

**ВОЗМУЩЕННЫЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА,
БЛИЗКИЕ К СЛУЧАЮ ЛАГРАНЖА**

Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, Ф. Л. Черноушко

(Москва, Одесса)

Исследуются возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа. Приведены условия возможности усреднения уравнений движения по углу нутации, получена усредненная система уравнений. Рассмотрена конкретная механическая модель возмущений, отвечающая движению тела в среде с линейной диссипацией. Построено численное решение усредненной системы.

1. Исходные уравнения и невозмущенное движение. Рассматривается возмущенное движение относительно неподвижной точки динамически симметричного тяжелого твердого тела в случае возмущений произвольной природы. Уравнения движения имеют вид

$$(1.1) \quad \begin{aligned} Ap' + (C-A)qr &= mgl \sin \theta \cos \varphi + \varepsilon M_1 \\ Aq' + (A-C)pr &= -mgl \sin \theta \sin \varphi + \varepsilon M_2 \\ Cr' &= \varepsilon M_3, \quad M_i = M_i(p, q, r, \varphi, \theta, \psi), \quad i = 1, 2, 3 \\ \dot{\varphi} &= r - (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{ctg} \theta \\ \dot{\theta} &= p \cos \varphi - q \sin \varphi, \quad \dot{\psi} = (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{cosec} \theta \end{aligned}$$

Динамические уравнения (1.1) записаны в проекциях на главные оси инерции тела. Здесь p, q, r — проекции вектора угловой скорости на эти оси, εM_i ($i = 1, 2, 3$) — проекции вектора возмущающих моментов на те же оси; φ, θ, ψ — углы Эйлера [1]; ε — малый параметр, характеризующий величину возмущений (в частности, при $\varepsilon = 0$ система (1.1) описывает движение в случае Лагранжа [1]); m — масса тела, g — ускорение силы тяжести, l — расстояние от неподвижной точки O до центра тяжести тела, A — экваториальный, а C — осевой моменты инерции тела относительно неподвижной точки O .

Ставится задача исследовать поведение решения системы (1.1) при значениях малого параметра ε , отличных от нуля, на достаточно большом промежутке времени $t \sim \varepsilon^{-1}$. Для решения задачи применяется метод усреднения [2, 3].

Усреднение по движению Эйлера — Пуансо для несимметричного твердого тела было впервые проведено в [4]. В отличие от методики усреднения по движению Эйлера — Пуансо усреднение по движению Лагранжа позволяет рассматривать в качестве порождающего решения движение с немалыми по величине моментами внешних сил.

Исследованию возмущенных движений, близких к движению в случае Лагранжа, посвящены работы [5-8]. В [5] использована методика эталонных уравнений. В работе [6] метод усреднения применен для специального вида порождающего решения. В статье [7] предложено проводить процедуру численного усреднения. В [8] движение тела, мало отличающегося от гироскопа Лагранжа, изучалось с помощью теоремы о сохранении движений.

Ниже развивается процедура усреднения системы (1.1) при произвольных начальных условиях для возмущений, допускающих усреднение по углу нутации θ . Погрешность усредненного решения для медленных переменных составляет величину порядка ε на интервале времени, за который тело совершит $\sim \varepsilon^{-1}$ оборотов.

Приведем сначала необходимые соотношения для невозмущенного движения [1], т. е. при $\varepsilon = 0$. Первыми интегралами уравнений движения для невозмущенной системы (1.1) служат

$$(1.2) \quad \begin{aligned} G_z &= A \sin \theta (p \sin \varphi + q \cos \varphi) + Cr \cos \theta = c_1, \\ H &= 1/2 [A (p^2 + q^2) + Cr^2] + mgl \cos \theta = c_2, \quad r = c_3 \end{aligned}$$

Здесь G_z — проекция вектора кинетического момента на вертикаль Oz , H — полная энергия тела, r — проекция вектора угловой скорости на ось динамической симметрии, c_i ($i = 1, 2, 3$) — произвольные постоянные ($c_2 \geq -mgl$).

