

УДК 531.1

Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко

БЫСТРОЕ ВРАЩЕНИЕ ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ ТЯЖЕЛОГО ГИРОСТАТА В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

Рассмотрим быстрое движение вокруг неподвижной точки в слабо сопротивляющейся среде несимметричного тяжелого твердого тела со сферической полостью, заполненной жидкостью большой вязкости.

Быстрыми движениями будем называть такие, для которых момент приложенных сил относительно неподвижной точки мал по сравнению с текущим значением кинетической энергии вращений.

Для исследования движения тела с жидкостью введем три декартовы системы координат: неподвижную — Ox_i ($i=1, 2, 3$); систему Oy_i , ось Oy_3 которой направлена по вектору кинетического момента \mathbf{G} тела с жидкостью (рис. 1); связанную — Oz_i , оси которой совмещены с главными осями инерции твердого тела. Переход от Ox_i к Oy_i осуществляется двумя поворотами: на угол λ вокруг Ox_3 и на угол δ вокруг Oy_2 . Положение осей Oz_i относительно Oy_i определяется углами Эйлера θ, φ, ψ .

В таблице представлены косинусы углов между осями.

Уравнения движения тела относительно неподвижной точки для несимметричного тела записываются следующим образом [13]:

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= L_3; \quad \frac{d\delta}{dt} = \frac{L_1}{G}; \quad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{L_2}{G \sin \delta}; \\ \frac{d\theta}{dt} &= G \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) + \frac{L_2 \cos \psi - L_1 \sin \psi}{G}; \\ \frac{d\varphi}{dt} &= G \cos \theta \left(\frac{1}{C} - \frac{\sin^2 \varphi}{A} - \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right) + \frac{L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi}{G \sin \theta}; \\ \frac{d\psi}{dt} &= G \left(\frac{\sin^2 \varphi}{A} + \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right) - \frac{L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi}{G} \operatorname{ctg} \theta - \frac{L_2}{G} \operatorname{ctg} \delta. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь L_i — проекции на оси Oy_i момента приложенных сил; G — величина кинетического момента; A, B, C — главные моменты инерции тела относительно осей Oz_i ; θ, φ, ψ — углы Эйлера.

Ось	Oz_1	Oz_2	Oz_3
Oy_1	$\alpha_{11} = \cos \varphi \cos \psi -$ $-\cos \theta \sin \varphi \sin \psi$	$\alpha_{12} = -\sin \varphi \cos \psi -$ $-\cos \theta \cos \varphi \sin \psi$	$\alpha_{13} = \sin \theta \sin \psi$
Oy_2	$\alpha_{21} = \cos \varphi \sin \psi +$ $+ \cos \theta \sin \varphi \cos \psi$	$\alpha_{22} = -\sin \varphi \sin \psi +$ $+ \cos \theta \cos \varphi \cos \psi$	$\alpha_{23} = -\sin \theta \cos \psi$
Oy_3	$\alpha_{31} = \sin \theta \sin \varphi$	$\alpha_{32} = \sin \theta \cos \varphi$	$\alpha_{33} = \cos \theta$

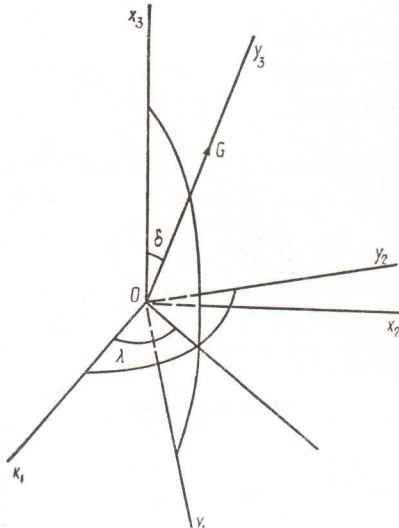


Рис. 1

Используя выражения для проекций вектора \mathbf{G} на оси связанной системы координат Oz_i

$$Ap = G \sin \theta \sin \varphi; \quad Bq = G \sin \theta \cos \varphi; \quad Cr = G \cos \theta, \quad (2)$$

для кинетической энергии T движения тела и ее производной получаем

$$T = \frac{G^2}{2} \left[\left(\frac{\sin^2 \varphi}{A} + \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right) \sin^2 \theta + \frac{\cos^2 \theta}{C} \right]; \quad (3)$$

$$T' = \frac{2T}{G} L_3 + G \sin \theta \left[\cos \theta \left(\frac{\sin^2 \varphi}{A} + \frac{\cos^2 \varphi}{B} - \frac{1}{C} \right) (L_2 \cos \psi - L_1 \sin \psi) + \right. \\ \left. + \sin \theta \cos \varphi \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) (L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi) \right], \quad (4)$$

где p, q, r — проекции вектора ω абсолютной угловой скорости вращения тела на оси Oz_i .

