МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1987

УДК 531.383

# ВОЗМУЩЕННЫЕ ВРАЩАТЕЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА, БЛИЗКИЕ К РЕГУЛЯРНОЙ ПРЕЦЕССИИ В СЛУЧАЕ ЛАГРАНЖА

ЛЕЩЕНКО Д. Д., ШАМАЕВ А. С.

Исследуются возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа. Предполагается, что угловая скорость тела достаточно велика, ее направление близко к оси динамической симметрии тела и возмущающие моменты малы по сравнению с восстанавливающим. Специальным образом вводится малый параметр, применяется метод усреднения. Получены усредненные системы уравнений движения в первом и втором приближениях. Рассмотрены конкретные механические модели возмущений.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим движение динамически симметричного твердого тела вокруг неподвижной точки $O$ под действием восстанавливающего и возмущающего моментов. Уравнения движения (динамические и кинематические уравнения Эйлера) имеют вид

$$
\begin{gathered}
Ap^{\cdot}+(C-A)\,qr=k\sin\theta\cos\varphi+M_1\\
Aq^{\cdot}+(A-C)\,pr=-k\sin\theta\sin\varphi+M_2\\
Cr^{\cdot}=M_3,\ M_i=M_i(p,\ q,\ r,\ \psi,\ \theta,\ \varphi,\ t)\ \ (i=1,\ 2,\ 3) \qquad (1.1)\\
\psi^{\cdot}=(p\sin\varphi+q\cos\varphi)\operatorname{cosec}\theta,\ \ \theta^{\cdot}=p\cos\varphi-q\sin\varphi\\
\varphi^{\cdot}=r-(p\sin\varphi+q\cos\varphi)\operatorname{ctg}\theta
\end{gathered}
$$

Динамические уравнения (1.1) записаны в проекциях на главные оси инерции тела, проходящие через точку $O$. Здесь $p$, $q$, $r$ — проекции вектора угловой скорости тела на эти оси, $M_i(i=1,\ 2,\ 3)$ — проекции вектора возмущающего момента на те же оси, являющиеся периодическими функциями углов Эйлера $\psi$, $\theta$, $\varphi$ с периодами $2\pi$, $A$ — экваториальный, а $C$ — осевой моменты инерции тела относительно точки $O$, $A\neq C$. Предполагается, что на тело действует восстанавливающий момент, максимальная величина которого равна $k$ и который создается постоянной по величине и направлению силой, приложенной в некоторой фиксированной точке оси динамической симметрии. В случае тяжелого волчка имеем $k=mgl$, где $m$ — масса тела, $g$ — ускорение силы тяжести, $l$ — расстояние от неподвижной точки $O$ до центра тяжести тела.

Возмущающие моменты $M_i$ в (1.1) предполагаются известными функциями своих аргументов. При отсутствии возмущений ($M_i=0$, $i=1,\ 2,\ 3$) уравнения (1.1) отвечают случаю Лагранжа.

Уравнения (1.1) могут описывать движения волчка Лагранжа при воздействии возмущений различной физической природы, а также движения свободного твердого тела относительно центра масс, когда на него действует восстанавливающий момент, обусловленный аэродинамическими силами, и некоторые возмущающие моменты.

В данной работе делаются следующие исходные предположения:

$$
p^2+q^2\ll r^2,\ \ Cr^2\gg k,\ \ |M_i|\ll k\ \ (i=1,\ 2,\ 3) \qquad (1.2)
$$

Предположения (1.2) означают, что направление угловой скорости тела близко к оси динамической симметрии; угловая скорость достаточно велика, так что кинетическая энергия тела много больше потенциальной энергии, обусловленной восстанавливающим моментом; возмущающие моменты малы по сравнению с восстанавливающим. Неравенства (1.2) позволяют ввести малый параметр $\varepsilon \ll 1$ и положить

$$p=\varepsilon P,\ q=\varepsilon Q,\ k=\varepsilon K$$
$$M_i=\varepsilon^2 M_i^*(P, Q, r, \psi, \theta, \varphi, t)\ (i=1, 2, 3) \tag{1.3}$$

В [1] также рассматриваются движения тяжелого твердого тела, близкие к случаю Лагранжа. Предполагается, что на тело действуют малые возмущающие моменты, удовлетворяющие некоторым дополнительным условиям. Далее в [1] проводится усреднение уравнений движения по углу нутации и даются результаты численного интегрирования полученной усредненной системы для случая линейных диссипативных возмущающих моментов. В отличие от [1] дальше рассматривается случай быстро вращающегося вокруг оси динамической симметрии тела, поэтому порождающим решением является не траектория движения в случае Лагранжа, а некоторое более простое решение. Вследствие этого с помощью метода усреднения в первом и втором приближениях удается получить явные аналитические решения.

В [2], как и в данной работе, предполагается, что угловая скорость достаточно велика, а ее направление близко к оси динамической симметрии тела. В отличие от третьего неравенства (1.2) в [2] считается, что две проекции вектора возмущающего момента на главные оси инерции тела малы по сравнению с восстанавливающим моментом, а третья — одного с ним порядка.

Новые переменные $P$, $Q$, а также переменные и постоянные $r$, $\psi$, $\theta$, $\varphi$, $K$, $A$, $C$, $M_i^*$ предполагаются ограниченными величинами порядка единицы при $\varepsilon \to 0$. Ставится задача исследования асимптотического поведения системы (1.1) при малом $\varepsilon$, если выполнены условия (1.2), (1.3). Будем пользоваться методом усреднения [3, 4] на интервале времени порядка $\varepsilon^{-1}$.

Отметим, что метод усреднения широко применялся в задачах динамики твердого тела. В [5, 6] этим методом исследован ряд задач динамики, главным образом для тел, обладающих динамической симметрией, в [7] впервые проведено усреднение по движению Эйлера — Пуансо для несимметричного тела, в [1, 2, 6, 8, 9] исследованы возмущенные движения, близкие к движению Лагранжа. Совокупность упрощающих предположений (1.2) или (1.3) позволяет получить в общем случае сравнительно простую схему усреднения и исследовать ряд примеров.