Известно [1] выражение для угла нутации θ в невозмущенном движении как функции времени t , интегралов движения (1.2) и произвольной фазовой постоянной β

$$(1.3) \quad \begin{aligned} u &= \cos \theta = u_1 + (u_2 - u_1) \operatorname{sn}^2(\alpha t + \beta) \\ \alpha &= [mgl(u_3 - u_1) / (2A)]^{1/2} \\ \operatorname{sn}(\alpha t + \beta) &= \sin \operatorname{am}(\alpha t + \beta, k) \end{aligned}$$

$$(1.4) \quad k^2 = (u_2 - u_1)(u_3 - u_1)^{-1}, \quad 0 \leq k^2 \leq 1$$

Здесь sn — эллиптический синус [9], k — модуль эллиптических функций, через u_1, u_2, u_3 обозначены вещественные корни кубического многочлена

$$(1.5) \quad \begin{aligned} Q(u) &= A^{-2} [(2H - Cr^2 - 2mglu)(1 - u^2)A - \\ &\quad - (G_z - Cru)^2], \quad -1 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1 \leq u_3 < +\infty \end{aligned}$$

Соотношения между корнями многочлена $Q(u)$ из (1.5) и первыми интегралами (1.2) могут быть записаны, согласно теореме Виета, следующим образом:

$$(1.6) \quad \begin{aligned} u_1 + u_2 + u_3 &= \frac{H}{mgl} - \frac{Cr^2}{2mgl} + \frac{C^2r^2}{2Amgl} \\ u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3 &= \frac{G_zCr}{Amgl} - 1 \\ u_1u_2u_3 &= -\frac{H}{mgl} + \frac{Cr^2}{2mgl} + \frac{G_z^2}{2Amgl} \end{aligned}$$

Переменные φ и ψ получаются квадратурами из следующих уравнений [1]:

$$(1.7) \quad \varphi' = r - \frac{(G_z - Cru)u}{A(1 - u^2)}, \quad \psi' = \frac{G_z - Cru}{A(1 - u^2)}$$

Функция u , задаваемая соотношением (1.3), зависит от четырех постоянных интегрирования G_z, H, r и β . Последующее интегрирование уравнений (1.7) даст еще две произвольные постоянные. Таким образом, формулы (1.2) — (1.7) описывают общее решение системы (1.1) при $\varepsilon = 0$.

2. Процедура усреднения. Приведем уравнения возмущенного движения (1.1) к виду, допускающему применение метода усреднения [2, 3]. Для этого выделим медленные и быстрые переменные. В рассматриваемой задаче первые интегралы (1.2) будут для возмущенного движения (1.1) медленными переменными. Быстрыми переменными являются углы собственного вращения φ , нутации θ , прецессии ψ .

Используя соотношения (1.2) как формулы преобразования от переменных $(p, q, r, \varphi, \theta, \psi)$ к переменным $(G_z, H, r, \varphi, \theta, \psi)$, приведем первые три уравнения (1.1) к виду

$$(2.1) \quad \begin{aligned} G_z' &= \varepsilon [M_1 \sin \varphi + M_2 \cos \varphi] \sin \theta + M_3 \cos \theta \\ H' &= \varepsilon (M_1 p + M_2 q + M_3 r) \\ r' &= \varepsilon C^{-1} M_3, \quad M_i = M_i(p, q, r, \varphi, \theta, \psi), \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Здесь и в трех последних (кинематических) уравнениях (1.1) подразумевается, что переменные p, q, r при помощи (1.2) выражены как функции $G_z, H, r, \varphi, \theta, \psi$ и подставлены в (1.1), (2.1). Начальные значения медленных переменных G_z, H, r могут быть вычислены при помощи (1.2).

Правые части уравнений (2.1) содержат три быстрые переменные, что представляет трудность для применения метода усреднения, связанную с возможностью появления нелинейных резонансов. Для исключения этой трудности потребуем, чтобы правые части уравнений (2.1) для медленных переменных зависели фактически лишь от одной быстрой переменной — угла нутации θ и были бы периодическими функциями θ с периодом 2π . Тогда уравнения (2.1) можно усреднить по θ и получить уравнения первого приближения. Оказывается, что ряд прикладных задач обладает указанным свойством и допускает усреднение по одной переменной — углу нутации θ .

