Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 2, 1990

УДК 531.383

Д. Д. Лещенко, С. Н. Саллам

ВОЗМУЩЕННЫЕ ВРАЩАТЕЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА, БЛИЗКИЕ К РЕГУЛЯРНОЙ ПРЕЦЕССИИ

Исследуются возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа, когда восстанавливающий момент зависит от угла нутации. Предполагается, что угловая скорость тела достаточно велика, ее направление близко к оси динамической симметрии тела и возмущающие моменты малы по сравнению с восстанавливающим. Специальным образом вводится малый параметр, применяется метод усреднения. Получены усредненные системы уравнений движения в первом и втором приближениях. Рассмотрены конкретные механические модели возмущений.

Возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа, исследовались также в [1]. Рассматривались возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной [2, 3] [1] и псевдорегулярной [2] прецессии в случае Лагранжа, причем в первом случае считалось, что на тело действует постоянный восстанавливающий момент.

1. Постановка задачи. Рассмотрим движение динамически симметричного твердого тела вокруг неподвижной точки O под действием восстанавливающего момента, зависящего от угла нутации θ, и возмущающего момента.

Уравнения движения (динамические и кинематические уравнения Эйлера) имеют вид

$$\begin{gathered}
Ap^{\cdot} + (C - A)qr = k(\theta)\sin\theta\cos\varphi + M_1 \\
Aq^{\cdot} + (A - C)pr = -k(\theta)\sin\theta\sin\varphi + M_2 \\
Cr^{\cdot} = M_3,\ M_i = M_i(p, q, r, \psi, \theta, \varphi, t)\ (i = 1, 2, 3) \\
\psi^{\cdot} = (p\sin\varphi + q\cos\varphi)/\sin\theta,\ \theta^{\cdot} = p\cos\varphi - q\sin\varphi \\
\varphi^{\cdot} = r - (p\sin\varphi + q\cos\varphi)\operatorname{ctg}\theta
\end{gathered} \tag{1.1}$$

Динамические уравнения записаны в проекциях на главные оси инерции тела, проходящие через точку O. Здесь p, q, r — проекции вектора угловой скорости тела на эти оси, M_i $(i = 1, 2, 3)$ — проекции вектора возмущающего момента на те же оси, являющиеся периодическими функциями углов Эйлера ψ, θ, φ с периодами 2π, A — экваториальный, а C — осевой моменты инерции тела относительно точки O, $A \neq C$.

Предполагается, что на тело действует восстанавливающий момент, зависящий от угла нутации $k(\theta)$. В случае тяжелого волчка имеем $k = mgl$, где m — масса тела, g — ускорение силы тяжести, l — расстояние от неподвижной точки O до центра тяжести тела.

---

[1] См. также: *Лещенко Д. Д., Саллам С. Н.* Возмущенные вращательные движения твердого тела с распределением масс, близким к случаю Лагранжа. Одесса, 1988. 22 с.— Деп. в УкрНИИНТИ 28.06.1988, № 1655 — Ук 88.

[2] *Лещенко Д. Д., Саллам С. Н.* Возмущенные движения твердого тела, близкие к псевдорегулярной прецессии. Одесса, 1988. 18 с.— Деп. в УкрНИИНТИ 28.06.1988, № 1656 — Ук 88.

Возмущающие моменты M_i в (1.1) предполагаются известными функциями своих аргументов. При отсутствии возмущений ($M_i = 0$, $i = 1, 2, 3$) и $k(\theta) = \mathrm{const}$ уравнения (1.1) отвечают случаю Лагранжа.

Делаются следующие предположения:

$$p^2 + q^2 \ll r^2, \ Cr^2 \gg k, \ |M_i| \ll k \ (i = 1, 2, 3) \tag{1.2}$$

которые означают, что направление угловой скорости тела близко к оси динамической симметрии; угловая скорость достаточно велика, так что кинетическая энергия тела много больше потенциальной энергии, обусловленной восстанавливающим моментом; возмущающие моменты малы по сравнению с восстанавливающим. Неравенства (1.2) позволяют ввести малый параметр $\varepsilon \ll 1$ и положить

$$p = \varepsilon P, \ q = \varepsilon Q, \ k(\theta) = \varepsilon K(\theta), \ M_i = \varepsilon^2 M_i^* (P, Q, r, \psi, \theta, \varphi, t) \quad (i = 1, 2, 3) \tag{1.3}$$

В [3], как и в данной работе, предполагались выполненными условия (1.2), (1.3), но считалось, что на тело действует постоянный восстанавливающий момент k. В [2] вместо третьего неравенства (1.2) рассматривалось условие $|M_i| \ll k$ $(i = 1, 2)$, $M_3 \sim k$.

Новые переменные P, Q, а также переменные и постоянные r, ψ, θ, φ, K, A, C, M_i^* предполагаются ограниченными величинами порядка единицы при $\varepsilon \to 0$. Ставится задача исследования асимптотического поведения системы (1.1) при малом ε, если выполнены условия (1.2), (1.3). Будем пользоваться методом усреднения [4—6] на интервале времени порядка ε^{-1}.

