УДК 624.072.2:624.04

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ НАПРЯЖЕНИЙ В БАЛКАХ ПЕРЕМЕННОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ.

Ковров А.В., Болгар А.Ю., Чайковский Р.Э. (*Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г.Одесса*)

Рассмотрены особенности распределения напряжений в поперечных сечениях балок переменного поперечного сечения. Приведен пример определения касательных напряжений в балке верхняя и нижняя грани которой симметрично наклонены к оси.

В строительной практике нередко встречаются конструкции балок, имеющие изменяющуюся ширину либо высоту сечения.

Это означает, что функциями переменной $\boldsymbol{x}$ являются не только внутренние усилия $\boldsymbol{Q(x)}$ и $\boldsymbol{M(x)}$, а так же геометрические характеристики $\boldsymbol{A(x)}$, $\boldsymbol{I_z(x)}$, $\boldsymbol{S_z^{отс}}(x)$.

Если размеры поперечного сечения изменяются плавно и модуль упругости $\boldsymbol{E}$ имеет постоянную по сечению величину, то для определения нормальных напряжений можно использовать формулу:

$$\sigma_x = \frac{M_z(x)}{I_z(x)} y. \qquad (1)$$

Для выяснения характера распределения касательных напряжений, рассмотрим элемент балки (рис.1.), вырезанный двумя сечениями на бесконечно малом расстоянии $\boldsymbol{dx}$. В поперечных сечениях участка действуют поперечные силы $\boldsymbol{Q_y}$ и $\boldsymbol{Q_y + dQ_y}$, а также изгибающие моменты $\boldsymbol{M_z}$ и $\boldsymbol{M_z + dM_z}$.