**2. Процедура усреднения.** Сделаем в системе (1.1) замену переменных (1.3). Сократив обе части первых двух уравнений (1.1) на $\varepsilon$, получим

$$AP^{\cdot}+(C-A)Qr=K\sin\theta\cos\varphi+\varepsilon M_1^* \tag{2.1}$$
$$AQ^{\cdot}+(A-C)Pr=-K\sin\theta\sin\varphi+\varepsilon M_2^*$$
$$Cr^{\cdot}=\varepsilon^2 M_3^*,\ \psi^{\cdot}=\varepsilon(P\sin\varphi+Q\cos\varphi)\operatorname{cosec}\theta$$
$$\theta^{\cdot}=\varepsilon(P\cos\varphi-Q\sin\varphi),\ \varphi^{\cdot}=r-\varepsilon(P\sin\varphi+Q\cos\varphi)\operatorname{ctg}\theta$$

Рассмотрим сначала систему нулевого приближения и положим $\varepsilon=0$ в (2.1). Тогда из последних четырех уравнений (2.1) получим

$$r=r_0,\ \psi=\psi_0,\ \theta=\theta_0,\ \varphi=r_0t+\varphi_0 \tag{2.2}$$

Здесь $r_0$, $\psi_0$, $\theta_0$, $\varphi_0$ — постоянные, равные начальным значениям соответствующих переменных при $t=0$. Подставим равенства (2.2) в первые два уравнения системы (2.1) при $\varepsilon=0$ и проинтегрируем полученную систему двух линейных уравнений для $P$, $Q$. Решение можно представить в виде

$$P=a\cos\gamma_0+b\sin\gamma_0+KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\sin(r_0t+\varphi_0)$$
$$Q=a\sin\gamma_0-b\cos\gamma_0+KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\cos(r_0t+\varphi_0)$$
$$a=P_0-KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\sin\varphi_0,\ b=-Q_0+KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\cos\varphi_0$$
$$\gamma_0=n_0t,\ n_0=(C-A)A^{-1}r_0\neq 0,\ |n_0/r_0|\leqslant 1 \tag{2.3}$$

Здесь $P_0$, $Q_0$ — начальные значения новых переменных $P$, $Q$, введенных согласно (1.3), а переменная $\gamma=\gamma_0$ имеет смысл фазы колебаний. Система (2.1) существенно нелинейна (частота собственных колебаний переменных $P$, $Q$ зависит от медленной переменной $r$), поэтому далее вводится дополнительная переменная $\gamma$, определяемая уравнением

$$\gamma^{\cdot}=n,\ \ \gamma(0)=0,\ \ n=(C-A)A^{-1}r \tag{2.4}$$

При $\varepsilon=0$ имеем $\gamma=\gamma_0=n_0t$ в соответствии с (2.3). Равенства (2.2), (2.3) определяют общее решение системы (2.1), (2.4) при $\varepsilon=0$. Первые два соотношения (2.3) можно, исключая постоянные с учетом (2.2), переписать в эквивалентном виде

$$\begin{gathered} P=a\cos\gamma+b\sin\gamma+KC^{-1}r^{-1}\sin\theta\sin\varphi \\ Q=a\sin\gamma-b\cos\gamma+KC^{-1}r^{-1}\sin\theta\cos\varphi \end{gathered} \tag{2.5}$$

Разрешим равенства (2.5) относительно $a$, $b$:

$$\begin{gathered} a=P\cos\gamma+Q\sin\gamma-KC^{-1}r^{-1}\sin\theta\sin(\gamma+\varphi) \\ b=P\sin\gamma-Q\cos\gamma+KC^{-1}r^{-1}\sin\theta\cos(\gamma+\varphi) \end{gathered} \tag{2.6}$$

Введем новую переменную $\delta$ следующим образом:

$$r=r_0+\varepsilon\delta \tag{2.7}$$

Обратимся теперь к системе (2.1) при $\varepsilon\neq0$ и будем рассматривать соотношения (2.5)—(2.7) как формулы замены переменных, определяющие переход от переменных $P$, $Q$, $r$ к переменным $a$, $b$, $\delta$ (в эти формулы входит также новая переменная $\gamma$). Пользуясь этими формулами, перейдем в системе (2.1), (2.4) от переменных $P$, $Q$, $r$, $\psi$, $\theta$, $\varphi$, $\gamma$ к новым переменным $a$, $b$, $\delta$, $\psi$, $\theta$, $\alpha$, $\gamma$, где

$$\alpha=\gamma+\varphi \tag{2.8}$$

После преобразований получим более удобную для дальнейшего исследования систему семи уравнений (вместо шести (2.1)):

$$\begin{gathered} a^{\cdot}=\varepsilon A^{-1}(M_1^0\cos\gamma+M_2^0\sin\gamma)-\varepsilon KC^{-1}r_0^{-1}\cos\theta\,(b- \\ -KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta\cos\alpha)+\varepsilon^2KC^{-1}r_0^{-2}\delta\cos\theta\,(b-2KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta\cos\alpha)+ \\ +\varepsilon^2KC^{-2}r_0^{-2}M_3^0\sin\theta\sin\alpha \\ b^{\cdot}=\varepsilon A^{-1}(M_1^0\sin\gamma-M_2^0\cos\gamma)+\varepsilon KC^{-1}r_0^{-1}\cos\theta\,(a+ \\ +KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta\sin\alpha)-\varepsilon^2KC^{-1}r_0^{-2}\delta\cos\theta\,(a+ \\ +2KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta\sin\alpha)-\varepsilon^2KC^{-2}r_0^{-2}M_3^0\sin\theta\cos\alpha \\ \delta^{\cdot}=\varepsilon C^{-1}M_3^0 \\ \psi^{\cdot}=\varepsilon\operatorname{cosec}\theta\,(a\sin\alpha-b\cos\alpha)+\varepsilon KC^{-1}r_0^{-1}-\varepsilon^2KC^{-1}r_0^{-2}\delta \\ \theta^{\cdot}=\varepsilon(a\cos\alpha+b\sin\alpha) \\ \alpha^{\cdot}=CA^{-1}r_0+\varepsilon CA^{-1}\delta-\varepsilon\operatorname{ctg}\theta\,(a\sin\alpha-b\cos\alpha)- \\ -\varepsilon KC^{-1}r_0^{-1}\cos\theta+\varepsilon^2KC^{-1}r_0^{-2}\delta\cos\theta \\ \gamma^{\cdot}=n_0+\varepsilon(C-A)A^{-1}\delta \end{gathered} \tag{2.9}$$

Здесь через $M_i^0$ обозначены функции, полученные из $M_i^*$ (см. (1.3)) в результате сделанной подстановки (2.5)—(2.8):

$$M_i^0(a,b,\ \delta,\psi,\theta,\alpha,\gamma,t)=M_i^*(P,Q,r,\psi,\theta,\varphi,t)\quad (i=1,2,3) \tag{2.10}$$

Следует отметить, что переход от двух переменных $P$, $Q$ к трем $a$, $b$, $\gamma$ вызван соображениями удобства: при $\varepsilon=0$ система для $P$, $Q$ линейная, а замена (2.5) — неособая для всех $a$, $b$.