Приведем некоторые достаточные условия возможности усреднения уравнений (2.1) только по углу нутации θ . При фиксированных значениях медленных переменных правые части уравнений (2.1), подлежащих усреднению, содержат комбинации следующего вида:

$$M_1 \sin \varphi + M_2 \cos \varphi, \quad M_1 p + M_2 q, \quad M_3$$

Потребуем, чтобы путем тождественных преобразований эти комбинации могли быть представлены как функции от медленных переменных и от угла нутации θ , периодические по θ с периодом 2π , т. е.

$$(2.2) \quad \begin{aligned} M_1 \sin \varphi + M_2 \cos \varphi &= M_1^*(G_z, H, r, \theta) \\ M_1 p + M_2 q &= M_2^*(G_z, H, r, \theta) \\ M_3 &= M_3^*(G_z, H, r, \theta) \end{aligned}$$

Заметим, что из соотношений (1.2) вытекают равенства

$$(2.3) \quad \begin{aligned} p \sin \varphi + q \cos \varphi &= (G_z - Cr \cos \theta) / (A \sin \theta) \\ p^2 + q^2 &= [2(H - mgl \cos \theta) - Cr^2] / A \end{aligned}$$

Следовательно, комбинации вида (2.3) выражаются только через медленные переменные и угол нутации θ , причем они периодичны по θ с периодом 2π . Поэтому комбинации (2.3) приводятся к виду (2.2).

Сопоставляя соотношения (2.2) и (2.3), видим, что если возмущающие моменты M_i удовлетворяют условиям

$$(2.4) \quad M_1 = pf, \quad M_2 = qf, \quad M_3 = M_3^*$$

или условиям

$$(2.5) \quad M_1 = F \sin \varphi, \quad M_2 = F \cos \varphi, \quad M_3 = M_3^*$$

где произвольные функции f, F, M_3^* имеют вид

$$(2.6) \quad f = f(G_z, H, r, \theta), \quad F = F(G_z, H, r, \theta) \\ M_3^* = M_3^*(G_z, H, r, \theta)$$

и периодичны по θ с периодом 2π , то налагаемые требования (2.2) выполняются.

Таким образом, достаточными условиями возможности усреднения уравнений медленных переменных (2.1) по углу нутации θ для возмущенного движения Лагранжа являются требования (2.4) или (2.5), налагаемые на моменты приложенных сил. В дальнейшем предполагаются выполненными общие (необходимые и достаточные) условия (2.2) или, в частности, достаточные условия (2.4) или (2.5) (вместе с (2.6)), что обеспечивает справедливость соотношений (2.2). Система (2.1) тогда может быть представлена в форме

$$(2.7) \quad G_z^* = \varepsilon F_1(G_z, H, r, \theta), \quad F_1 = M_1^* + M_3^* \cos \theta \\ H^* = \varepsilon F_2(G_z, H, r, \theta), \quad F_2 = M_2^* + M_3^* r \\ r^* = \varepsilon F_3(G_z, H, r, \theta), \quad F_3 = C^{-1} M_3^*$$

Здесь F_1, F_2, F_3 — 2π -периодические функции θ .

Предлагается проводить исследование возмущенного движения в медленных переменных u_i ($i = 1, 2, 3$), связанных с G_z, H, r соотношениями (1.6) и более удобных для рассмотрения. При этом не требуется разрешать кубическое уравнение (1.5) относительно u_i . Медленные переменные G_z, H, r удастся выразить через u_i из (1.6) следующим образом:

$$(2.8) \quad G_z = (Amgl)^{1/2} (u_1 + u_2 + u_3 + u_1 u_2 u_3 + \delta_1 R)^{1/2} \times \\ \times \delta_2 \operatorname{sign} (1 + u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3) \\ H = 1/2 mgl [(u_1 + u_2 + u_3)(1 + A/C) + (\delta_1 R - u_1 u_2 u_3) \times \\ \times (1 - A/C)] \\ r = \delta_2 C^{-1} (Amgl)^{1/2} (u_1 + u_2 + u_3 + u_1 u_2 u_3 - \delta_1 R)^{1/2} \\ R = [(1 - u_1^2)(1 - u_2^2)(u_3^2 - 1)]^{1/2} \\ \delta_1 = \operatorname{sign} (G_z^2 - C^2 r^2), \quad \delta_2 = \operatorname{sign} r$$

Величины δ_1, δ_2 в начальный момент определяются по начальным условиям для G_z, r . Если в процессе движения одна или обе величины $G_z^2 - C^2 r^2, r$ проходят через нуль, то возможна смена знаков δ_1, δ_2 , для определения которых можно воспользоваться исходной системой (2.7).

