МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ ВПО «МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМЕНИ М. Е. ЕВСЕВЬЕВА»

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Труды Всероссийской научно-практической конференции с международным участием «Математика и математическое моделирование»
Саранск, 13–14 октября 2011 г.

Саранск 2011

ЭВОЛЮЦИЯ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕСТАЦИОНАРНОГО ДИССИПАТИВНОГО МОМЕНТА

Т. А. Козаченко, Д. Д. Лещенко

Одесская государственная академия строительства и архитектуры,
г. Одесса, Украина

Козаченко Т. А., Лещенко Д. Д. Эволюция движения твердого тела под действием нестационарного диссипативного момента. Рассматривается возмущенное движение относительно неподвижной точки динамически симметричного тяжелого твердого тела в случае возмущений произвольной природы. Приведены условия возможности усреднения уравнений движения по углу нутации, получена усредненная система уравнений. Построено численное решение усреднённой системы уравнений движения твердого тела под действием диссипативных моментов.

Ключевые слова: возмущенное движение, усреднение, угол нутации.

Kozachenko T. A., Leshchenko D. D. Evolution of motion of solid under the action of non-stationary dissipative moment. Perturbed motion of a dynamically symmetric heavy rigid body about a fixed point under the action of perturbations of different nature is investigated. We have established the conditions of the feasibility to average with respect to the nutation angle the equations of the rigid body motion. The averaged system of equations of motion is obtained. The numerical solution of the averaged system of equations of motion of a rigid body under the action of dissipative torques is conducted.

Key words: perturbed motion, averaging, nutation angle.

Постановка задачи. Исследуется возмущённое движение твердого тела, близкое к случаю Лагранжа под действием возмущений произвольной природы. Уравнения движения имеют вид:

$$
\begin{aligned}
&A\dot{p} + (C - A)\, qr = mgl\sin\theta\cos\varphi + \varepsilon M_1, \\
&A\dot{q} + (A - C)\, pr = -mgl\sin\theta\sin\varphi + \varepsilon M_2, \\
&C\dot{r} = \varepsilon M_3,\ M_i = M_i(p, q, r, \psi, \theta, \varphi, \tau),\ (i = 1, 2, 3),\ \tau = \varepsilon t \\
&\dot{\psi} = (p\sin\varphi + q\cos\varphi)\operatorname{cosec}\theta, \\
&\dot{\theta} = p\cos\varphi - q\sin\varphi, \\
&\dot{\varphi} = r - (p\sin\varphi + q\cos\varphi)\operatorname{ctg}\theta.
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

Здесь p, q, r – проекции вектора угловой скорости тела на главные оси инерции тела; величины $\varepsilon M_i (i = 1,2,3)$ – проекции вектора возмущающего момента на те же оси, они зависят от медленного времени $\tau = \varepsilon t$ ($\varepsilon << 1$ – малый параметр, t – время); ψ, θ, φ – углы Эйлера; m – масса тела, g – ускорение силы тяжести, l – расстояние от неподвижной точки O до центра тяжести тела; A – экваториальный, C – осевой момент инерции тела относительно точки O.

Ставится задача исследования поведения решений системы (1) при малом ε на интервале времени порядка ε^{-1}. Для решения задачи применяется метод усреднения [5, 6].

Исследование возмущённых движений, близких к движению в случае Лагранжа, проводилось методом усреднения в работах [1-4], были получены усреднённые системы уравнений в первом и втором приближениях.

2. Процедура усреднения. В работе применяется процедура усреднения разработанная Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, Ф. Л. Черноусько [1]. Данная методика используется для усреднения системы (1) при возмущениях, зависящих от медленного времени τ и допускающих усреднение по углу нутации θ. Погрешность усреднённого решения для медленных переменных составляет величину порядка ε на интервале времени ε^{-1}.

Уравнения возмущающего движения (1) приведём к виду, допускающему применение метода усреднения [5, 6].