Рассматриваемая система уравнений (2.9) может быть приведена к виду

$$x^{\bullet}=\varepsilon F_1(x, y)+\varepsilon^2 F_2(x, y),\ x(0)=x_0$$
$$y^{1\bullet}=\omega_1+\varepsilon g_1(x, y)+\varepsilon^2 g_2(x, y),\ y^1(0)=y^{10} \qquad (2.11)$$
$$y^{2\bullet}=\omega_2+\varepsilon h_1(x, y)+\varepsilon^2 h_2(x, y),\ y^2(0)=y^{20}$$

где вектор-функция $x=(x^1, \ldots, x^5)$ составлена из медленных переменных $a$, $b$, $\delta$, $\psi$, $\theta$; через $y^1$ и $y^2$ обозначены быстрые переменные $\alpha$, $\gamma$; $\omega_1$, $\omega_2$ — постоянные фазы, равные $CA^{-1}r_0$ и $(C-A)A^{-1}r_0$ соответственно. Вектор-функции $F_i$, $g_i$, $h_i$ $(i=1, 2)$ определяются правыми частями уравнений (2.9). Zacn

Двумерный вектор $(g_1, h_1)$ обозначим $Z_1$. Здесь и далее предполагаем, что возмущающие моменты $M_i{}^*$ не зависят от $t$. Так как $M_i{}^*(i=1, 2, 3)$ периодичны по $\varphi$ с периодом $2\pi$, то согласно замене (2.5), (2.6), (2.8) функции $M_i{}^0$ из (2.10) будут периодическими функциями $\alpha$ и $\gamma$ с периодами $2\pi$.

Согласно известной процедуре построения асимптотики системы (2.11) [4] будем искать замену переменных

$$x=x^*+\varepsilon u_1(x^*, y^*)+\varepsilon^2 u_2(x^*, y^*)+\ldots$$
$$y=y^*+\varepsilon v_1(x^*, y^*)+\varepsilon^2 v_2(x^*, y^*)+\ldots$$
$$y=(y^1, y^2),\ x^*=(x^{*1}, \ldots, x^{*5}),\ y^*=(y^{*1}, y^{*2})$$

такую, что система (2.11) в новых переменных $(x^*, y^*)$ приняла бы вид

$$x^{*\bullet}=\varepsilon A_1(x^*)+\varepsilon^2 A_2(x^*)+\ldots \qquad (2.12)$$
$$y^{*\bullet}=\omega+\varepsilon B_1(x^*)+\varepsilon^2 B_2(x^*)+\ldots,\ \omega=(\omega_1, \omega_2)$$

Для этого нужно соответствующим образом выбрать функции $u_1$, $u_2$, $v_1$, $v_2$, определяющие замену переменных. Известно [4], что уравнения для вектор-функций $u_1$, $v_1$ имеют вид

$$\omega\, \partial u_1/\partial y^*=F_1(x^*, y^*)-A_1(x^*) \qquad (2.13)$$
$$\omega\, \partial v_1/\partial y^*=Z_1(x^*, y^*)-B_1(x^*)$$

где $(\partial f/\partial x)$ — матрица частных производных $\|\partial f_i/\partial x^j\|$ $(i, j=1, \ldots, 5)$. Функции $A_1(x^*)$, $B_1(x^*)$ определяются по формулам

$$A_1(x^*)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} F_1(x^*, y^*)\,dy^{*1}\,dy^{*2},\quad B_1(x^*)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} Z_1(x^*, y^*)\,dy^{*1}\,dy^{*2} \qquad (2.14)$$

Функция $u_2(x^*, y^*)$ должна быть решением уравнения

$$\frac{\partial u_2}{\partial y^*}\omega=F_2(x^*, y^*)+\frac{\partial F_1}{\partial x^*}u_1+\frac{\partial F_1}{\partial y^*}v_1-\frac{\partial u_1}{\partial x^*}A_1(x^*)-\frac{\partial u_1}{\partial y^*}B_1(x^*)-A_2(x^*) \qquad (2.15)$$

Функция $A_2(x^*)$ определяется по формуле

$$A_2(x^*)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(F_2(x^*, y^*)+\frac{\partial F_1}{\partial x^*}u_1+\frac{\partial F_1}{\partial y^*}v_1-\frac{\partial u_1}{\partial x^*}A_1(x^*)-$$
$$-\frac{\partial u_1}{\partial y^*}B_1(x^*)\Big)dy^{*1}\,dy^{*2} \qquad (2.16)$$

Определим усредненную систему уравнений первого приближения для медленных переменных

$$x_1{}^{*\bullet}=\varepsilon A_1(x_1{}^*),\ \ x_1{}^*(0)=x_{10} \qquad (2.17)$$

а также систему второго приближения для медленных переменных

$$x_2^{*\cdot}=\varepsilon A_1(x_2^*)+\varepsilon^2 A_2(x_2^*),\ x_2^*(0)=x_{20} \qquad (2.18)$$

и систему уравнений второго приближения для быстрых переменных

$$y_2^{*\cdot}=\omega+\varepsilon B_1(x_1^*(t)),\ y_2^*(0)=y^0,\ y^0=(y^{10},\ y^{20}) \qquad (2.19)$$