Соотношения (1.6) запишем в сокращенном виде

$$(2.9) \quad S_i(u_1, u_2, u_3) = \Phi_i(G_z, H, r), \quad i = 1, 2, 3$$

где S_i, Φ_i — известные функции своих аргументов (см. (1.6)). Дифференцируя по времени (2.9) и подставляя вместо G_z, H, r выражения (2.7), получим соотношения

$$(2.10) \quad \sum_{j=1}^3 \frac{\partial S_i}{\partial u_j} u_j' = \varepsilon Z_i(u_1, u_2, u_3, \theta), \quad i = 1, 2, 3$$

Здесь

$$(2.11) \quad Z_i = \frac{\partial \Phi_i}{\partial G_z} F_1 + \frac{\partial \Phi_i}{\partial H} F_2 + \frac{\partial \Phi_i}{\partial r} F_3, \quad i = 1, 2, 3$$

Далее требуется разрешить линейные уравнения (2.10) относительно производных u_i' . Определитель D линейной системы (2.10) равен

$$D = \det (\partial S_i / \partial u_j) = (u_1 - u_2)(u_1 - u_3)(u_2 - u_3)$$

и по предположению отличен от нуля. Частные производные, фигурирующие в (2.11), могут быть при помощи равенств (2.8) представлены в виде функций только от переменных u_i .

Таким образом, после разрешения системы (2.10) относительно производных искомая система уравнений для медленных переменных u_i принимает вид, аналогичный (2.7)

$$(2.12) \quad u_i' = \varepsilon V_i(u_1, u_2, u_3, \theta), \quad i = 1, 2, 3 \\ V_i = V_{i1} F_1^* + V_{i2} F_2^* + V_{i3} F_3^*, \quad V_{ij} = V_{ij}(u_1, u_2, u_3), \\ j = 1, 2, 3$$

причем имеем

$$(2.13) \quad V_{11} = \frac{G_z - C r u_1}{A m g l (u_1 - u_2)(u_1 - u_3)} \\ V_{12} = \frac{u_1^2 - 1}{m g l (u_1 - u_2)(u_1 - u_3)} \\ V_{13} = \frac{C}{m g l (u_1 - u_2)(u_1 - u_3)} \left[\left(\frac{C}{A} - 1 \right) r u_1^2 - \frac{G_z}{A} u_1 + r \right]$$

Здесь вместо G_z, r нужно подставить соответствующие формулы (2.8). Функции V_{2j}, V_{3j} ($j = 1, 2, 3$) получаются из соответствующих выражений (2.13) для того же значения j путем циклической перестановки индексов у величин u_i . Функции F_i^* получаются подстановкой в F_i из (2.7) выражений для интегралов (2.8). Начальные значения u_i^0 для переменных u_i вычисляются по начальным данным G_z^0, H^0, r^0 при помощи соотношений (1.6).

Процедура усреднения уравнений (2.12) для медленных переменных u_i первого приближения состоит в следующем [2, 3]. Подставим в правые части системы (2.12) быструю переменную θ из выражения (1.3) для невозмущенного движения

$$(2.14) \quad \theta = \arccos [u_1 + (u_2 - u_1) \operatorname{sn}^2(\alpha t + \beta)]$$

После подстановки (2.14) правые части системы (2.12) будут периодическими функциями t с периодом $2K(k) / \alpha$, где k, α определены соотношениями (1.3), (1.4). Усредняя правые части полученной системы по t , получим в медленном времени $\tau \equiv \varepsilon t$ усредненную систему первого при-

ближения (штрихом обозначено дифференцирование по τ , а за усредненными переменными сохранены прежние обозначения)

$$(2.15) \quad u_i' = U_i(u_1, u_2, u_3), \quad u_i(0) = u_i^0, \quad i = 1, 2, 3$$

Здесь

$$(2.16) \quad U_i(u_1, u_2, u_3) = \frac{\alpha}{2K(k)} \int_0^{2K/\alpha} V_i(u_1, u_2, u_3, \theta(t)) dt$$

причем в качестве $\theta = \theta(t)$ в (2.16) подставлено выражение (2.14).

Итак, согласно предлагаемой методике, исследование возмущенного движения Лагранжа проводится следующим образом. Пусть возмущающие моменты εM_i удовлетворяют условиям (2.2) или, в частности, (2.4), (2.5) (вместе с (2.6)). Вычислим последовательно функции M_i^* , F_i^* , V_i ($i = 1, 2, 3$) при помощи соотношений (2.2), (2.7), (2.12), (2.13). После этого усредним, согласно (2.16), функции V_i , используя выражения (1.3), (1.4), (2.14), и составим усредненную систему (2.15). Система (2.15) значительно проще, чем исходная система (1.1), так как она имеет меньший порядок (третий вместо шестого), автономна и не содержит быстрых осцилляций. После исследования и решения системы (2.15) для u_i исходные медленные переменные G_z , H , r восстанавливаются по формулам (2.8). Быстрые переменные φ , θ , ψ могут быть найдены при помощи соотношений (1.7), (2.14). При этом, согласно общим теоремам метода усреднения [2,3], медленные переменные u_i или G_z , H , r определяются с погрешностью порядка ε , а быстрые переменные — с погрешностью порядка единицы на интервале изменения времени t порядка ε^{-1} .

