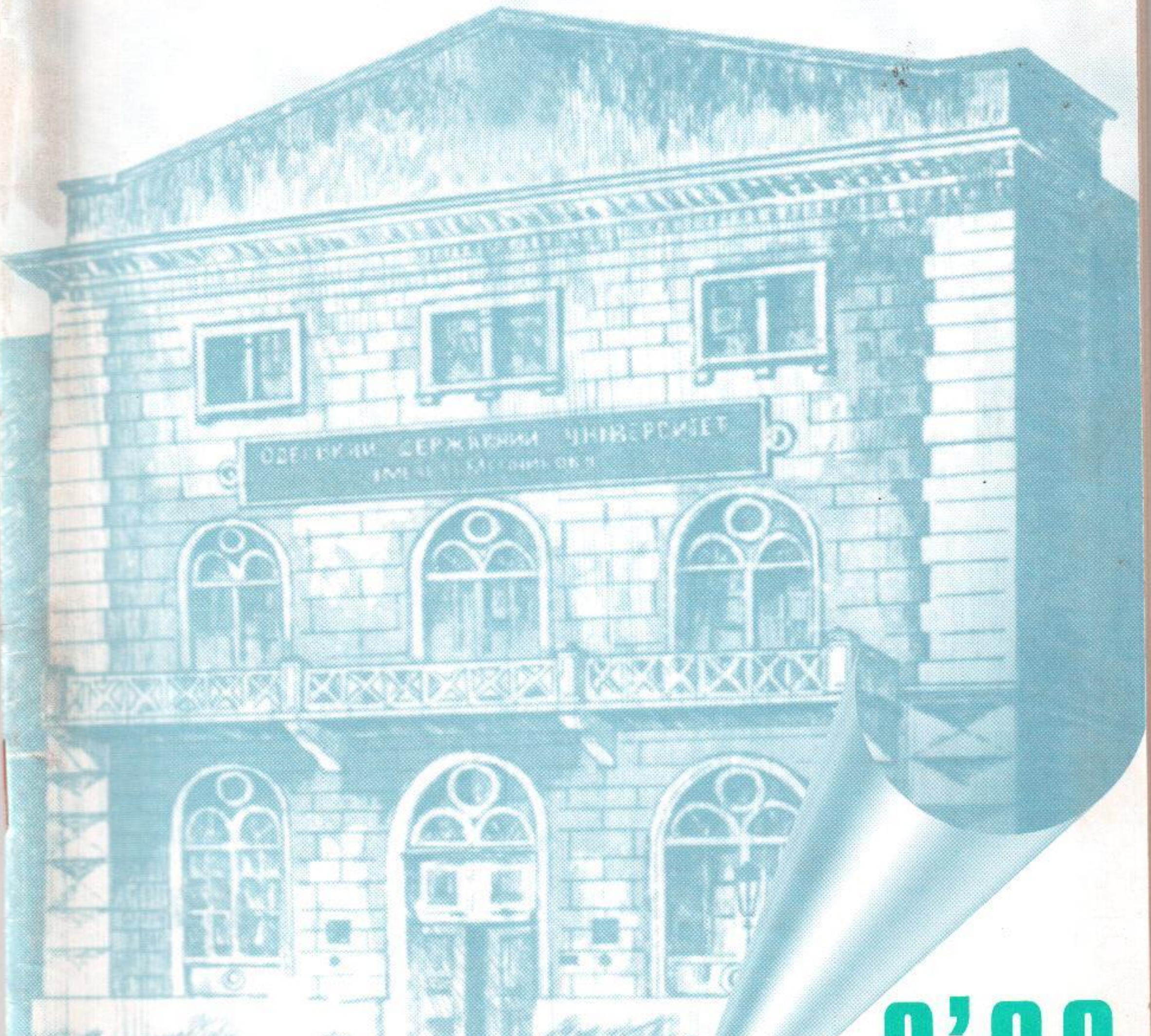
ВІСНИК

ОДЕСЬКОГО ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ



3'98

ЗБУРЕНІ ОБЕРТАННЯ ГІРОСКОПА ЛАГРАНЖА ПРИ НАЯВНОСТІ ДИСИПАЦІЇ ТА ДЕБАЛАНСУ ТЯГИ

Каспар'янц А. А., Лещенко Д. Д.