которая сразу интегрируется:

$$y_2^*(t)=\omega t+y^0+\varepsilon\int_0^t B_1(x_1^*(s))\,ds \qquad (2.20)$$

Для исследования системы второго приближения (2.18) удобно сделать замену независимой переменной $\tau=\varepsilon t$. Тогда система (2.18) примет вид

$$dx_2^*/d\tau=A_1(x_2^*)+\varepsilon A_2(x_2^*) \qquad (2.21)$$

При этом интервал времени $(0,\ T/\varepsilon)$, на котором рассматриваются решения исходной системы (2.11), перейдет в интервал $(0,\ T)$, не зависящий от малого параметра $\varepsilon$. Будем искать решение системы (2.21) в виде

$$x_2^*(\tau)=x^{(1)}(\tau)+\varepsilon x^{(2)}(\tau)+O(\varepsilon^2) \qquad (2.22)$$

Подставляя в (2.21) разложение (2.22), получим следующие системы уравнений для вектор-функций $x^{(i)}(\tau)=x_i(t)$ $(\tau=\varepsilon t,\ i=1,\ 2)$:

$$dx^{(1)}/d\tau=A_1(x^{(1)}),\qquad x^{(1)}(0)=x_0 \qquad (2.23)$$

$$dx^{(2)}/d\tau=A_1'(x^{(1)}(\tau))x^{(2)}+A_2(x^{(1)}(\tau)),\qquad x^{(2)}(0)=0 \qquad (2.24)$$

где $A_1'$ — матрица частных производных компонент вектор-функций $A_1(x)$: $A_1'(x)=\|\partial A_1^i/\partial x^j\|$. Система (2.23) является линейной, поэтому ее использование в ряде случаев проще, чем исследование системы (2.21).

Обозначим $X(\tau,\ c)$ общее решение системы первого приближения (2.23):

$$X_\tau'=A_1(X),\qquad X(0,\ c)=c=x_0 \qquad (2.25)$$

Тогда для функций $x^{(1)}(\tau)$, $x^{(2)}(\tau)$ получаются выражения

$$x^{(1)}(\tau)=X(\tau,x_0),\ x^{(2)}(\tau)=\Phi(\tau)\int_0^\tau \Phi^{-1}(\tau_1)\eta(\tau_1)\,d\tau_1 \qquad (2.26)$$

Здесь $\Phi$ — фундаментальная матрица однородного уравнения, соответствующего второму приближению

$$\Phi(\tau)=\|\partial X(\tau,\ c)/\partial c\|_{c=x_0},\qquad \eta(\tau)=A_2(x^{(1)}(\tau))=A_2(X(\tau,\ x_0))$$

Определим вектор-функции

$$x_\varepsilon^\smile(t)=x^{(1)}(\varepsilon t)+\varepsilon x^{(2)}(\varepsilon t)+\varepsilon u_1(x^{(1)}(\varepsilon t),\ y^0+\omega t+\varepsilon\int_0^t B_1(x^{(1)}(\varepsilon s))\,ds)$$

$$y_\varepsilon^\smile(t)=y^0+\omega t+\varepsilon\int_0^t B_1(x^{(1)}(\varepsilon s))\,ds \qquad (2.27)$$

*Теорема.* Существует такое множество $L$ меры нуль на плоскости $(\omega_1,\ \omega_2)$, что если $\omega$ не принадлежит $L$, то уравнения (2.13), (2.15) разрешимы (а значит, и приведенная выше формальная схема построения функций $x_\varepsilon^\smile(t)$, $y_\varepsilon^\smile(t)$ имеет смысл) и имеют место неравенства

$$|x_\varepsilon^\smile(t)-x(t)|\leqslant C_1\varepsilon^2,\qquad |y_\varepsilon^\smile(t)-y(t)|\leqslant C_1\varepsilon,\qquad t\in[0,\ T\varepsilon^{-1}] \qquad (2.28)$$

а постоянная $C_1>0$ не зависит от $\varepsilon$. Доказательство теоремы проводится на основе стандартной процедуры замены переменных метода усреднения

[4], а также арифметической леммы, используемой для оценки «малых знаменателей» [10], возникающих при построении решений уравнений (2.13), (2.15) в виде тригонометрических рядов [4].

Таким образом, построение приближенных решений $x_\varepsilon\check{}(t)$, $y_\varepsilon\check{}(t)$, удовлетворяющих оценке (2.28), сводится к следующей процедуре: решаем с помощью рядов Фурье уравнения (2.13), (2.15), затем по формуле (2.16) строим вектор-функцию $A_2(x^*)$, далее согласно (2.26) определяем решения $x^{(1)}(\tau)$ и $x^{(2)}(\tau)$ уравнений (2.23), (2.24) и, наконец, по формуле (2.27) получаем искомые приближения $x_\varepsilon\check{}(t)$, $y_\varepsilon\check{}(t)$. Далее описанная процедура реализуется для некоторых конкретных систем уравнений динамики твердого тела.

Рассматриваемые дальше примеры возмущений таковы, что разложения в ряд Фурье правых частей уравнений (2.13) и (2.15) содержат лишь конечное число членов. Поэтому условие разрешимости уравнений (2.13) и (2.15) сводится к проверке конечного числа условий вида $\omega_1 m_1+\omega_2 m_2\neq\neq 0$. В рассматриваемых конкретных примерах условия (2.30) принимают вид $CA^{-1}r_0\neq 0$, $(C-A)A^{-1}r_0\neq 0$, а последние условия выполняются всегда в силу исходных предположений. Таким образом, оценка (2.28) справедлива без каких-либо дополнительных предположений относительно частот $\omega_1$, $\omega_2$.

**3. Случай тела с полостью, заполненной жидкостью большой вязкости.** В качестве примера развитой методики исследуем движение твердого тела в случае Лагранжа с симметричной полостью, заполненной жидкостью большой вязкости. Тогда моменты сил, действующих на твердое тело, имеют вид [11]:

$$M_1=\rho P_{11}\nu^{-1}A^{-2}[C(A-C)pr^2+k(C-A)r\sin\theta\sin\varphi+kAp\cos\theta] \tag{3.1}$$
$$M_2=\rho P_{11}\nu^{-1}A^{-2}[C(A-C)qr^2+k(C-A)r\sin\theta\cos\varphi+kAq\cos\theta]$$
$$M_3=\rho P_{11}\nu^{-1}A^{-2}[A(C-A)(p^2+q^2)r-kA\sin\theta(p\sin\varphi+q\cos\varphi)]$$