3. Возмущенное движение твердого тела при линейных диссипативных моментах. В качестве примера развитой методике исследуем возмущенное движение Лагранжа с учетом моментов, действующих на твердое тело со стороны внешней среды. Будем считать, что возмущающие моменты εM_i ($i = 1, 2, 3$) имеют вид [10]

$$(3.1) \quad M_1 = -ap, \quad M_2 = -aq, \quad M_3 = -br, \quad a, b > 0$$

где a , b — некоторые постоянные коэффициенты пропорциональности, зависящие от свойств среды и формы тела. Моменты (3.1) удовлетворяют достаточным условиям (2.4), (2.6) возможности усреднения только по углу нутации θ . Система (2.1) записывается следующим образом:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} G_z' &= -\varepsilon [a(p \sin \varphi + q \cos \varphi) \sin \theta + br \cos \theta] \\ H' &= -\varepsilon [a(p^2 + q^2) + br^2] \\ r' &= -\varepsilon bC^{-1} r \end{aligned}$$

Принтегрировав третье уравнение (3.2), получим (r^0 — произвольное начальное значение осевой скорости вращения)

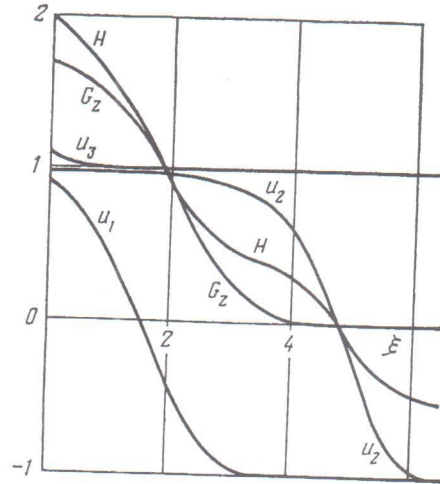
$$(3.3) \quad r = r^0 \exp(-\varepsilon bC^{-1} t)$$

Согласно процедуре п. 2, переходим к новым медленным переменным u_i и выполняем усреднение согласно (2.16). Получаем усредненную систему (2.15) в медленном времени $\tau = \varepsilon t$ вида

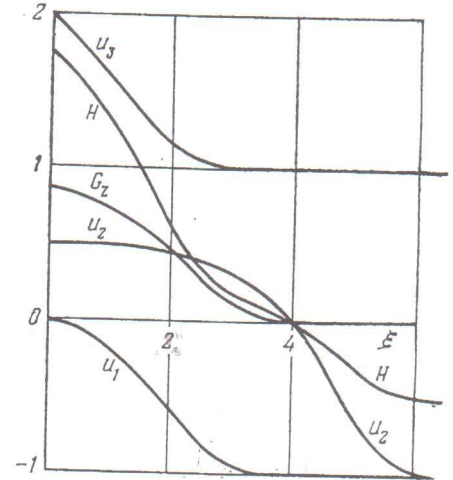
$$(3.4) \quad \begin{aligned} u_1' &= -\frac{1}{mgl(u_1 - u_2)(u_1 - u_3)} \left[b \frac{C}{A} r^2 u_1^2 - a \frac{C}{A} r^2 (u_1^2 - 1) - \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{a}{A} mgl (u_1^2 - 1) v + 2 \frac{a}{A} H (u_1^2 - 1) - \frac{C}{A} \left(b - a \frac{C}{A} \right) r^2 u_1 v - \right. \end{aligned}$$

$$v = u_3 - (u_3 - u_1) E(k) / K(k) - \frac{C}{A} \left(\frac{a}{A} + \frac{b}{C} \right) G_z r u_1 + \frac{a}{A^2} G_z^2 + \frac{1}{A} \left(b - a \frac{C}{A} \right) G_z r v]$$

Здесь вместо G_z, H, r, k подставляются их выражения (1.4), (2.8). Уравнения для u_2, u_3 получаются из (3.4) циклической перестановкой индексов у u_i . Однако при этой



Фиг. 1



Фиг. 2

перестановке выражение v , где $K(k), E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода, следует оставить неизменным во всех трех уравнениях.