2. **Процедура усреднения.** Сделаем в системе (1.1) замену переменных (1.3). Сократив обе части первых двух уравнений (1.1) на ε, получим

$$\begin{gathered} AP^{\cdot} + (C - A)Qr = K(\theta) \sin\theta \cos\varphi + \varepsilon M_1^* \\ AQ^{\cdot} + (A - C)Pr = -K(\theta) \sin\theta \sin\varphi + \varepsilon M_2^* \\ Cr^{\cdot} = \varepsilon^2 M_3^*, \ \psi^{\cdot} = \varepsilon (P \sin\varphi + Q \cos\varphi)/\sin\theta \\ \theta^{\cdot} = \varepsilon (P \cos\varphi - Q \sin\varphi), \ \varphi^{\cdot} = r - \varepsilon (P \sin\varphi + Q \cos\varphi) \operatorname{ctg}\theta \end{gathered} \tag{2.1}$$

Рассмотрим систему нулевого приближения и положим $\varepsilon = 0$ в (2.1). Тогда из последних четырех уравнений (2.1) имеем

$$r = r_0, \ \psi = \psi_0, \ \theta = \theta_0, \ \varphi = r_0 t + \varphi_0 \tag{2.2}$$

Здесь r_0, ψ_0, θ_0, φ_0 — постоянные, равные начальным значениям этих переменных при $t = 0$. Подставим выражения (2.2) в первые два уравнения системы (2.1) при $\varepsilon = 0$ и проинтегрируем полученную систему линейных уравнений для P, Q. Решение представим в виде

$$\begin{gathered} P = a \cos\gamma_0 + b \sin\gamma_0 + \lambda_0 \sin(r_0 t + \varphi_0) \\ Q = a \sin\gamma_0 - b \cos\gamma_0 + \lambda_0 \cos(r_0 t + \varphi_0) \\ a = P_0 - \lambda_0 \sin\varphi_0, \ b = -Q_0 + \lambda_0 \cos\varphi_0 \\ \lambda_0 = K_0 C^{-1} r_0^{-1} \sin\theta_0, \ \gamma_0 = n_0 t, \ n_0 = (C - A) A^{-1} r_0 \neq 0 \\ |n_0 / r_0| \leqslant 1, \ K_0 = K(\theta_0) \end{gathered} \tag{2.3}$$

Здесь P_0, Q_0 — начальные значения переменных P, Q, введенных согласно (1.3), а переменная $\gamma = \gamma_0$ имеет смысл фазы колебаний. Система (2.1) существенно нелинейна, поэтому вводится дополнительная переменная γ, определяемая уравнением

$$\gamma^{\cdot} = n, \ \gamma(0) = 0, \ n = (C - A) A^{-1} r \tag{2.4}$$

При $\varepsilon = 0$ имеем $\gamma = \gamma_0 = n_0 t$ в соответствии с (2.3). Равенства (2.2), (2.3) определяют общее решение системы (2.1), (2.4) при $\varepsilon = 0$.

Исключим из первых двух соотношений (2.3) постоянные с учетом (2.2) и разрешим полученные равенства относительно a, b:

$$a = P\cos\gamma + Q\sin\gamma - \lambda\sin(\gamma+\varphi)$$
$$b = P\sin\gamma - Q\cos\gamma + \lambda\cos(\gamma+\varphi); \ \lambda = KC^{-1}r^{-1}\sin\theta \tag{2.5}$$

Введем новую переменную δ следующим образом:

$$r = r_0 + \varepsilon\delta \tag{2.6}$$

Рассмотрим теперь систему (2.1) при $\varepsilon \neq 0$ и соотношения (2.5), (2.6) как формулы (содержащие переменную γ) перехода от переменных P, Q, r к переменным a, b, δ. Пользуясь этими формулами, перейдем в системе (2.1), (2.4) от переменных P, Q, r, ψ, θ, φ, γ к новым переменным a, b, δ, ψ, θ, α, γ, где

$$\alpha = \gamma + \varphi \tag{2.7}$$

После ряда преобразований получим систему вида

$$\begin{aligned}
a^{\cdot} &= \varepsilon A^{-1}(M_1^\circ\cos\gamma + M_2^\circ\sin\gamma) - \varepsilon KD_{11}\cos\theta\,(b - KD_{11}\sin\theta\cos\alpha) \\
&\quad - \varepsilon K'D_{11}\sin\theta\sin\alpha\,(a\cos\alpha + b\sin\alpha) + \varepsilon^2 KD_{12}\,\delta\cos\theta\,(b - \\
&\quad - 2KD_{11}\sin\theta\cos\alpha) + \varepsilon^2 K'D_{12}\delta\sin\theta\sin\alpha\,(a\cos\alpha + \\
&\quad + b\sin\alpha) + \varepsilon^2 KD_{22}M_3^\circ\sin\theta\sin\alpha \\
b^{\cdot} &= \varepsilon A^{-1}(M_1^\circ\sin\gamma - M_2^\circ\cos\gamma) + \varepsilon KD_{11}\cos\theta\,(a + KD_{11}\sin\theta\sin\alpha) \\
&\quad + \varepsilon K'D_{11}\sin\theta\cos\alpha\,(a\cos\alpha + b\sin\alpha) - \varepsilon^2 KD_{12}\,\delta\cos\theta\,(a + \\
&\quad + 2KD_{11}\sin\theta\sin\alpha) - \varepsilon^2 K'D_{12}\,\delta\sin\theta\cos\alpha\,(a\cos\alpha + b\sin\alpha) - \\
&\quad - \varepsilon^2 KD_{22}M_3^0\sin\theta\cos\alpha \\
\delta^{\cdot} &= \varepsilon C^{-1}M_3^\circ, \ \psi^{\cdot} = \varepsilon(a\sin\alpha - b\cos\alpha)/\sin\theta + \varepsilon KD_{11} - \varepsilon^2 KD_{12}\delta \\
\theta^{\cdot} &= \varepsilon(a\cos\alpha + b\sin\alpha), \ \gamma^{\cdot} = n_0 + \varepsilon(C-A)A^{-1}\delta \\
\alpha^{\cdot} &= CA^{-1}r_0 + \varepsilon CA^{-1}\delta - \varepsilon\operatorname{ctg}\theta\,(a\sin\alpha - b\cos\alpha) - \varepsilon KD_{11}\cos\theta + \\
&\quad + \varepsilon^2 KD_{12}\delta\cos\theta \\
D_{ij} &= C^{-i}r_0^{-j}, \ K' = dK/d\theta
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Здесь M_i° — функции, полученные из M_i^* (см. (1.3)) в результате подстановки (2.5)—(2.7):