где $\rho$ и $\nu$ — плотность и кинематический коэффициент вязкости жидкости, $P_{11}$ — компонента введенного в [11] тензора в системе координат, связанной с телом. Тензор зависит только от формы полости, $P_{ii}>0$, в рассматриваемом случае симметричной полости $P_{11}=P_{22}$. Далее будем считать, что $\nu^{-1}\sim\varepsilon$ (вязкость жидкости велика). Сделав замену (1.3) и отбросив члены порядка $O(\varepsilon^3)$, получим

$$M_1^*=\rho P_{11}A^{-2}[C(A-C)Pr^2+K(C-A)r\sin\theta\sin\varphi] \tag{3.2}$$
$$M_2^*=\rho P_{11}A^{-2}[C(A-C)Qr^2+K(C-A)r\sin\theta\cos\varphi],\qquad M_3^*=0$$

Первые три уравнения системы (2.9) в переменных $a$, $b$, $\delta$, $\psi$, $\theta$, $\alpha$, $\gamma$ записываются следующим образом:

$$a^\cdot=\rho P_{11}\nu^{-1}A^{-3}C(A-C)r_0^2a-\varepsilon KC^{-1}r_0^{-1}\cos\theta(b-KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta\cos\alpha)+$$
$$+\varepsilon^2KC^{-1}r_0^{-2}\delta\cos\theta(b-2KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta\cos\alpha) \tag{3.3}$$
$$b^\cdot=\rho P_{11}\nu^{-1}A^{-3}C(A-C)r_0^2b+\varepsilon KC^{-1}r_0^{-1}\cos\theta(a+KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta\sin\alpha)-$$
$$-\varepsilon^2KC^{-1}r_0^{-2}\delta\cos\theta(a+2KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta\sin\alpha),\qquad \delta^\cdot=0$$

Остальные уравнения системы (2.9) не изменяются.

Применим приведенную общую схему построения приближенного решения к конкретной системе (3.3). Вектор-функции $A_1$ и $B_1$ определяются по формулам (2.14) и имеют вид

$$A_1=\{A_1^{(i)}\}\quad(i=\overline{1,5}),\qquad B_1=\{B_1^{(j)}\}\quad(j=1,2)$$
$$A_1^{(1)}=\rho P_{11}A^{-3}C(A-C)r_0^2a-KC^{-1}r_0^{-1}b\cos\theta \tag{3.4}$$
$$A_1^{(2)}=\rho P_{11}A^{-3}C(A-C)r_0^2b+KC^{-1}r_0^{-1}a\cos\theta$$
$$A_1^{(3)}=0,\qquad A_1^{(4)}=KC^{-1}r_0^{-1},\qquad A_1^{(5)}=0$$
$$B_1^{(1)}=CA^{-1}\delta-KC^{-1}r_0^{-1}\cos\theta,\qquad B_1^{(2)}=(C-A)A^{-1}\delta$$

Четвертая и пятая компоненты вектор-функции $u_1=\{u_1^{(i)}\}$ $(i=\overline{1,5})$ выражаются следующим образом:

$$u_1^{(4)}=-C^{-1}Ar_0^{-1}\operatorname{cosec}\theta(a\cos\alpha+b\sin\alpha)$$

$$u_1^{(5)}=C^{-1}Ar_0^{-1}(a\sin\alpha-b\cos\alpha) \qquad (3.5)$$

Вектор-функция $A_2(x^*)$ после соответствующих вычислений по формуле (2.16) может быть записана в виде

$$A_2(x^*)=\{A_2^{(i)}\} \qquad (i=\overline{1,5}) \qquad (3.6)$$

$$A_2^{(1)}=KC^{-1}r_0^{-2}b\cos\theta[\delta-{}^1/_2KC^{-2}Ar_0^{-1}(1+\cos\theta)]$$

$$A_2^{(2)}=-KC^{-1}r_0^{-2}a\cos\theta[\delta-{}^1/_2KC^{-2}Ar_0^{-1}(1+\cos\theta)]$$

$$A_2^{(3)}=0,\ A_2^{(4)}=-KC^{-1}\delta r_0^{-2}+K^2C^{-3}Ar_0^{-3}\cos\theta,\ A_2^{(5)}=0$$

Определим решение усредненной системы уравнений первого приближения (2.17) с учетом (3.4) для медленных и быстрых переменных

$$a^{(1)}=\exp(st)(a^0\cos wt-b^0\sin wt)$$

$$b^{(1)}=\exp(st)(b^0\cos wt+a^0\sin wt) \qquad (3.7)$$

$$\delta^{(1)}=0,\ \psi^{(1)}=\varepsilon KC^{-1}r_0^{-1}t+\psi_0,\ \theta^{(1)}=\theta_0$$

$$\alpha^{(1)}=CA^{-1}r_0t-wt+\varphi_0,\ \gamma^{(1)}=n_0t$$

$$s=\rho P_{11}\nu^{-1}A^{-3}C(A-C)r_0^2,\ w=\varepsilon KC^{-1}r_0^{-1}\cos\theta_0$$

где $s$, $w$, $a^0$, $b^0$, $n_0$ определяются согласно формуле (2.3); $\psi_0$, $\theta_0$, $\varphi_0$ — постоянные, равные начальным значениям углов Эйлера при $t=0$.

На основании приведенных формул можно, следуя (2.27), построить компоненты функции $x_\varepsilon\check{}(t)$, отвечающие переменным $\psi$ и $\theta$:

$$\psi_\varepsilon\check{}(t)=\psi_0+\varepsilon KC^{-1}r_0^{-1}t+\varepsilon^2tKC^{-3}Ar_0^{-3}\cos\theta_0-$$

$$-\varepsilon C^{-1}Ar_0^{-1}\operatorname{cosec}\theta_0(a^{(1)}\cos\alpha^{(1)}+b^{(1)}\sin\alpha^{(1)}) \qquad (3.8)$$

$$\theta_\varepsilon\check{}(t)=\theta_0+\varepsilon C^{-1}Ar_0^{-1}(a^{(1)}\sin\alpha^{(1)}-b^{(1)}\cos\alpha^{(1)})$$