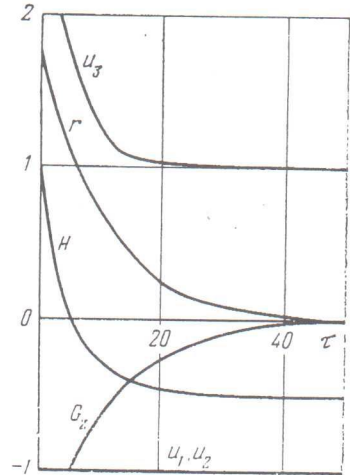
Усредненная система (3.4) интегрировалась численно на ЭВМ для $\tau \geq 0$ при разных начальных условиях и параметрах задачи. Приведем результаты расчетов для трех случаев, отвечающих следующим начальным данным:

	u_1°	u_2°	u_3°	θ°
1)	0.913	0.996	1.087	5°
2)	0	0.5	2	60°
3)	-0.992	-0.985	2.992	170°

Приведенные данные соответствуют волчку, получившему в начальный момент угловую скорость вращения вокруг оси динамической симметрии, равную $r^\circ = \sqrt{3}$, и отклоненному на угол θ° от вертикали. Принимаем, кроме того, $A = 1.5, C = 1, a = 0.125, b = 0.1, mgl = 0.5$. Используя значения u_i , найденные в результате численного интегрирования, определяем переменные G_z, H, r по формулам (2.8).

На фиг. 1–3 изображены графики функций $u_i (i = 1, 2, 3), G_z, H, r$ для указанных трех случаев. Полная энергия H монотонно убывает, асимптотически приближаясь к значению $H = -mgl = -0.5$. Проекция вектора кинетического момента на вертикаль G_z в случаях 1, 2 монотонно убывает, а в случае 3 монотонно возрастает и во всех случаях стремится к нулю. Величины u_1, u_2 монотонно убывают и стремятся к -1 , а u_3 асимптотически приближается к $+1$. При этом, как следует из (1.3), имеем $\cos \theta \rightarrow -1 (\theta \rightarrow \pi)$.

Таким образом, под действием внешней диссипации твердое тело при любых начальных условиях стремится к единственному устойчивому (нижнему) положению рав-



Фиг. 3

новесия. В случаях 1, 2 убывание переменных происходит очень медленно. Поэтому в этих случаях в системе (3.4) оказалось удобным провести замену независимой медленной переменной $\xi = \ln(1 + \tau)$. Правильность счета контролировалась тем, что полученные по численным данным и формулам (2.8) значения r практически совпадают с точным решением (3.3).

Аналогичным образом можно провести процедуру усреднения для движения твердого тела в случае Лагранжа с полостью, заполненной жидкостью большой вязкости. Соответствующие формулы для моментов вязких сил получены в [11].

Поступила 24 VII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Сулов Г. К. Теоретическая механика. М.—Л., Гостехиздат, 1946.
2. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., «Наука», 1974.
3. Волосов В. М., Моргунов Б. И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. Изд-во МГУ, 1971.
4. Черноусько Ф. Л. О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов. ПММ, 1963, т. 27, вып. 3.
5. Кузьмак Г. Е. Динамика неуправляемого движения летательных аппаратов при входе в атмосферу. М., «Наука», 1970.
6. Гробов В. А., Коцюба А. В. Нестационарное пространственное движение летательного аппарата, входящего в атмосферу с гиперзвуковой скоростью. Прикл. механ., 1972, т. 8, вып. 12.
7. Гольдштейн Ю. М., Пеня В. Н. К исследованию движения асимметричного твердого тела при произвольных углах нутации с использованием метода усреднения. В сб.: Динамика и управление движением. Киев, «Наукова думка», 1978.
8. Ковалев А. М. Геометрическое доказательство некоторых теорем о сохранении интегралов движения. В сб.: Механика твердого тела, вып. 7. Киев, «Наукова думка», 1974.
9. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., «Наука», 1971.
10. Кошляков В. Н. О некоторых частных случаях интегрирования динамических уравнений Эйлера, связанных с движением гироскопа в сопротивляющейся среде. ПММ, 1953, т. 17, вып. 2.
11. Черноусько Ф. Л. Движение твердого тела с полостями, заполненными жидкостью, при малых числах Рейнольдса. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1965, т. 5, № 6.