$$M_i^\circ(a, b, \delta, \psi, \theta, \alpha, \gamma, t) = M_i^*(P, Q, r, \psi, \theta, \varphi, t) \ (i = 1, 2, 3) \tag{2.9}$$

Рассматриваемая система уравнений (2.8) имеет вид

$$\begin{aligned}
x^{\cdot} &= \varepsilon F_1(x, y) + \varepsilon^2 F_2(x, y), \ x(0) = x_0 \\
y^{1\cdot} &= \omega_1 + \varepsilon g_1(x, y) + \varepsilon^2 g_2(x, y), \ y^1(0) = y^{10} \\
y^{2\cdot} &= \omega_2 + \varepsilon h_1(x, y) + \varepsilon^2 h_2(x, y), \ y^2(0) = y^{20}
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Вектор-функция $x = (x^1, \ldots, x^5)$ состоит из медленных переменных a, b, δ, ψ, θ; через y^1 и y^2 обозначаются быстрые переменные α, γ; ω_1, ω_2 — постоянные фазы, равные $CA^{-1}r_0$ и $(C-A)A^{-1}r_0$ соответственно. Вектор-функции F_i, g_i, h_i $(i = 1, 2)$ определяются правыми частями уравнений (2.8).

Двумерный вектор (g_1, h_1) обозначим Z_1. Предполагаем, что возмущающие моменты M_i^* не зависят от t.

Следуя известной процедуре построения асимптотики системы (2.10) [5], ищем замену переменных

$$\begin{aligned}
x &= x^* + \varepsilon u_1(x^*, y^*) + \varepsilon^2 u_2(x^*, y^*) + \ldots \\
y &= y^* + \varepsilon v_1(x^*, y^*) + \varepsilon^2 v_2(x^*, y^*) + \ldots \\
y &= (y^1, y^2), \ x^* = (x^{*1}, \ldots, x^{*5}), \ y^* = (y^{*1}, y^{*2})
\end{aligned}$$

такую, чтобы система (2.10) в новых переменных приняла вид

$$x^{*\cdot} = \varepsilon A_1(x^*) + \varepsilon^2 A_2(x^*) + \ldots$$
$$y^{*\cdot} = \omega + \varepsilon B_1(x^*) + \varepsilon^2 B_2(x^*) + \ldots, \quad \omega = (\omega_1, \omega_2) \qquad (2.11)$$

Для этого нужно выбрать функции u_1, u_2, v_1, v_2, определяющие замену переменных. Уравнения для вектор-функций u_1, v_1, таковы [5]:

$$\omega \partial u_1/\partial y^* = F_1(x^*, y^*) - A_1(x^*)$$
$$\omega \partial v_1/\partial y^* = Z_1(x^*, y^*) - B_1(x^*) \qquad (2.12)$$

Здесь $(\partial f/\partial x)$ — матрица частных производных $\| \partial f_i/\partial x^j \|$ $(i, j = 1, 2, \ldots, 5)$. Функции $A_1(x^*)$, $B_1(x^*)$ определяются по формулам

$$A_1(x^*) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} F_1(x^*, y^*)\, dy^{*1}\, dy^{*2}$$
$$B_1(x^*) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} Z_1(x^*, y^*)\, dy^{*1}\, dy^{*2} \qquad (2.13)$$

Функция $u_2(x^*, y^*)$ должна быть решением уравнения

$$\frac{\partial u_2}{\partial y^*}\omega = G(x^*, y^*) - A_2(x^*) \qquad (2.14)$$

$$G(x^*, y^*) = F_2(x^*, y^*) + \frac{\partial F_1}{\partial x^*} u_1 + \frac{\partial F_1}{\partial y^*} v_1 - \frac{\partial u_1}{\partial x^*} A_1(x^*) - \frac{\partial u_1}{\partial y^*} B_1(x^*)$$

Функция $A_2(x^*)$ определяется следующим образом:

$$A_2(x^*) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} G(x^*, y^*)\, dy^{*1}\, dy^{*2} \qquad (2.15)$$

Определим усредненную систему уравнений первого приближения для медленных переменных

$$x_1^{*\cdot} = \varepsilon A_1(x_1^*), \quad x_1^*(0) = x_{10} \qquad (2.16)$$

а также систему второго приближения для медленных переменных

$$x_2^{*\cdot} = \varepsilon A_1(x_2^*) + \varepsilon^2 A_2(x_2^*), \; x_2^*(0) = x_0 \qquad (2.17)$$