Полученные формулы удобно записать в виде

$$\psi_\varepsilon\check{}(t)=\psi_0+\varepsilon KC^{-1}r_0^{-1}t+\varepsilon^2tKC^{-3}Ar_0^{-3}\cos\theta_0+R^{(1)}$$

$$R^{(1)}=-\varepsilon C^{-1}Ar_0^{-1}\operatorname{cosec}\theta_0\exp(st)(a^{02}+b^{02})^{1/2}\sin(\alpha^{(1)}+\beta) \qquad (3.9)$$

$$\theta_\varepsilon\check{}(t)=\theta_0+\varepsilon C^{-1}Ar_0^{-1}\exp(st)(a^{02}+b^{02})^{1/2}\sin(\alpha^{(1)}-\mu)$$

$$\cos\beta=\sin\mu=b^{(1)}\exp(-st)(a^{02}+b^{02})^{-1/2}$$

В выражении (3.9) для $\theta_\varepsilon\check{}(t)$ слагаемое порядка $\varepsilon$ представляет собой произведение экспоненциально убывающего (при $A<C$) или возрастающего (при $A>C$) сомножителя $\exp(st)$, обусловленного наличием полости с вязкой жидкостью, и осциллирующего сомножителя $\sin(\alpha^{(1)}-\mu)$. Величина декремента затухания и характер медленного изменения фазы малых колебаний видны непосредственно из формул (3.7) для $b^{(1)}$, $\alpha^{(1)}$.

Заметим, что в выражении (3.9) для переменной $\psi_\varepsilon\check{}(t)$ слагаемое $R^{(1)}(\varepsilon,t)$ имеет порядок $O(\varepsilon)$ на интервале времени $(0,T\varepsilon^{-1})$. Выражение для угловой скорости прецессии $\omega_p=KC^{-1}r^{-1}$ хорошо известно из приближенной теории гироскопов [12]. Найденное слагаемое $R^{(1)}(\varepsilon,t)$ уточняет эту формулу для рассматриваемой задачи.

**4. Случай линейных внешних диссипативных моментов.** Рассмотрим возмущенное движение Лагранжа с учетом моментов, действующих на твердое тело со стороны внешней среды. Будем считать, что возмущающие моменты $M_i$ $(i=1,2,3)$ с учетом (1.3) имеют вид [13]:

$$M_1=-\varepsilon^2I_1P,\ M_2=-\varepsilon^2I_1Q,\ M_3=-\varepsilon^2I_3r,\ I_1,\ I_3>0 \qquad (4.1)$$

где $I_1$, $I_3$ — некоторые постоянные коэффициенты пропорциональности, зависящие от свойств среды и формы тела.

Первые три уравнения (2.9) для задачи в переменных $a$, $b$, $\delta$, $\psi$, $\theta$, $\alpha$, $\gamma$ принимают вид

$$a^{\cdot}=-\varepsilon A^{-1}I_1(a+KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta\sin\alpha)-\varepsilon KC^{-1}r_0^{-1}\cos\theta(b- \tag{4.2}$$

$$-KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta\cos\alpha)+\varepsilon^2A^{-1}I_1KC^{-1}r_0^{-2}\delta\sin\theta\sin\alpha+$$

$$+\varepsilon^2KC^{-1}r_0^{-2}\delta\cos\theta(b-2KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta\cos\alpha)-\varepsilon^2KC^{-2}r_0^{-1}I_3\sin\theta\sin\alpha$$

$$b^{\cdot}=-\varepsilon A^{-1}I_1(b-KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta\cos\alpha)+\varepsilon KC^{-1}r_0^{-1}\cos\theta(a+$$

$$+KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta\sin\alpha)-\varepsilon^2A^{-1}I_1KC^{-1}r_0^{-2}\delta\sin\theta\cos\alpha-$$

$$-\varepsilon^2KC^{-1}r_0^{-2}\delta\cos\theta(a+2KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta\sin\alpha)+$$

$$+\varepsilon^2KC^{-2}r_0^{-1}I_3\sin\theta\cos\alpha,\ \delta^{\cdot}=-\varepsilon C^{-1}I_3r_0-\varepsilon^2C^{-1}I_3\delta$$

Остальные уравнения системы (2.9) остаются неизменными.

Воспользуемся описанной в п. 2 процедурой усреднения для построения приближенного решения системы (4.2). Вектор-функция $B_1$ определяется (3.4), а компоненты вектор-функции $A_1$ после вычислений по формулам (2.14) записываются следующим образом:

$$A_1^{(1)}=-A^{-1}I_1a-KC^{-1}r_0^{-1}b\cos\theta,\ A_1^{(2)}=-A^{-1}I_1b+KC^{-1}r_0^{-1}a\cos\theta$$

$$A_1^{(3)}=-C^{-1}I_3r_0,\ A_1^{(4)}=KC^{-1}r_0^{-1},\ A_1^{(5)}=0 \tag{4.3}$$

Четвертая и пятая компоненты вектор-функции $u_1$ выражаются согласно (3.5).

Отметим, что в данном и предыдущем разделах, как следует из уравнений (2.9), (3.3), (4.2), комбинации вида $(M_1^0\cos\gamma+M_2^0\sin\gamma)$ и $(M_1^0\sin\gamma-M_2^0\cos\gamma)$ не зависят от $\gamma$ и правые части указанных уравнений зависят лишь от одной быстрой переменной $\alpha$. Этот факт аналогичен полученным в [1] достаточным условиям возможности усреднения уравнений движения только по углу нутации. В результате упрощается решение уравнений (2.13)

Определим функцию $A_2(x^*)$ по формуле (2.16):

$$A_2^{(1)}=KC^{-1}r_0^{-2}[\delta b\cos\theta-{}^1/_2KC^{-2}r_0^{-1}Ab(3\cos^2\theta-1)-I_1C^{-1}a\cos\theta]$$

$$A_2^{(2)}=-KC^{-1}r_0^{-2}[\delta a\cos\theta-{}^1/_2KC^{-2}r_0^{-1}Aa(3\cos^2\theta-1)+I_1C^{-1}b\cos\theta] \tag{4.4}$$

$$A_2^{(3)}=-C^{-1}I_3\delta,\ A_2^{(4)}=KC^{-1}r_0^{-2}(-\delta+KC^{-2}r_0^{-1}\cos\theta)$$

$$A_2^{(5)}=I_1KC^{-2}r_0^{-2}\sin\theta$$

Решение усредненной системы уравнений первого приближения (2.17) с учетом (4.3) для медленных и быстрых переменных имеет вид