После ряда преобразований и усреднения по быстрой переменной t, получим в медленном времени $\tau = \varepsilon t$ усреднённую систему первого приближения для медленных переменных $u_i\ (i = 1,2,3)$:

$$\frac{du_i}{d\tau} = U_i(u_1, u_2, u_3), \quad u_i(0) = u_i^0, \quad i = 1,2,3 \tag{2}$$

После исследования и решения системы (2) для u_i такие медленные переменные как G_z – проекция вектора кинетического момента на вертикаль Oz, H – полная энергия тела, r – проекция вектора угловой скорости на ось динамической симметрии восстанавливаются по следующим формулам:

$$\begin{gathered}
\cos\theta = u_1 + (u_2 - u_1)\,\mathrm{sn}^2(\alpha t + \beta), \quad -1 \le u_1 \le u_2 \le 1 \le u_3 < \infty, \\
\alpha = (mgl(u_3 - u_1)/(2A))^{1/2}, \ k^2 = (u_2 - u_1)(u_3 - u_1)^{-1}, \quad 0 \le k^2 \le 1, \\
G_z = \delta_2 (Amgl)^{1/2}(u_1 + u_2 + u_3 + u_1u_2u_3 + \delta_1 R)^{1/2} \times \\
\times \mathrm{sign}(1 + u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3), \\
H = \frac{1}{2} mgl((u_1 + u_2 + u_3)(1 + AC^{-1}) + (\delta_1 R - u_1u_2u_3)(1 - AC^{-1})), \\
r = \delta_2 C^{-1}(Amgl)^{1/2}(u_1 + u_2 + u_3 + u_1u_2u_3 - \delta_1 R)^{1/2}, \\
R = ((1 - u_1^2)(1 - u_2^2)(u_3^2 - 1))^{1/2}, \ \delta_1 = \mathrm{sign}(G_z^2 - C^2 r^2), \quad \delta_2 = \mathrm{sign}\, r.
\end{gathered} \tag{3}$$

Величины δ_1, δ_2 в начальный момент определяются по начальным условиям для G_z, r. Если в процессе движения одна или обе величины $G_z^2 - C^2 r^2$, r проходят через нуль, то возможна смена знаков δ_1, δ_2.

3. Возмущённое движение твердого тела под действием внешнего диссипативного момента. Исследуем возмущенное движение твердого тела относительно неподвижной точки с учетом моментов, действующих на твердое тело со стороны внешней среды. Примером может служить внешняя среда, медленно изменяющая свойства вязкости вследствие изменения плотности, температуры, состава среды. Возмущающие моменты $\varepsilon M_i\ (i = 1,2,3)$ имеют вид:

$$M_1 = -a(\tau)p,\ M_2 = -a(\tau)q,\ M_3 = -b(\tau)r,$$
$$0 < a(\tau),\ b(\tau), \qquad \tau = \varepsilon t \tag{4}$$

Здесь $a(\tau)$, $b(\tau)$ – интегрируемые функции, зависящие от свойств среды.

Для упрощения дальнейших преобразований, положим $a(\tau) = a_0 + a_1\tau$, $b(\tau) = b_0 + b_1\tau$, где a_0, a_1, b_0, b_1 – постоянные.

Перейдем к новым переменным u_i и выполним усреднение. Получаем усредненную систему вида (2):

$$\begin{aligned}
\frac{du_1}{d\tau} = \frac{-1}{Amgl(u_1-u_2)(u_1-u_3)}&(A^{-1}(G_z - Cru_1)\times \\
&\times(w(G_z - Crv) + \varepsilon a_1 Crn/\alpha) + \\
&+(u_1^2-1)(w(2H - Cr^2 - 2mglv) + 2\varepsilon a_1 mgl\, n/\alpha) + \\
&+ r(G_z - Cru_1)((v-u_1)(b_0 + \varepsilon b_1 K(k)/\alpha) - \varepsilon b_1 n/\alpha)),
\end{aligned} \tag{5}$$
$$w = a_0 + \varepsilon\, a_1 \cdot K(k)/\alpha, \qquad v = u_3 - (u_3 - u_1)E(k)/K(k),$$
$$n = (u_3 - u_1)(E(\beta,k) - \beta \cdot E(k)/K(k)).$$

Здесь вместо G_z, H, r, k подставляются их выражения (3). Уравнения для u_2, u_3 получаются из (5) циклической перестановкой индексов у u_i. Однако при этой перестановке выражения для v и n, где $E(k)$, $K(k)$, $E(\beta,k)$ – эллиптические интегралы первого и второго рода, следует оставить неизменными во всех трёх уравнениях.