Проекции момента приложенных сил тяжести, внешнего сопротивления и проекции возмущающего момента, обусловленного влиянием вязкой жидкости в полости на движение твердого тела, на оси Oy_i записываются с учетом (2) в виде

$$L_1 = -mg \cos \delta \sum_{i=1}^3 a_i \alpha_{2i} - G \sum_{i=1}^3 \left(\frac{I_{4i}}{A} \alpha_{31} \alpha_{1i} + \frac{I_{2i}}{B} \alpha_{32} \alpha_{1i} + \frac{I_{3i}}{C} \alpha_{33} \alpha_{1i} \right) + \\ + \frac{\rho P G^3}{\nu ABC} \left[\frac{(A-C)(A+C-B)}{AC} (\cos \psi \sin \theta \cos^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi - \right. \\ \left. - \sin \psi \sin \theta \cos \theta \sin^2 \varphi) + \frac{(A-B)(A+B-C)}{AB} \cos \psi \sin^3 \theta \sin \varphi \cos \varphi - \right. \\ \left. - \frac{(B-C)(B+C-A)}{BC} (\cos \psi \sin \theta \cos^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi + \sin \psi \sin \theta \cos \theta \cos^2 \varphi) \right]; \\ L_2 = mg \sum_{i=1}^3 a_i (\alpha_{3i} \sin \delta + \alpha_{1i} \cos \delta) - G \sum_{i=1}^3 \left(\frac{I_{4i}}{A} \alpha_{31} \alpha_{2i} + \frac{I_{2i}}{B} \alpha_{32} \alpha_{2i} + \right. \\ \left. + \frac{I_{3i}}{C} \alpha_{33} \alpha_{2i} \right) + \frac{\rho P G^3}{\nu ABC} \left[\frac{(A-C)(A+C-B)}{AC} (\cos \psi \sin \theta \cos \theta \sin^2 \varphi + \right. \\ \left. + \sin \psi \sin \theta \cos^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi) + \frac{(A-B)(A+B-C)}{AB} \sin \psi \sin^3 \theta \sin \varphi \cos \varphi + \right. \\ \left. + \frac{(B-C)(B+C-A)}{BC} (\cos \psi \sin \theta \cos \theta \cos^2 \varphi - \sin \psi \sin \theta \cos^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi) \right]; \\ L_3 = -mg \sin \delta \sum_{i=1}^3 a_i \alpha_{2i} - G \sum_{i=1}^3 \left(\frac{I_{4i}}{A} \alpha_{31}^2 + \frac{I_{2i}}{B} \alpha_{32}^2 + \frac{I_{3i}}{C} \alpha_{33}^2 \right).$$

Здесь I_{ij} — коэффициенты момента сопротивления вращению тела [1], предполагаемые постоянными.

Так как изучается быстрое движение, то предполагается малым отношение $mg a / T_0 \sim \varepsilon \ll 1$, причем a — расстояние от центра масс до неподвижной точки. Сопротивление среды предполагается слабым того же порядка малости: $\|I\| / G_0 \sim \varepsilon \ll 1$, где $\|I\|$ — норма матрицы коэффициентов сопротивления.

Слагаемые, учитывающие влияние вязкой жидкости, заполняющей полость, на движение твердого тела, получаются [14] с использованием таблицы направляющих косинусов, где ρ — плотность жидкости, ν — кинематический коэффициент вязкости. Постоянный тензор \mathbf{P} зависит лишь от формы полости и характеризует диссипацию энергии за счет вязкости жидкости.

В рассматриваемой задаче тензор \mathbf{P} зададим в виде $P_{ij} = P\delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера, а $P > 0$. Так, например, для сферической полости радиусом a имеем $P = \frac{8\rho a^7}{525}$. Предполагается [14], что полость заполнена

жидкостью достаточно большой вязкости, поэтому $\frac{\rho P G_0}{\nu ABC} \sim \varepsilon$, где G_0, T_0 — начальные значения кинетического момента и кинетической энергии тела.

Ранее исследовались быстрое движение тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки [8] и быстрое вращение тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в слабо сопротивляющейся среде [10].

На основе уравнений, полученных Ф. Л. Черноусько [14], изучено стабилизирующее влияние вязкой жидкости в полости на вращение волчка вокруг заданной оси в случае произвольного тензора \mathbf{P} [12]. Исследовано быстрое вращение симметричного волчка с жидкостью в поле сил тяжести и рассмотрена возможность демпфирования нутационных колебаний при помощи вязкой жидкости, заполняющей полости на роторе или на рамках гироскопа [5, 6].