$$a^{(1)}=\exp(-\varepsilon A^{-1}I_1t)(a^0\cos wt-b^0\sin wt)$$

$$b^{(1)}=\exp(-\varepsilon A^{-1}I_1t)(b^0\cos wt+a^0\sin wt)$$

$$\delta^{(1)}=-\varepsilon C^{-1}I_3r_0t,\ \psi^{(1)}=\varepsilon KC^{-1}r_0^{-1}t+\psi_0,\ \theta^{(1)}=\theta_0$$

$$\alpha^{(1)}=CA^{-1}r_0t-wt-{}^1/_2\varepsilon^2A^{-1}I_3r_0t^2+\varphi_0$$

$$\gamma^{(1)}=n_0t-{}^1/_2\varepsilon^2(C-A)A^{-1}C^{-1}I_3r_0t^2 \tag{4.5}$$

где, как и в формулах (3.7), $w=\varepsilon KC^{-1}r_0^{-1}\cos\theta_0$; величины $a^0$, $b^0$, $n_0$ определяются согласно (2.3); $\psi_0$, $\theta_0$, $\varphi_0$ — постоянные, равные начальным значениям углов Эйлера при $t=0$. Сравнение полученных выражений для медленных переменных $a^{(1)}$, $b^{(1)}$, $\delta^{(1)}$, $\psi^{(1)}$, $\theta^{(1)}$ с учетом (2.7) с соответствующими формулами [2], если формально положить в них $I_3=\varepsilon I_3$, дает совпадение указанных выражений.

Согласно (2.27) и формулам (3.5), (4.4), (4.5) определяются компоненты функции $x_\varepsilon\check{}(t)$, отвечающие переменным $\psi$ и $\theta$:

$$\psi_\varepsilon\check{}(t)=\psi_0+\varepsilon KC^{-1}r_0^{-1}t+\varepsilon^2tK^2C^{-3}r_0^{-3}\cos\theta_0+ \tag{4.6}$$

$$+{}^1/_2\varepsilon^3KC^{-2}I_3r_0^{-1}t^2-\varepsilon C^{-1}Ar_0^{-1}\operatorname{cosec}\theta_0(a^{(1)}\cos\alpha^{(1)}+b^{(1)}\sin\alpha^{(1)})$$

$$\theta_\varepsilon\check{}(t)=\theta_0+\varepsilon^2tI_1KC^{-2}r_0^{-2}\sin\theta_0+\varepsilon C^{-1}Ar_0^{-1}(a^{(1)}\sin\alpha^{(1)}-b^{(1)}\cos\alpha^{(1)})$$

Полученные выражения можно записать следующим образом:

$$\psi_\varepsilon{}^{\smile}(t)=\psi_0+\varepsilon KC^{-1}r_0{}^{-1}t+S^{(1)} \tag{4.7}$$

$$S^{(1)}=\varepsilon^2 tK^2C^{-3}r_0{}^{-3}\cos\theta_0+{}^1/_2\varepsilon^3KC^{-2}r_0{}^{-1}I_3t^2-$$
$$-\varepsilon C^{-1}Ar_0{}^{-1}\operatorname{cosec}\theta_0\exp(-\varepsilon A^{-1}I_1t)(a^{02}-b^{02})^{1/2}\sin(\alpha^{(1)}+\sigma)$$

$$\theta_\varepsilon{}^{\smile}(t)=\theta_0+\varepsilon^2tI_1KC^{-2}r_0{}^{-2}\sin\theta_0+$$
$$+\varepsilon C^{-1}Ar_0{}^{-1}\exp(-\varepsilon A^{-1}I_1t)(a^{02}+b^{02})^{1/2}\sin(\alpha^{(1)}-\lambda)$$

$$\cos\sigma=\sin\lambda=b^{(1)}\exp(\varepsilon A^{-1}I_1t)(a^{02}+b^{02})^{-1/2}$$

В выражении (4.7) для $\theta_\varepsilon{}^{\smile}$ слагаемое порядка $\varepsilon$ является произведением медленно экспоненциально убывающего сомножителя $\exp(-\varepsilon A^{-1}I_1t)$, обусловленного диссипацией энергии, и осциллирующего сомножителя $\sin(\alpha^{(1)}-\lambda)$. Величина декремента затухания и характер медленного изменения фазы малых колебаний видны из формул (4.5) для $b^{(1)}$, $\alpha^{(1)}$.

В выражении (4.7) для переменной $\psi_\varepsilon{}^{\smile}(t)$ слагаемые $S^{(1)}(\varepsilon, t)$ имеют порядок $O(\varepsilon)$ на интервале времени $(0, T\varepsilon^{-1})$.

Полученное выражение $S^{(1)}(\varepsilon, t)$ уточняет для данной задачи формулу угловой скорости прецессии $\omega_p=KC^{-1}r_0{}^{-1}$, имеющую место в приближенной теории гироскопов.

**5. Случай малого постоянного момента.** Рассмотрим движение твердого тела в случае Лагранжа под действием момента, постоянного в связанных осях. Возмущающие моменты $M_i$ $(i=1, 2, 3)$ в этом случае имеют вид $M_i=\varepsilon^2M_i{}^*=\varepsilon^2M_i{}^0=\text{const}$. При построении приближенного решения системы (2.9) с учетом выражения для $M_i$ применим процедуру усреднения, приведенную в п. 2. Вектор-функция $B_1$ определяется согласно (3.4), а вектор-функция $A_1$, полученная согласно (2.14), имеет следующие компоненты:

$$A_1{}^{(1)}=-KC^{-1}r_0{}^{-1}b\cos\theta,\qquad A_1{}^{(2)}=KC^{-1}r_0{}^{-1}a\cos\theta$$

$$A_1{}^{(3)}=C^{-1}M_3{}^*,\qquad A_1{}^{(4)}=KC^{-1}r_0{}^{-1},\qquad A_1{}^{(5)}=0 \tag{5.1}$$