Усреднённая система (5) проинтегрирована численно при предположениях, что k – мало и начальных значениях $u_1^0 = 0$, $u_2^0 = 0.5$, $u_3^0 = 2$, $\theta^0 = 60^0$. В начальный момент угловая скорость вращения равна $r^0 = \sqrt{3}$, кроме того $A = 1.5$, $C = 1$, $a_1 = b_1 = 1$, $a_0 = 0.125$, $b_0 = 0.1$. Используя значения u_i, найденные в результате численного решения уравнения (5) определяем переменные G_z, H, r по формулам (3).

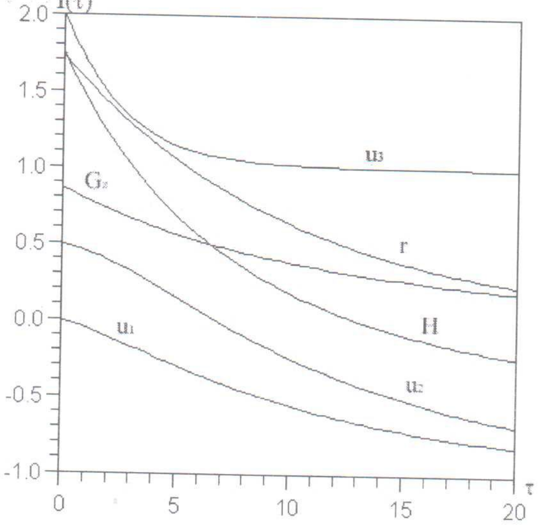

Рис .1

На рис. 1 изображены функции $u_i\ (i = 1, 2, 3)$, G_z, H, r для указанного случая. Полная энергия H и угловая скорость r – монотонно убывают. Проекция вектора кинетического момента на вертикаль G_z близка к постоянной. Величина u_3 приближается к единице. Поскольку система (5) интегрировалась при малом k, то из рисунка видно, что u_1 и u_2 стремятся друг к другу.

Правильность счёта контролировалась тем, что полученные по численным данным и формулам (3) значения для r практически совпадают с точным решением $r = r^0 \exp(-b_0 C^{-1}\tau - 0.5 b_1 \tau^2)$.

Заключение. Исследовано движение твердого тела, близкое к случаю Лагранжа, под действием возмущающего момента, медленно изменяющегося во времени и обусловленного влиянием сопротивляющейся среды. Согласно используемой методике, получена усредненная система первого приближения для медленных переменных, которая была проинтегрирована численно при малых k.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Акуленко Л. Д.** Возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа [текст] / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, Ф. Л. Черноусько // Прикладная математика и механика. – 1979. – Т.43, №5. – С. 771–778.
2. **Акуленко Л. Д.** Возмущенные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии [текст] / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, Ф. Л. Черноусько // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1986. – №5. – С.3–10.
3. **Лещенко Д. Д.** Возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа [текст] / Д. Д. Лещенко, А. С. Шамаев // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1987. – №6. – С.8–17.
4. **Sidorenko V. V.** Capture and escape from resonance in the dynamics of the rigid body in viscous medium [text] / V. V. Sidorenko // Nonlinear Science. – 1994. – Vol.4. – pp. 35–57.
5. **Боголюбов Н. Н.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний [текст] / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский – М.: Наука, 1974 – 503с.
6. **Волосов В. М.** Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем [текст] / В. М. Волосов, Б. И. Моргунов – М.: Изд-во МГУ, 1971 – 507с.