Розглянемо рух динамічно симетричного твердого тіла навколо нерухомої точки O під дією: сили ваги mg; сили F, яка має такі проекції на рухомі осі, жорстко зв'язані з твердим тілом $(0,F,0)$, і прикладена в точці N з координатами $(d,0,h)$; дисипативної сили з моментом $M(-I_1 p, -I_1 q, -I_3 r)$ відносно точки O (де I_1, I_3 — додатні коефіцієнти, які характеризують дисипацію p, q, r — проекції вектора кутової швидкості на рухомі осі). Рівняння руху мають вигляд [4, 76; 3,8]:

$$
\begin{aligned}
&Ap^{\bullet} + (C-A)qr = k\sin\theta\cos\varphi + M_1\\
&Aq^{\bullet} + (A-C)pr = -k\sin\theta\sin\varphi + M_2\\
&Cr^{\bullet} = M_3\\
&\psi^{\bullet} = (p\sin\varphi + q\cos\varphi)\operatorname{cosec}\theta,\\
&\theta^{\bullet} = p\cos\varphi - q\sin\varphi\\
&\varphi^{\bullet} = r - (p\sin\varphi + q\cos\varphi)\operatorname{ctg}\theta.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Тут A — екваторіальний, а C — осьовий момент інерції відносно нерухомої точки O, $A \neq C$; ψ, θ, φ — кути Ейлера. В випадку важкої дзиги відновлюючий момент $k = mgl$, де m — маса тіла, g — прискорення сили ваги, l — відстань від точки O до центра ваги тіла. При цьому сила F відповідає дебалансу тяги. Проекції вектора збурюючого моменту M_i на головні осі інерції, які проходять через точку O, мають вигляд:

$$
\begin{aligned}
&M_1 = -Fh - I_1 p,\quad M_2 = -I_1 q,\\
&M_3 = Fd - I_3 r.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

У статті, як і в [3, 8], зроблені такі вихідні припущення:

$$p^2+q^2 \ll r^2,\ \ Cr^2 \gg k,\ |M_i| \ll k \quad (i=1,2,3). \tag{3}$$

Припущення (3) означають, що напрям кутової швидкості тіла близький до осі динамічної симетрії; кутова швидкість достатньо велика, так що кінетична енергія тіла набагато більша потенціальної енергії , яка обумовлена відновлюючим моментом; збурюючі моменти малі в порівнянні з відновлюючим. Нерівності (3) дозволяють ввести малий параметр $\varepsilon \ll 1$ і покласти

$$p=\varepsilon P,\ \ q=\varepsilon Q,\ \ k=mgl=\varepsilon K$$
$$M_i=\varepsilon^2 M_i^* \quad (i=1,2,3). \tag{4}$$

Представлено задачу дослідження асимптотичної поведінки системи (1) при малому ε, якщо виконані умови (3), (4). Будемо застосовувати метод усереднення [1, 413] на інтервалі часу порядку e^{-1}.

Вважаємо, що збурюючі моменти $M_i (i=1,2,3)$ з урахуванням (4) мають вигляд

$$M_1=-\varepsilon^2 Fh^*-\varepsilon^2 I_1^* P,\ \ M_2=-\varepsilon^2 I_1^* Q$$
$$M_3=\varepsilon^2 Fd^*-\varepsilon^2 I_3^* r. \tag{5}$$

Одержано усереднені системи рівнянь руху в першому і другому наближенні за схемою, запропонованою в [3, 12].

Після ряду перетворень розв'язання усередненої системи рівнянь першого наближення для повільних і швидких змінних має вигляд:

$$\begin{aligned}
&a^{(1)}=\exp(-\varepsilon A^{-1}I_1 t)(a^0\cos\omega t-b^0\sin\omega t)\\
&b^{(1)}=\exp(-\varepsilon A^{-1}I_1 t)(b^0\cos\omega t+a^0\sin\omega t)\\
&\delta^{(1)}=-\varepsilon C^{-1}r_0 t+\varepsilon C^{-1}Fd^* t\\
&\psi^{(1)}=\varepsilon K C^{-1}r_0^{-1}t+\psi_0,\ \ \theta^{(1)}=\theta_0\\
&\alpha^{(1)}=CA^{-1}r_0^{-1}t-\omega t-1/2\varepsilon^2 A^{-1}I_3^* r_0 t^2+1/2\varepsilon^2 A^{-1}Fd^* t^2+\varphi_0\\
&\gamma^{(1)}=n_0 t-1/2\varepsilon^2(C-A)A^{-1}C^{-1}r_0 t^2+1/2\varepsilon^2(C-A)C^{-1}A^{-1}Fd^* t^2.
\end{aligned} \tag{6}$$