Четвертая и пятая компоненты вектор-функции $u_1$ имеют вид (3.5). Функция $A_2(x^*)$ определяется по формуле (2.16):

$$A_2{}^{(1)}=KC^{-1}r_0{}^{-2}b[\cos\theta-{}^1/_2KC^{-2}Ar_0{}^{-1}(3\cos^2\theta-1)] \tag{5.2}$$

$$A_2{}^{(2)}=-KC^{-1}r_0{}^{-2}a[\delta\cos\theta-{}^1/_2KC^{-2}Ar_0{}^{-1}(3\cos^2\theta-1)]$$

$$A_2{}^{(3)}=0,\qquad A_2{}^{(4)}=-KC^{-1}r_0{}^{-2}\delta+K^2C^{-3}Ar_0{}^{-3}\cos\theta$$

$$A_2{}^{(5)}=0$$

Получим решение усредненной системы уравнений первого приближения (2.17) с учетом (5.1) для медленных и быстрых переменных

$$a^{(1)}=a^0\cos wt-b^0\sin wt \tag{5.3}$$

$$b^{(1)}=b^0\cos wt+a^0\sin wt$$

$$\delta^{(1)}=\varepsilon C^{-1}M_3{}^*t,\qquad \psi^{(1)}=\varepsilon KC^{-1}r_0{}^{-1}t+\psi_0,\qquad \theta^{(1)}=\theta_0$$

$$\alpha^{(1)}=CA^{-1}r_0t-wt+{}^1/_2\varepsilon^2A^{-1}M_3{}^*t^2+\varphi_0$$

$$\gamma^{(1)}=n_0t+{}^1/_2\varepsilon^2(C-A)C^{-1}A^{-1}M_3{}^*t^2$$

где $w=\varepsilon KC^{-1}r_0{}^{-1}\cos\theta_0$; величины $a^0$, $b^0$, $n_0$ определяются согласно формулам (2.3); $\psi_0$, $\theta_0$, $\varphi_0$ — начальные значения углов Эйлера при $t=0$.

Отметим, что в решение усредненной системы первого приближения (5.3) входит только компонента момента, постоянного в связанных осях, приложенная вдоль оси симметрии $M_3{}^*$. Проекции вектора возмущающего момента $M_1{}^*$, $M_2{}^*$ выпадают при усреднении. Сравнение полученных выражений (5.3) для медленных переменных с учетом (2.7) с соответствующими формулами [2], формально полагая в них $M_3{}^*=\varepsilon M_3{}^*$, дает совпадение выражений для $a^{(1)}$, $b^{(1)}$, $\delta^{(1)}$, $\psi^{(1)}$, $\theta^{(1)}$. Компоненты функции $x_\varepsilon{}^{\smile}(t)$, отвечающие переменным $\psi$ и $\theta$, определяются согласно (2.27) с подстановкой соответствующих выражений (3.5), (5.2), (5.3):

$$\psi_\varepsilon{}^{\smile}(t)=\psi_0+\varepsilon KC^{-1}r_0{}^{-1}t+\varepsilon^2tK^2C^{-3}Ar_0{}^{-3}\cos\theta_0-$$
$$-{}^1/_2\varepsilon^3KC^{-2}M_3{}^*r_0{}^{-2}t^2-\varepsilon C^{-1}Ar_0{}^{-1}\operatorname{cosec}\theta_0(a^{(1)}\cos\alpha^{(1)}+b^{(1)}\sin\alpha^{(1)}),\qquad \theta_\varepsilon{}^{\smile}(t)=$$
$$=\theta_0+\varepsilon C^{-1}Ar_0{}^{-1}(a^{(1)}\sin\alpha^{(1)}-b^{(1)}\cos\alpha^{(1)})$$

Полученные выражения удобно записать в виде

$$\psi_\varepsilon^{\smile}(t)=\psi_0+\varepsilon KC^{-1}r_0^{-1}t+V^{(1)}$$

$$V^{(1)}=\varepsilon^2 tK^2C^{-3}Ar_0^{-3}\cos\theta_0-{}^1/_2\varepsilon^3KC^{-2}M_3{}^*r_0^{-2}t^2-$$

$$-\varepsilon C^{-1}Ar_0^{-1}(a^{02}+b^{02})^{1/2}\sin(\alpha^{(1)}+\varkappa)$$

$$\theta_\varepsilon^{\smile}(t)=\theta_0+\varepsilon C^{-1}Ar_0^{-1}(a^{02}+b^{02})^{1/2}\sin(\alpha^{(1)}-\chi)$$

$$\cos\varkappa=\sin\chi=\dot{b}^{(1)}(a^{02}+b^{02})^{-1/2}$$

Здесь в выражении для $\theta_\varepsilon^{\smile}$ ограниченное осциллирующее слагаемое содержит ненулевые начальные данные $a^0$, $b^0$. Полученное слагаемое $V^{(1)}$, так же как и в предыдущих примерах, дополняет известное из приближенной теории гироскопов выражение для угловой скорости прецессии $\omega_p=KC^{-1}r_0^{-1}$.

Заметим, что если ограничиться построением первого приближения, то в формулы для углов нутации и прецессии не войдут параметры возмущающих моментов, и поэтому влияние возмущений на регулярную прецессию тела не будет учтено. Таким образом, построение второго приближения является в данном случае существенным.

Авторы выражают благодарность Ф. Л. Черноусько и Л. Д. Акуленко за постановку задачи и полезные обсуждения.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д., Черноусько Ф. Л.* Возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 5. С. 771—778.
2. *Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д., Черноусько Ф. Л.* Возмущенные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 5. С. 3—10.
3. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
4. *Волосов В. М., Моргунов Б. И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ. 1971. 507 с.
5. *Белецкий В. В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука. 1965. 416 с.
6. *Ярошевский В. А.* Движение неуправляемого тела в атмосфере. М.: Машиностроение. 1978. 167 с.
7. *Черноусько Ф. Л.* О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 3. С. 474—483.
8. *Кузмак Г. Е.* Динамика неуправляемого движения летательных аппаратов при входе в атмосферу. М.: Наука. 1970. 347 с.
9. *Иващенко Б. П.* О движении симметричного волчка с полостью, заполненной вязкой жидкостью // Докл. АН УССР. Сер. А. 1976. № 9. С. 794—797.
10. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука. 1978. 304 с.
11. *Черноусько Ф. Л.* Движение твердого тела с полостями, заполненными жидкостью, при малых числах Рейнольдса // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1965. Т. 5. № 6. С. 1049—1070.
12. *Бухгольц Н. Н.* Основной курс теоретической механики. Ч. 2. М.: Наука. 1969. 332 с.
13. *Кошляков В. Н.* Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов: Аналитические методы. М.: Наука. 1985. 286 с.


Москва, Одесса

Поступила в редакцию
15.VI.1986