и систему уравнений второго приближения для быстрых переменных

$$y_2^{*\cdot} = \omega + \varepsilon B_1(x_1^*(t)), \; y_2^*(0) = y^\circ; \; y^\circ = (y^{10}, y^{20}) \qquad (2.18)$$

которая сразу интегрируется:

$$y_2^*(t) = y^\circ + \omega t + \varepsilon \int_0^t B_1(x_1^*(s))\, ds \qquad (2.19)$$

Для исследования системы второго приближения (2.17) сделаем замену переменной $\tau = \varepsilon t$, после чего система (2.17) примет вид

$$dx_2^*/d\tau = A_1(x_2^*) + \varepsilon A_2(x_2^*) \qquad (2.20)$$

В этом случае интервал времени $(0, T/\varepsilon)$, на котором рассматриваются решения исходной системы (2.10), перейдет в интервал $(0, T)$, не зависящий от малого параметра ε. Решение системы (2.20) ищется в виде

$$x_2^*(\tau) = x^{(1)}(\tau) + \varepsilon x^{(2)}(\tau) + O(\varepsilon^2) \qquad (2.21)$$

Подставляя в (2.20) разложение (2.21), получим системы уравнений для вктор-функций $x^{(i)}(\tau) = x_i(t)$ $(\tau = \varepsilon t, i = 1, 2)$:

$$dx^{(1)}/d\tau = A_1(x^{(1)}), \quad x^{(1)}(0) = x_0, \qquad (2.22)$$
$$dx^{(2)}/d\tau = A_1'(x^{(1)}(\tau))x^{(2)} + A_2(x^{(1)}(\tau)), \quad x^{(2)}(0) = 0 \qquad (2.23)$$

где A_1' — матрица частных производных компонент вектор-функции $A_1(x)$: $A_1'(x) = \| \partial A_1^i / \partial x^j \|$. Система (2.22) линейна, поэтому ее исследовать в ряде случаев проще, чем систему (2.20).

Обозначим $X(\tau, c)$ общее решение системы первого приближения (2.22):

$$X_\tau = A_1(X), \; X(0, c) = c = x_0 \tag{2.24}$$

Тогда для функций $x^{(1)}(\tau)$, $x^{(2)}(\tau)$ получаются выражения

$$x^{(1)}(\tau) = X(\tau, x_0), \quad x^{(2)}(\tau) = \Phi(\tau) \int_0^\tau \Phi^{-1}(\tau_1)\, \eta(\tau_1)\, d\tau_1 \tag{2.25}$$

Здесь Φ — фундаментальная матрица однородного уравнения, соответствующего второму приближению

$$\Phi(\tau) = \| \partial X(\tau, c)/\partial c \|_{c=x_0}, \; \eta(\tau) = A_2(x^{(1)}(\tau)) = A_2(X(\tau, x_0))$$

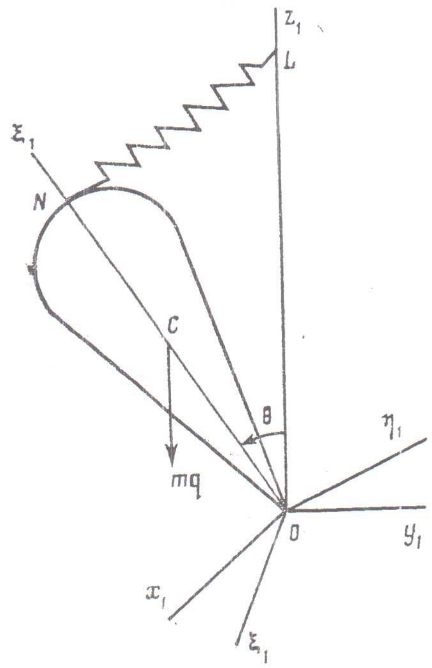
Определим вектор-функции

$$x_\varepsilon^v(t) = x^{(1)}(\varepsilon t) + \varepsilon x^{(2)}(\varepsilon t) + \varepsilon u_1(x^{(1)}(\varepsilon t), y^\circ + \omega t + \varepsilon \int_0^t B_1(x^{(1)}(\varepsilon s)\, ds) \tag{2.26}$$

$$y_\varepsilon^v(t) = y^\circ + \omega t + \varepsilon \int_0^t B_1(x^{(1)}(\varepsilon s))\, ds$$

Обоснование приведенной формальной схемы построения функций $x_\varepsilon^v(t)$, $y_\varepsilon^v(t)$ приведено в [3].

Таким образом, построение приближенных решений $x_\varepsilon^v(t)$, $y_\varepsilon^v(t)$ сводится к следующей процедуре: решаем при помощи рядов Фурье уравнения (2.12), (2.14), затем по формуле (2.15) строим вектор-функцию $A_2(x^*)$, далее, согласно (2.25), определяем решения $x^{(1)}(\tau)$ и $x^{(2)}(\tau)$ уравнений (2.22), (2.23) и, наконец, по формуле (2.26) получаем искомые приближения $x_\varepsilon^v(t)$, $y_\varepsilon^v(t)$. Далее описанная процедура реализуется для некоторых конкретных систем уравнений динамики твердого тела.



Рассматриваемые ниже примеры возмущений таковы, что разложения в ряд Фурье правых частей уравнений (2.12) и (2.14) содержат лишь конечное число членов. Поэтому условие разрешимости уравнений (2.12) и (2.14) сводится к проверке конечного числа условий вида $\omega_1 m_1 + \omega_2 m_2 \neq 0$. В исследуемых примерах эти условия принимают вид $CA^{-1} r_0 \neq 0$, $(C - A) A^{-1} r_0 \neq 0$, а последние условия выполняются всегда в силу исходных предположений.