Тут $\omega=\varepsilon K C^{-1}r_0^{-1}\cos\theta_0$; a^0, b^0, n_0 визначаються таким чином:

$$\begin{aligned}
&a=P_0-KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\sin\varphi_0,\\
&b=-Q_0+KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\cos\varphi_0,\\
&n_0=(C-A)A^{-1}r_0\neq 0,\\
&|n_0/r_0|\le 1.
\end{aligned}$$

$\gamma_0=n_0 t$, змінна $\gamma=\gamma_0$ має зміст фази коливань, $\alpha=\gamma+\varphi$, $r=r_0+\varepsilon\delta$; P_0, Q_0, r_0, θ_0, φ_0 — початкові значення відповідних змінних при $t=0$.

Відзначимо, що в розв'язання усередненої системи першого наближення (6) входить тільки компонента моменту, сталого в зв'язаних осях, яка прикладена вздовж осі симетрії Fd^*. Проекція вектора збурюючого моменту — Fh^* випадає при усередненні.

На основі наведеих формул визначена еволюція кутів прецесії і нутації в другому наближенні. Згідно до процедури, яка викладена в [3, 12]:

$$
\begin{aligned}
&\psi = \psi_0 + \varepsilon K C^{-1} r_0^{-1} t + S^{(1)} \\
&S^{(1)} = \varepsilon^2 t K^2 C^{-3} r_0^{-3} \cos\theta_0 + 1/2\varepsilon^3 K C^{-2} I_3^* r_0^{-1} t^2 - 1/2\varepsilon^3 K C^{-2} F d^* r_0^{-2} t^2 - \\
&- \varepsilon C^{-1} A r_0^{-1} \operatorname{cosec}\theta_0 \exp(-\varepsilon A^{-1} I_1^* t)(a^{02} + b^{02})^{1/2} \sin(\alpha^{(1)} + \sigma) \\
&\theta = \theta_0 + \varepsilon^2 t I_1^* K C^{-2} r_0^{-2} \sin\theta_0 + \varepsilon C^{-1} A r_0^{-1} \exp(-\varepsilon A^{-1} I_1^* t)(a^{02} + b^{02}) \sin(\alpha^{(1)} - \lambda) \\
&\cos\sigma = \sin\lambda = b^{(1)} \exp(\varepsilon A^{-1} I_1^* t)(a^{02} + b^{02})^{-1/2}.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

У виразі (7) для θ доданок порядку ε є добутком повільно експоненціально спадного співмножника $\exp(-\varepsilon A^{-1} I_1^* t)$, обумовленого дисипацією енергії і коливного співмножника $\sin(\alpha^{(1)} - \lambda)$. Величину декремента загасання і характер повільної зміни фази малих коливань видно з формул (6) для $b^{(1)}$, $\alpha^{(1)}$.

У виразі (7) для $\psi(t)$ доданки $S^{(1)}(\varepsilon, t)$ мають порядок $O(\varepsilon)$ на інтервалі часу $(0, T\varepsilon^{-1})$. Здобутий вираз $S^{(1)}(\varepsilon, t)$ уточнює для даної задачі формулу кутової швидкості прецесії $\omega_p = KC^{-1} r_0^{-1}$, яка має місце в наближеній теорії гіроскопів [2, 219].

Відзначимо, що якщо в розглянутій задачі обмежитися побудовою першого наближення, то в формули для кутів нутації і прецесії не ввійдуть параметри збурюючих моментів, і тому вплив збурень на регулярну прецесію тіла не буде враховано. Таким чином, побудова другого наближення істотна.

Резюме

З допомогою методу усереднення в першому і другому наближеннях досліджується еволюція обертань осьосиметричного тіла з нерухомою точкою під дією лінійного зовнішнього дисипативного моменту та дебалансу тяги.

Література

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М., 1974. — 503 с.*
2. *Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики. — Ч. 2. — М., 1969. — 332 с.*
3. *Лещенко Д. Д., Шамаев А. С. Возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1987. — № 6. — С. 8-17.*
4. *Савченко А. Я., Безрученко В. С. Исследование стационарных движений гироскопа Лагранжа при наличии диссипации и дебаланса тяги // Механика твердого тела. — 1993. — Вып. 25. — С. 75-80.*