Исследуем решение системы (1), (4) при малом ε на большом промежутке времени $t \sim \varepsilon^{-1}$. Для решения задачи применяется метод усреднения [2, 11]. Усреднение по движению Эйлера — Пуансо проводим по методике [13, 14] для нерезонансных случаев.

Рассмотрим невозмущенное движение ($\varepsilon = 0$), когда моменты приложенных сил равны нулю. В этом случае вращение твердого тела является движением Эйлера — Пуансо. Величины G, δ, λ, T обращаются в постоянные, а θ, φ, ψ — некоторые функции времени t . Медленными переменными в возмущенном движении будут G, δ, λ, T , а быстрыми — углы Эйлера θ, φ, ψ .

Примем для определенности $A > B > C$ и рассмотрим движение при условии $2TA \geq G^2 \geq 2TB$, соответствующем траекториям вектора кинетического момента, охватывающим ось Oz_1 [9]. Введем величину

$$k^2 = \frac{(B-C)(2TA-G^2)}{(A-B)(G^2-2TC)} \quad (0 \leq k \leq 1), \quad (6)$$

представляющую собой в невозмущенном движении постоянную — модуль эллиптических функций [9], характеризующий движение конца вектора кинетического момента в связанных осях.

Для построения усредненной системы первого приближения подставим решение невозмущенного движения Эйлера — Пуансо [9] в правые части уравнений (1), (4) и произведем усреднение по переменной ψ , а затем по времени t с учетом зависимости θ, φ от t . При этом для медленных усредненных переменных сохраняются прежние обозначения. В результате получим

$$\begin{aligned} \lambda \cdot &= \frac{\pi m g a_1}{2G^2 K(k)} \sqrt{\frac{A(G^2 - 2TC)}{A - C}}; \quad \delta \cdot = 0; \quad G \cdot = -\frac{G}{A(B-C) + C(A-B)k^2} \times \\ &\times \left\{ I_{22}(A-C) \left[1 - \frac{E(k)}{K(k)} \right] + I_{33}(A-B) \left[k^2 - 1 + \frac{E(k)}{K(k)} \right] + I_{11}(B-C) \times \right. \\ &\times \left. \frac{E(k)}{K(k)} \right\}; \quad T \cdot = \frac{\rho P G^4 (A-C)^2 (B-C)(A-B) [B(A+C-B) + 2AC]}{6\nu A^2 B^2 C^2 [A(B-C) + C(A-B)k^2]^2} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left\{ (1 - \kappa)(1 - k^2) - [(1 - \kappa) + (1 + \kappa)k^2] \frac{E(k)}{K(k)} \right\} - \frac{2T}{A(B-C) + C(A-B)k^2} \times \\ & \times \left(I_{22}(A-C) \left[1 - \frac{E(k)}{K(k)} \right] + I_{33}(A-B) \left[k^2 - 1 + \frac{E(k)}{K(k)} \right] + \right. \\ & \quad \left. + \frac{(A-B)(A-C)(B-C)}{B-C + (A-B)k^2} \left\{ \frac{I_{33}}{C} \left[k^2 - 1 + \frac{E(k)}{K(k)} \right] + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{I_{22}}{B} (1 - k^2) \left[1 - \frac{E(k)}{K(k)} \right] \right\} + \frac{I_{11}(B-C)[A(B-C) + C(A-B)k^2]}{B-C + (A-B)k^2} \frac{E(k)}{K(k)} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $K(k)$, $E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода;

$$\kappa = \frac{3B[(A^2 + C^2) - B(A + C)]}{(A - C)[B(A + C - B) + 2AC]}.$$

Из уравнений (7) следует, что наличие полости с вязкой жидкостью и сопротивляющейся среды приводит к эволюции кинетической энергии тела T и величины кинетического момента G . Непосредственно видно, что в первом приближении на изменение T оказывает влияние вязкая жидкость в полости и сопротивление внешней среды. Эволюция величины G происходит только под действием силы сопротивления, причем в уравнения входят лишь диагональные коэффициенты I_{ii} матрицы момента трения. Члены, содержащие недиагональные компоненты I_{ij} ($i \neq j$), выпадают при усреднении.

Выражение, стоящее в фигурных скобках правой части уравнения (7) для G , положительно (при $A > B > C$), так как справедливы неравенства $(1 - k^2)K \leq E \leq K$ [4]. Каждый коэффициент при I_{ii} является неотрицательной функцией k^2 , причем одновременно они все в нуль обратятся не могут. Поэтому $dG/dt < 0$, т. е. переменная G строго убывает для любых $k^2 \in [0, 1]$.