В качестве примера восстанавливающего момента, зависящего от угла нутации, рассмотрим твердое тело с прикрепленной к нему в точке N пружиной, конец L которой закреплен неподвижно (фигура). На тело действуют сила тяжести mg и сила упругости пружины F, модуль которой пропорционален деформации пружины $F = \nu (s - s_0)$. Здесь ν — коэффициент жесткости пружины. В этом случае восстанавливающий момент имеет вид

$$k(\theta) = mgl + \nu hz\, [1 - s_0 (h^2 + z^2 - 2hz \cos \theta)^{-1/2}] \tag{2.27}$$

где $ON = z$, $OC = l$, $OL = h$, $LN = s = s(\theta)$.

Согласно (1.3), $k(\theta) = \varepsilon K(\theta)$

3. **Случай линейных внешних диссипативных моментов.** Рассмотрим возмущенное движение твердого тела в случае Лагранжа с учетом моментов, действующих на тело со стороны внешней среды. Считаем, что возмущающие моменты M_i $(i = 1, 2, 3)$ с учетом (1.3) имеют вид [7]

$$M_1 = -\varepsilon^2 I_1 P, \ M_2 = -\varepsilon^2 I_1 Q, \ M_3 = -\varepsilon^2 I_3 r, \ I_1, I_3 > 0 \tag{3.1}$$

где I_1, I_3 — некоторые постоянные коэффициенты пропорциональности, зависящие от свойств среды и формы тела.

Первые три уравнения (2.8) для рассматриваемой задачи в переменных a, b, δ, ψ, θ, α, γ принимают вид

$$\begin{gathered}
a^{\cdot} = -\varepsilon A^{-1} I_1 (a + KD_{11} \sin\theta \sin\alpha) - \varepsilon KD_{11} \cos\theta \, (b - \\
- KD_{11} \sin\theta \cos\alpha) + \varepsilon^2 A^{-1} I_1 KD_{12} \delta \sin\theta \sin\alpha + \varepsilon^2 KD_{12} \delta \cos\theta \, (b - \\
- 2KD_{11} \sin\theta \cos\alpha) - \varepsilon^2 I_3 KD_{21} \sin\theta \sin\alpha - \varepsilon K' D_{11} \sin\theta \sin\alpha \, (a \cos\alpha + \\
+ b \sin\alpha) + \varepsilon^2 K' D_{12} \delta \sin\theta \sin\alpha \, (a \cos\alpha + b \sin\alpha) \qquad (3.2) \\
b^{\cdot} = -\varepsilon A^{-1} I_1 (b - KD_{11} \sin\theta \cos\alpha) + \varepsilon KD_{11} \cos\theta \, (a + \\
+ KD_{11} \sin\theta \sin\alpha) - \varepsilon^2 KA^{-1} I_1 D_{12} \delta \sin\theta \cos\alpha - \varepsilon^2 KD_{12} \delta \cos\theta \, (a + \\
+ 2KD_{11} \sin\theta \sin\alpha) + \varepsilon^2 I_3 KD_{21} \sin\theta \cos\alpha + \varepsilon K' D_{11} \sin\theta \cos\alpha \, (a \cos\alpha + \\
+ b \sin\alpha) - \varepsilon^2 K' D_{12} \delta \sin\theta \cos\alpha \, (a \cos\alpha + b \sin\alpha) \\
\delta^{\cdot} = -\varepsilon C^{-1} I_3 r_0 - \varepsilon^2 C^{-1} I_3 \delta
\end{gathered}$$

Остальные уравнения системы (2.8) остаются неизменными.

Для построения приближенного решения системы (3.2) применим описанную в разд. 2 процедуру усреднения. Вектор-функции A_1 и B_1 определяются по формулам (2.13) и имеют вид

$$\begin{gathered}
A_1 = \{A_1^{(i)}\}, \ (i = 1, 2, \ldots, 5), \ B_1 = \{B_1^{(j)}\}, \ (j = 1, 2) \\
A_1^{(1)} = -A^{-1} I_1 a - KD_{11} b \cos\theta - {}^1/_2 K' D_{11} b \sin\theta \qquad (3.3) \\
A_1^{(2)} = -A^{-1} I_1 b + KD_{11} a \cos\theta + {}^1/_2 K' D_{11} a \sin\theta \\
A_1^{(3)} = -C^{-1} I_3 r_0, \ A_1^{(4)} = KD_{11}, \ A_1^{(5)} = 0 \\
B_1^{(1)} = CA^{-1}\delta - KD_{11} \cos\theta, \ B_1^{(2)} = (C - A) A^{-1} \delta
\end{gathered}$$

Четвертая и пятая компоненты вектор-функции $u_1 \{u_1^{(i)}\}$ $(i = 1, 2, \ldots, 5)$ выражаются следующим образом:

$$\begin{gathered}
u_1^{(4)} = -AD_{11} (a \cos\alpha + b \sin\alpha)/\sin\theta \\
u_1^{(5)} = AD_{11} (a \sin\alpha - b \cos\alpha)
\end{gathered} \tag{3.4}$$

Отметим, что комбинации вида $M_1^\circ \cos\gamma + M_2^\circ \sin\gamma$ и $M_1^\circ \sin\gamma - M_2^\circ \cos\gamma$, как следует из уравнений (2.8), (3.2), не зависят от γ и правые части этих уравнений зависят лишь от одной быстрой переменной α. Этот факт отмечался в [3] и аналогичен полученным в [1] достаточным условиям возможности усреднения уравнений движения только по углу нутации. В результате упрощается решение уравнений (2.12).

