследованной в [1].

Исследуем возможность применения метода усреднения к системе (2.4). Данная система содержит медленные переменные $a, b, r, \psi, \theta, \tau$ и быстрые переменные – фазы α и γ. Зависимость восстанавливающего момента от медленной переменной τ и угла нутации θ приводит к появлению в первых двух уравнениях системы (2.4) слагаемых, содержащих производные $\dfrac{\partial K}{\partial\tau}$ и $\dfrac{\partial K}{\partial\theta}$. Если возмущающие моменты зависят от времени t, то применение метода усреднения весьма затруднено, поскольку система является существенно нелинейной. Рассмотрим более простой случай зависимости возмущающих моментов от медленного времени $\tau = \varepsilon t$.

чины

$$p = F_4(\tau)[p_0\cos(\gamma-\chi) - q_0\sin(\gamma-\chi) + k_0C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\sin(\gamma-\chi-\varphi_0)] + k(\tau,\theta)C^{-1}r^{-1}(\tau)\sin\theta_0\sin\varphi,$$

$$q = F_4(\tau)[p_0\sin(\gamma-\chi) + q_0\cos(\gamma-\chi) - k_0C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\cos(\gamma-\chi-\varphi_0)] + k(\tau,\theta)C^{-1}r^{-1}(\tau)\sin\theta_0\cos\varphi, \quad (3.10)$$

$$\gamma = A^{-1}(C-A)\left[r_0t + C^{-1}\int_0^t\left(\int_0^{\tau^*}u(\tau_1)d\tau_1\right)dt^*\right], \quad \tau = \varepsilon t.$$

Решения системы (2.5), (3.7) в случае момента (3.8) получены, и найдены выражения проекций вектора угловой скорости. Угол нутации θ постоянен. Величина $|r(\tau)|$ возрастает, если параметр r_0 и интеграл от функции $u(\tau)$ имеют одинаковые знаки, и убывает в противном случае. Переменные a, b являются произведением сомножителя, принимающего положительные, отрицательные значения или нуль в зависимости от подынтегральной функции $h(\tau)$, и осциллирующего сомножителя. Приращение угла прецессии $\psi - \psi_0$ определяется интегралом отношения восстанавливающего момента к осевой скорости вращения и принимает положительное значение в случае, если $K(\tau, \theta)$ и $r^{-1}(\tau)$ имеют одинаковые знаки.

Составляющие p, q вектора угловой скорости, согласно (3.10), содержат ограниченные осциллирующие слагаемые, частота колебаний которых определяется переменной $\gamma - \chi$, а также слагаемое, обусловленное восстанавливающим моментом $k(\tau, \theta)$.

Функция $h(\tau)$ может иметь смысл ограничения на управляющее воздействие. Такая трактовка позволяет, например, решать задачу гашения экваториальной составляющей посредством ограниченного момента сил, где $M_{1,2}$ – управление для q, а M_3 – управление для r.

3.3. Вход осесимметричного тела в атмосферу. Рассмотрим случай, когда восстанавливающий момент имеет вид

$$k(\tau,\theta) = \varepsilon K^*(\tau,\theta) = \varepsilon(K(\theta) + \xi\sin\nu\tau) = k^*(\theta) + \varepsilon\xi\sin\nu\tau, \quad (3.11)$$
$$K(\theta) = A(\mu + 2\eta\cos\theta).$$

Здесь μ, η – постоянные коэффициенты, на знаки которых никаких ограничений не налагается. Такие задачи возникают при неуправляемом пространственном движении тела в атмосфере [7].

Выражения для угла прецессии ψ, аргумента χ и проекций p, q вектора угловой скорости принимают вид

$$\psi - \psi_0 = C^{-1}K(\theta_0)\int_0^\tau r^{-1}(\tau^*)d\tau^* + \eta_1,$$

$$\chi = C^{-1}[K(\theta_0)\cos\theta_0 + A\eta\sin^2\theta_0]\times\int_0^\tau r^{-1}(\tau^*)d\tau^* + \eta_1\cos\theta_0,$$

$$p = F_4(\tau)[p_0\cos(\gamma-\chi) - q_0\sin(\gamma-\chi) + k^*(\theta_0)C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\sin(\gamma-\chi-\varphi_0)] + k^*(\theta_0)C^{-1}r^{-1}(\tau)\sin\theta_0\sin\varphi + \eta_2, \quad (3.12)$$

$$\eta_1 = \xi C^{-1}\int_0^\tau \sin\nu\tau^* r^{-1}(\tau^*)d\tau^*,$$

$$\eta_2 = \varepsilon\xi\sin\nu\tau C^{-1}r^{-1}(\tau)\sin\theta_0\sin\varphi.$$

Аналогично получается формула для q.

В выражениях для p, q и ψ (3.12), как и в [2], присутствуют слагаемые, содержащие $k^*(\theta_0)$. Отличие состоит в том, в наличии дополнительных слагаемых η_2 и η_1 соответственно. Поскольку функция $r(\tau)$ ограничена, то дополнительные слагаемые также ограничены и $|\sin\nu\tau| < |\nu\tau|$.

Если выполнено резонансное соотношение $C/A = i/j$ ($i/j \le 2$, i, j – натуральные взаимно простые числа), то усреднение следует проводить по схеме (2.9). В примерах, изложенных выше, все интегралы μ_l^* из (2.9) совпадают с соответствующими интегралами μ_l из (2.7). Поэтому резонанс фактически места не имеет и полученное решение пригодно для описания движения при любом отношении $C/A \ne 1$.

Заключение. 1. Исследован новый, наиболее широкий из известных в литературе, класс вращательных движений динамически симметричного твердого тела относительно неподвижной точки с учетом нестационарного возмущающего момента, а также восстанавливающего момента, медленно изменяющегося во времени и зависящего от угла нутации.

2. Разработана процедура усреднения для получающейся существенно нелинейной двухчастотной системы в нерезонансном и резонансном случаях.

3. Решены конкретные задачи динамики и управления вращениями твердого тела, близкими к регулярной прецессии в случае Лагранжа, имеющие самостоятельное значение для приложений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноусько Ф.Л.* Возмущенные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 5.
2. *Лещенко Д.Д., Саллам С.Н.* Возмущенные вращения твердого тела относительно неподвижной точки // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 5.
3. *Akulenko L., Leshchenko D., Kushpil T. et al.* Problems of Evolution of Rotations of a Rigid Body under the Action of Perturbing Moments // Multibody System Dynamics. 2001. V. 6. № 1.
4. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
5. *Волосов В.М., Моргунов Б.И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971.
6. *Акуленко Л.Д.* Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987.
7. *Асланов В.С., Серов В.М.* Вращательное движение осесимметричного твердого тела с бигармонической характеристикой восстанавливающего момента // Изв. АН. МТТ. 1995. № 3.