Уравнение (7) для T содержит слагаемые, характеризующие влияние вязкой жидкости в полости и сопротивление среды. Слагаемое, обусловленное влиянием жидкости в полости, отрицательно согласно [14]. Каждое слагаемое выражения в круглых скобках уравнения для T , характеризующее влияние сопротивления среды, является положительной величиной. Таким образом, кинетическая энергия T также строго убывает.

Угловая скорость вращения вектора кинетического момента вокруг вертикали λ зависит от воздействия силы тяжести, сопротивления среды и демпфирующего влияния вязкой жидкости в полости. В первом приближении метода усреднения отклонение вектора кинетического момента от вертикали δ остается постоянным.

В результате ряда преобразований, используя (6) и два последних уравнения (7), получаем дифференциальное уравнение для переменной k^2

$$\begin{aligned} \frac{dk^2}{dt} = & \frac{\rho P G^2 (A - C)[B(A + C - B) + 2AC]}{3vA^2B^2C^2} \left\{ (1 - \kappa)(1 - k^2) - \right. \\ & \left. - [(1 - \kappa) + (1 + \kappa)k^2] \frac{E(k)}{K(k)} \right\} + \frac{2(I_{33}A - I_{11}C)}{AC} \left\{ (1 - \kappa_1)(1 - k^2) - \right. \\ & \left. - [(1 - \kappa_1) + (1 + \kappa_1)k^2] \frac{E(k)}{K(k)} \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь

$$\kappa_1 = \frac{2I_{22}AC - I_{11}BC - I_{33}AB}{(I_{33}A - I_{11}C)B};$$

Когда выполняются неравенства $2TB \geq G^2 \geq 2TC$, отвечающие траекториям вектора кинетического момента, охватывающим ось Oz_3 , нужно в уравнениях (7), (8) поменять местами параметры A и C , I_{11} и I_{33} , а также заменить a_1 на a_3 в уравнении для λ (7). Тогда формула (8) сохраняет свой вид, но в ней нужно заменить κ на $-\kappa$, κ_1 на $-\kappa_1$. Кинетический момент асимптотически убывает и стремится к нулю, причем закон убывания может быть так оценен: $G \sim \exp(-\gamma t)$ ($\gamma = \text{const} > 0$). При этом переменная k^2 изменяется согласно уравнению (8). Квазистационарной точкой уравнения (8) является только значение $k=0$.

Отметим, что в отличие от предшествующих исследований [14] величина G переменна во времени. В общем случае систему уравне-

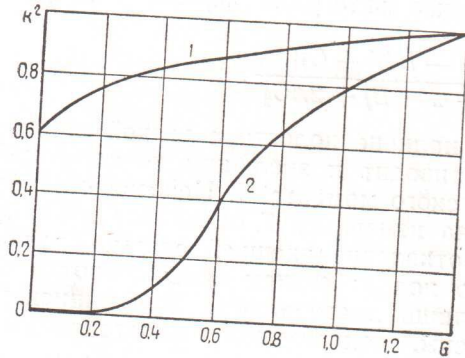


Рис. 2.

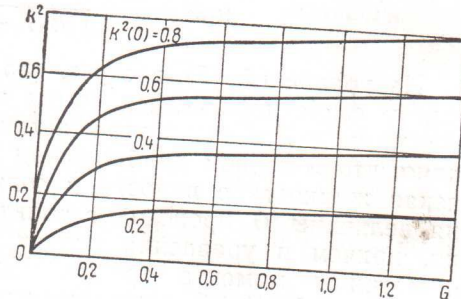


Рис. 3

ний для G и k^2 проинтегрировать не удастся, а ее исследование представляет значительные трудности.

Проинтегрируем эту систему численно на ЭВМ при начальных условиях $G(0) = 1,414$; $k^2(0) = 0,99$. Значение $k^2(0)$ соответствует движению, близкому к переходу через сепаратрису. Принимаем, кроме того, для определенности, $A = 3,2$; $B = 2,6$; $C = 1,67$, что соответствует значению $\kappa = 0,112$. На рис. 2 изображены графики функций k^2 , G , полученные в результате численного интегрирования. Кривые 1, 2 соответствуют значениям параметров $\kappa_1 = -4,471$ ($I_{11} = 2,322$; $I_{22} = 1,31$; $I_{33} = 1,425$) и $\kappa_1 = 3,852$ ($I_{11} = 0,919$; $I_{22} = 5,228$; $I_{33} = 1,666$). Как видно, в первом случае величина кинетического момента G убывает быстрее k^2 , а во втором случае для значений параметров переменная k^2 приближается к нулю быстрее G , т. е. движение стремится к вращению вокруг оси Oz_1 .