Вектор-функция $A_2 (x^*)$ после соответствующих вычислений по формуле (2.15) записывается в виде

$$\begin{gathered}
A_2 (x^*) = \{A_2^{(i)}\} \quad (i = 1, 2, \ldots, 5) \qquad (3.5) \\
A_2^{(1)} = KD_{12} [\delta b \cos\theta - {}^1/_2 KD_{21} Ab \, (3 \cos^2\theta - 1) - I_1 C^{-1} a \cos\theta] + \\
+ {}^1/_2 K' D_{12} \delta b \sin\theta - {}^1/_8 AD_{33} b \, (K' \sin\theta)^2 - {}^1/_2 AK' D_{33} bK \sin 2\theta - \\
- {}^1/_2 I_1 D_{22} ad \, (K \sin\theta)/d\theta \\
A_2^{(2)} = -KD_{12} [\delta a \cos\theta - {}^1/_2 KD_{21} Aa \, (3 \cos^2\theta - 1) + I_1 C^{-1} b \cos\theta] - \\
- {}^1/_2 K' D_{12} \delta a \sin\theta + {}^1/_8 AD_{33} a \, (K' \sin\theta)^2 + {}^1/_2 AK' D_{33} aK \sin 2\theta - \\
- {}^1/_2 I_1 D_{22} bd \, (K \sin\theta)/d\theta \\
A_2^{(3)} = -C^{-1} I_3 \delta, \quad A_2^{(4)} = KD_{12} (-\delta + KD_{21} \cos\theta) \\
A_2^{(5)} = I_1 KD_{22} \sin\theta
\end{gathered}$$

Определим решение усредненной системы уравнений первого приближения (2.16) с учетом (3.3) для медленных и быстрых переменных

$$a^{(1)} = \exp(-\varepsilon A^{-1} I_1 t)(a^\circ \cos wt - b^\circ \sin wt)$$
$$b^{(1)} = \exp(-\varepsilon A^{-1} I_1 t)(b^\circ \cos wt + a^\circ \sin wt) \tag{3.6}$$
$$\delta^{(1)} = -\varepsilon C^{-1} I_3 r_0 t, \quad \psi^{(1)} = \varepsilon K_0 D_{11} t + \psi_0, \quad \theta^{(1)} = \theta_0$$
$$\alpha^{(1)} = CA^{-1} r_0 t - \varepsilon K_0 D_{11} \cos\theta_0 t - {}^1/_2 \varepsilon^2 A^{-1} I_3 r_0 t^2 + \varphi_0$$
$$\gamma^{(1)} = n_0 t - {}^1/_2 \varepsilon^2 (C - A) A^{-1} C^{-1} I_3 r_0 t^2$$
$$w = {}^1/_2 \varepsilon D_{11} (2K \cos\theta + K' \sin\theta)_{\theta=\theta_0}$$

где величины a°, b°, n_0 определяются согласно (2.3); ψ_0, θ_0, φ_0 — постоянные, равные начальным значениям углов Эйлера при $t = 0$. Сравнение полученных выражений (3.6) для медленных переменных $a^{(1)}$, $b^{(1)}$ с соответствующими формулами (4.5) работы [3], если положить в них $K = \text{const}$, дает совпадение указанных выражений.

На основании приведенных формул можно, следуя (2.26), построить компоненты функции $x_\varepsilon^v(t)$, отвечающие переменным ψ и θ, и записать их в виде

$$\psi_\varepsilon^v(t) = \psi_0 + \varepsilon K_0 D_{11} t + S^{(1)}$$
$$S^{(1)} = \varepsilon^2 t K_0^2 D_{33} \cos\theta_0 + {}^1/_2 \varepsilon^3 K_0 D_{21} I_3 t^2 - \tag{3.7}$$
$$- \varepsilon A D_{11} \exp(-\varepsilon A^{-1} I_1 t) C^\circ \sin(\alpha^{(1)} + \sigma)/\sin\theta_0$$
$$\theta_\varepsilon^v(t) = \theta_0 + \varepsilon^2 t I_1 K_0 D_{22} \sin\theta_0 + \varepsilon A D_{11} \exp(-\varepsilon A^{-1} I_1 t) C^\circ \sin(\alpha^{(1)} - \mu)$$
$$\cos\sigma = \sin\mu = b^{(1)} \exp(\varepsilon A^{-1} I_1 t)/C^\circ, \quad C^\circ = (a^{\circ 2} + b^{\circ 2})^{1/2}$$

Сравнение полученных выражений (3.7) с формулами (4.7) статьи [3] дает совпадение указанных выражений при $K = K_0$. В выражении (3.7) для θ_ε^v слагаемое порядка ε является произведением медленно экспоненциально убывающего сомножителя $\exp(-\varepsilon A^{-1} I_1 t)$, обусловленного диссипацией энергии, и осциллирующего сомножителя $\sin(\alpha^{(1)} - \mu)$.

Величина декремента затухания и характер медленного изменения фазы малых колебаний видны из формул (3.6) для $b^{(1)}$, $\alpha^{(1)}$, которые отличаются от соответствующих формул (4.5) [3] величиной w.

В выражении (3.7) слагаемое $S^{(1)}(\varepsilon, t)$ для переменной $\psi_\varepsilon^v(t)$ имеет порядок ε на интервале времени $(0, T\varepsilon^{-1})$. Выражение для угловой скорости прецессии $\omega_p = K_0 C^{-1} r_0^{-1}$ известно из приближенной теории гироскопов [8]. Найденное слагаемое $S^{(1)}(\varepsilon, t)$ уточняет эту формулу для рассматриваемой задачи.

Для рассматриваемого примера, когда восстанавливающий момент определяется по формуле (2.27) с учетом (2.13) решение усредненной системы уравнений первого приближения (2.16) для $a^{(1)}$, $b^{(1)}$, $\delta^{(1)}$, $\theta^{(1)}$, $\gamma^{(1)}$ имеет вид (3.6). При этом только выражения для $\psi^{(1)}$ и $\alpha^{(1)}$ изменяются и записываются следующим образом:

$$\psi^{(1)} = D_{11} k(\theta_0) t + \psi_0$$
$$\alpha^{(1)} = CA^{-1} r_0 t - D_{11} k(\theta_0) t \cos\theta_0 - {}^1/_2 \varepsilon^2 A^{-1} I_3 r_0 t^2 + \varphi_0 \tag{3.8}$$

В (3.6)

$$w = D_{11} \{(mgl + \nu hz)\cos\theta_0 - {}^1/_2 \nu hz s_0 [2(h^2 + z^2)\cos\theta_0 -$$
$$- 5hz \cos^2\theta_0 + hz](h^2 + z^2 - 2hz\cos\theta_0)^{-3/2}\}$$

а в (3.8) $k(\theta_0)$ определяется по формуле (2.27) при $\theta = \theta_0$.

Компоненты функции $x_\varepsilon^v(t)$, отвечающие переменным ψ и θ, для рассматриваемого примера имеют вид

$$\psi_\varepsilon^v(t) = \psi_0 + D_{11} k(\theta_0) t + S^{(1)}$$
$$S^{(1)} = D_{33} \cos\theta_0 k^2(\theta_0) t + {}^1/_2 \varepsilon^2 D_{21} I_3 k(\theta_0) t^2 - \tag{3.9}$$
$$- \varepsilon D_{11} A \exp(-\varepsilon A^{-1} I_1 t) C^\circ \sin(\alpha^{(1)} + \sigma)/\sin\theta_0$$

$$\theta_\varepsilon^v(t) = \theta_0 + \varepsilon I_1 D_{22} \sin\theta_0 k(\theta_0)\, t + \varepsilon D_{11} A \exp(-\varepsilon A^{-1} I_1 t)\, C^\circ \sin(\alpha^{(1)} - \mu)$$
$$\cos\sigma = \sin\mu = b^{(1)} \exp(\varepsilon A^{-1} I_1 t)/C^\circ$$

4. Случай малого постоянного момента. Рассмотрим движение твердого тела в случае Лагранжа под действием момента, постоянного в связанных осях. Тогда моменты сил, действующих на твердое тело, имеют вид $M_i = \varepsilon^2 M_i^* = \varepsilon^2 M_i^\circ = \text{const}$ $(i = 1, 2, 3)$. При построении приближенного решения системы (2.8) с учетом выражения для M_i применим процедуру усреднения, описанную в разд. 2. Вектор-функция B_1 определяется согласно (3.3), а вектор-функция A_1, полученная по формуле (2.13), имеет следующие компоненты:

$$\begin{gathered} A_1^{(1)} = -KD_{11} b \cos\theta - {}^1/_2 K' D_{11} b \sin\theta \\ A_1^{(2)} = KD_{11} a \cos\theta + {}^1/_2 K' D_{11} a \sin\theta \\ A_1^{(3)} = C^{-1} M_3^*, \; A_1^{(4)} = KD_{11}, \; A_1^{(5)} = 0 \end{gathered} \tag{4.1}$$

Четвертая и пятая компоненты вектор-функции u_1 выражаются по формулам (3.4). Функция $A_2(x^*)$ определяется по (2.15) и может быть записана в виде

$$\begin{gathered} A_2^{(1)} = D_{12} b\, [\delta K \cos\theta - {}^1/_2 A K^2 D_{21} (3\cos^2\theta - 1) + {}^1/_2 K'\delta \sin\theta + \\ + {}^1/_8 A D_{21} (K' \sin\theta)^2 - {}^1/_2 A K' D_{21} K \sin 2\theta] \\ A_2^{(2)} = -D_{22} a\, [\delta K \cos\theta - {}^1/_2 A K^2 D_{21} (3\cos^2\theta - 1) + {}^1/_2 K'\delta \sin\theta + \\ + {}^1/_8 A D_{21} (K' \sin\theta)^2 - {}^1/_2 A K' D_{21} K \sin 2\theta] \\ A_2^{(3)} = 0, \; A_2^{(4)} = -KD_{12}\delta + AK^2 D_{33} \cos\theta, \; A_2^{(5)} = 0 \end{gathered} \tag{4.2}$$

Определим решение усредненной системы уравнений первого приближения (2.16) с учетом (4.1) для медленных и быстрых переменных

$$\begin{gathered} a^{(1)} = a^\circ \cos wt - b^\circ \sin wt, \; b^{(1)} = b^\circ \cos wt + a^\circ \sin wt \\ \delta^{(1)} = \varepsilon C^{-1} M_3^* t, \; \psi^{(1)} = \varepsilon K_0 D_{11} t + \psi_0, \; \theta^{(1)} = \theta_0 \\ \alpha^{(1)} = CA^{-1} r_0 t - \varepsilon K_0 D_{11} \cos\theta_0 t + {}^1/_2 \varepsilon^2 A^{-1} M_3^* t^2 + \varphi_0 \\ \gamma^{(1)} = n_0 t + {}^1/_2 \varepsilon^2 (C - A)\, C^{-1} A^{-1} M_3^* t^2 \end{gathered} \tag{4.3}$$

(Обозначения те же, что в (3.6)).