Кроме того, для первого случая был проведен численный анализ скорости стремления к нулю величин k^2 и G при различных начальных значениях переменной k^2 [$k^2(0) = 0,8$; $0,6$; $0,4$; $0,2$].

Полученные в результате расчетов кривые изображены на рис. 3. Численный анализ скорости стремления к нулю величин k^2 и G при различных начальных значениях $k^2(0)$ проведен для случая $\kappa_1 = -4,471$ (соответствующему кривой 1 на рис. 2, полученной при $k^2(0) = 0,99$). Таким образом, при различном наборе начальных значений $k^2(0)$ для выбранных параметров задачи скорость стремления G к нулю больше, чем переменной k^2 .

При малых k^2 , что соответствует движению, близкому к вращению вокруг оси Oz_1 , система уравнений для G^2 и k^2 принимает вид

$$\frac{dG^2}{dt} = -2 \frac{G^2}{A} \left\{ I_{11} + \frac{k^2 [(A-C)(I_{22}A - I_{11}B) + (A-B)(I_{33}A - I_{11}C)]}{2A(B-C)} \right\}; \quad (9)$$

$$\frac{dk^2}{dt} = -\frac{k^2}{ABC} \left\{ 2[C(I_{22}A - I_{11}B) + B(I_{33}A - I_{11}C)] + \frac{\rho PG^2}{\sqrt{BC}} [B(A - B) + C(A - C)] \right\}.$$

Следует отметить, что (9) — система нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих эволюцию экологических систем [3, 7]. Из (9) непосредственно определяется первый интеграл вида

$$k^{2\alpha} \exp \left\{ -2 \frac{(A - C)(I_{22}A - I_{11}B) + (A - B)(I_{33}A - I_{11}C)}{A^2(B - C)} k^2 \right\} = C_1 G^{2\beta} \exp \left\{ -\frac{\rho PG^2}{\sqrt{AB^2C^2}} [B(A - B) + C(A - C)] \right\}, \quad (10)$$

где

$$\alpha = -2 \frac{I_{11}}{A}; \quad \beta = -\frac{2}{ABC} [C(I_{22}A - I_{11}B) + B(I_{33}A - I_{11}C)].$$

При малых G^2 , k^2 из (9) следует, что кинетический момент экспоненциально убывает, а k^2 убывает или возрастает по экспоненциальному закону.

В случае произвольного G согласно (9) величина G^2 убывает, а поведение переменной k^2 зависит от знака коэффициента

$$C(I_{22}A - I_{11}B) + B(I_{33}A - I_{11}C).$$

Авторы благодарят Ф. Л. Черноулько за обсуждение работы и ценные замечания.

1. Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс.— М.: Наука, 1965.—416 с.
2. Волосов В. М., Моргунов Б. И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем.— М.: Изд-во МГУ, 1971.—507 с.
3. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование.— М.: Наука, 1976.—286 с.
4. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М.: Наука, 1971.—1108 с.
5. Иващенко Б. П. О движении симметричного волчка с полостью, заполненной вязкой жидкостью.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1976, № 9, с. 794—797.
6. Иващенко Б. П. Движение гироскопа с полостью, заполненной вязкой жидкостью.— Прикл. механика, 1978, 14, № 8, с. 110—115.
7. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.— М.: Наука, 1971.—576 с.
8. Климов Д. М., Космодемьянская Г. Н., Черноулько Ф. Л. О движении гироскопа с неконтактным подвесом.—Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1972, № 2, с. 3—8.
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 1. Механика.—М.: Наука, 1973.—208 с.
10. Лещенко Д. Д. О движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в слабо сопротивляющейся среде.— Прикл. механика, 1975, 11, № 3, с. 89—94.
11. Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике.—Киев: Наук. думка, 1971.—440 с.
12. Смирнова Е. П. Стабилизация свободного вращения асимметрического волчка с полостями, целиком заполненными жидкостью.—Прикл. математика и механика, 1974, 38, № 6, с. 980—985.
13. Черноулько Ф. Л. О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов.— Прикл. математика и механика, 1963, 27, № 3, с. 474—483.
14. Черноулько Ф. Л. Движение твердого тела с полостями, заполненными вязкой жидкостью, при малых числах Рейнольдса.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1965, 5, № 6, с. 1049—1070.

Институт проблем механики АН СССР,
Москва
Одесский технологический институт
холодильной промышленности

Поступила
14.01.80