Отметим, что в решение усредненной системы первого приближения (4.3) входит только составляющая момента, постоянного в связанных осях, приложенная вдоль оси симметрии M_3^*. Проекции вектора возмущающего момента M_1^*, M_2^* выпадают при усреднении. Сравнение полученных решений (4.3) для медленных переменных $a^{(1)}$, $b^{(1)}$ с соответствующими выражениями (5.3) статьи [3], полагая в них $K = \text{const}$, дает совпадение указанных формул.

Согласно (2.26) и формулам (3.4), (4.2), (4.3) определяются компоненты функции $x_\varepsilon^v(t)$, отвечающие переменным ψ и θ:

$$\begin{gathered} \psi_\varepsilon^v(t) = \psi_0 + \varepsilon K_0 D_{11} t + V^{(1)} \\ V^{(1)} = \varepsilon^2 t K_0^2 D_{33} A \cos\theta_0 - {}^1/_2 \varepsilon^3 D_{22} M_3^* K_0 t^2 - \varepsilon D_{11} A C^\circ \sin(\alpha^{(1)} + \varkappa)/\sin\theta_0 \\ \theta_\varepsilon^v(t) = \theta_0 + \varepsilon D_{11} A C^\circ \sin(\alpha^{(1)} - \chi) \\ \cos\varkappa = \sin\chi = b^{(1)}/C^\circ \end{gathered} \tag{4.4}$$

Здесь в выражении для θ_ε^v ограниченное осциллирующее слагаемое содержит ненулевые начальные данные a°, b°. Полученное слагаемое $V^{(1)}$, так же как и в предыдущей задаче, дополняет известное из приближенной теории гироскопов выражение для угловой скорости прецессии $\omega_p = KC^{-1} r_0^{-1}$.

Заметим, что формулы для углов нутации и прецессии не содержат параметров возмущающих моментов, если ограничиться построением первого приближения. В этом случае влияние возмущений на регулярную прецессию тела не учитывается и, таким образом, построение второго приближения является существенным.

Для рассматриваемого примера, когда восстанавливающий момент зависит от угла нутации согласно (2.27) с учетом (2.13), решение усредненной системы первого приближения (2.16) для $a^{(1)}$, $b^{(1)}$, $\delta^{(1)}$, $\theta^{(1)}$, $\gamma^{(1)}$ имеет вид (4.3). При этом только выражения для $\psi^{(1)}$ и $\alpha^{(1)}$ изменяются и записываются следующим образом:

$$\psi^{(1)} = D_{11}k(\theta_0)\,t + \psi_0 \tag{4.5}$$

$$\alpha^{(1)} = CA^{-1}r_0 t - D_{11}k(\theta_0)\cos\theta_0 t + {}^1/_2\varepsilon^2 A^{-1}M_3{}^*t^2 + \varphi_0$$

В (4.3)

$$w = D_{11}\{(mgl + \nu hz)\cos\theta_0 - {}^1/_2\nu hzs_0\,[2(h^2+z^2)\cos\theta_0 - 5hz\cos^2\theta_0 + hz]\,(h^2 + z^2 - 2hz\cos\theta_0)^{-3/2}\}$$

а в (4.5) $k(\theta_0)$ определяется по формуле (2.27) при $\theta = \theta_0$.

Компоненты функций $x_\varepsilon{}^v(t)$, отвечающие переменным ψ, θ, для рассматриваемого примера записываются следующим образом:

$$\psi_\varepsilon{}^v(t) = \psi_0 + D_{11}k(\theta_0)\,t + V^{(1)}$$

$$V^{(1)} = -{}^1/_2\varepsilon^2 D_{22}M_3{}^*k(\theta_0)\,t^2 + D_{33}A\cos\theta_0 k^2(\theta_0)\,t - \varepsilon D_{11}AC^\circ\sin(\alpha^{(1)}+\varkappa)/\sin\theta_0 \tag{4.6}$$

$$\theta_\varepsilon{}^v(t) = \theta_0 + \varepsilon D_{11}AC^\circ\sin(\alpha^{(1)} - \chi)$$

$$\cos\varkappa = \sin\chi = b^{(1)}/C^\circ$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д., Черноусько Ф. Л.* Возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 5. С. 771—778.
2. *Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д., Черноусько Ф. Л.* Возмущенные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 5. С. 3—10.
3. *Лещенко Д. Д., Шамаев А. С.* Возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа // Изв. АН СССР. МТТ, 1987. № 6. С. 8—17.
4. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
5. *Волосов В. М., Моргунов Б. С.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.
6. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981. 400 с.
7. *Кошляков В. Н.* Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов: Аналитические методы. М.: Наука, 1985. 286 с.
8. *Бухгольц Н. Н.* Основной курс теоретической механики. Ч. 2. М.: Наука, 1969. 332 с.

Поступила в редакцию
19.IV.1989

Одесса