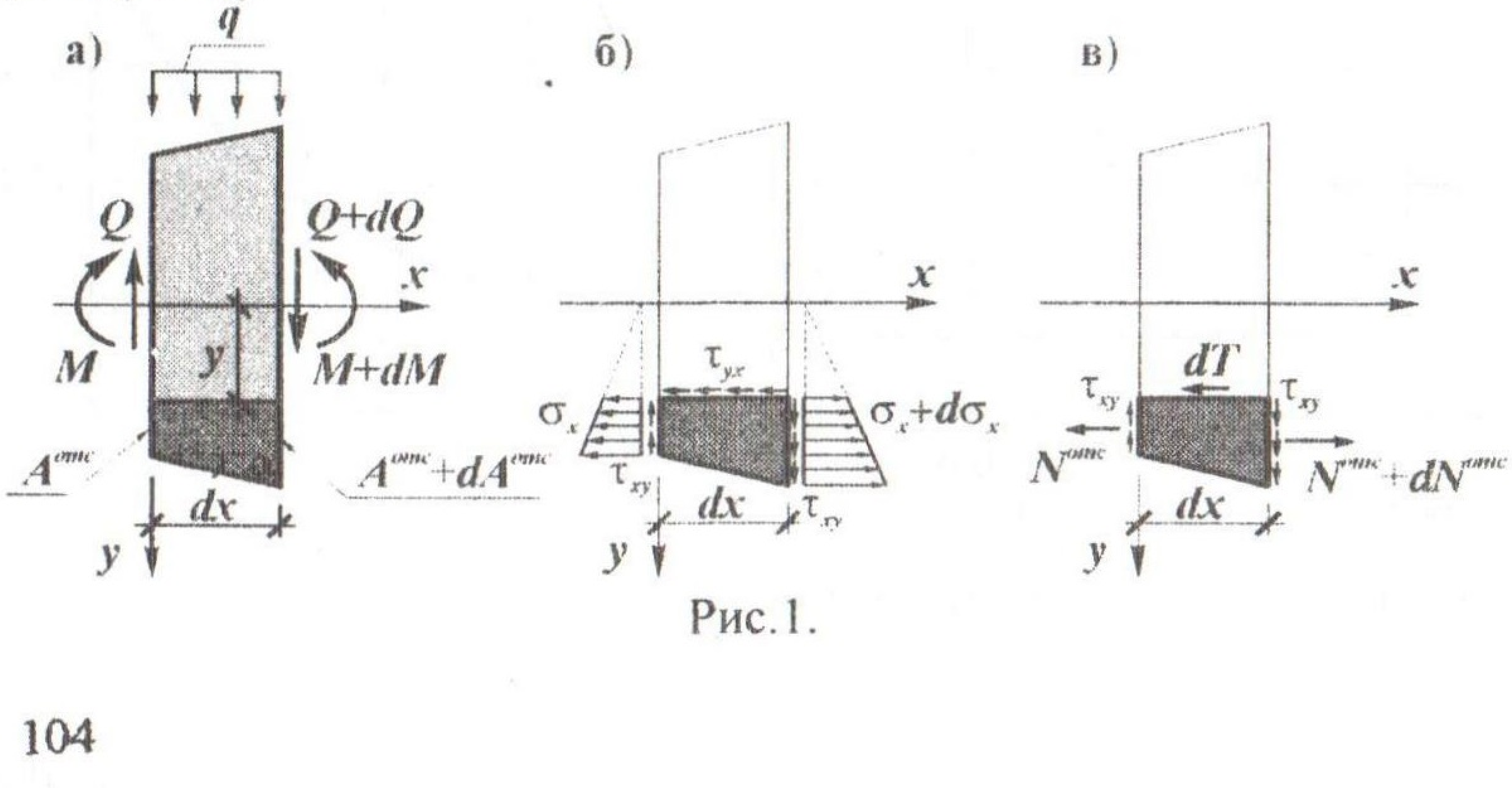

Рис.1.

С помощью продольного сечения вырежем нижнюю часть участка (рис.1а.). Рассмотрим равновесие вырезанной части в направлении продольной оси x (рис.1б.) под действием равнодействующих частей нормальных напряжений $N^{отс}$ и $N^{отс} + dN^{отс}$ и равнодействующей касательных напряжений τ_{yx}, возникающих в продольном сечении – dT (рис. 1в.).

$$\sum x = 0, \quad -N^{отс} + (N^{отс} + dN^{отс}) - dT = 0;$$

$$dT = dN^{отс}. \tag{2}$$

Примем, как и прежде, гипотезу о равномерном распределении касательных напряжений по ширине сечения.

Пренебрегая бесконечно малой величиной изменения ширины сечения на длине участка dx, определим площадь продольного сечения как площадь прямоугольника:

После традиционных преобразований, с учетом закона парности касательных напряжений, уравнение равновесия (2) будет иметь вид:

$$\tau = \frac{1}{b(y)} \frac{dN^{отс}}{dx}. \tag{3}$$

Физический смысл уравнений (2) и (3) заключается в том, что касательные напряжения возникают как необходимость уравновесить изменения равнодействующих нормальных напряжений вдоль оси балки.

Как известно, в том случае, если в стержне постоянного сечения нормальные напряжения по длине не изменяются (M_z=const), то касательные напряжения в сечениях не возникают (Q_y=0).

В то же время изменение равнодействующих нормальных напряжений могут быть вызваны и продольными силами N, которые будут источником касательных напряжений в продольных и следовательно, в поперечных сечениях.

После подстановки в формулу (3) выражения для равнодействующей части нормальных напряжений, действующих на площади $A^{отс}$, с последующим использованием формулы (1) и соответствующих преобразований, получим:

$$\tau = \frac{Q_y \cdot S_z^{отс}}{I_z b(y)} + \frac{M_z}{b(y)} \frac{d}{dx}\left(\frac{S_z^{отс}}{I_z}\right). \tag{4}$$

Таким образом, касательные напряжения в балке переменного сечения вызываются как поперечной силой Q_y, так и изгибающим моментом M_z.

$$\tau = \tau^Q + \tau^M. \tag{5}$$

Рассмотрим балку прямоугольного сечения с переменной высотой $h(x)$, имеющей верхнюю и нижнюю грани, симметрично расположенные относительно оси z (рис.2). Ширина балки постоянна. Начальная высота h_0, конечная - h_1=2 h_0. Длина балки l.

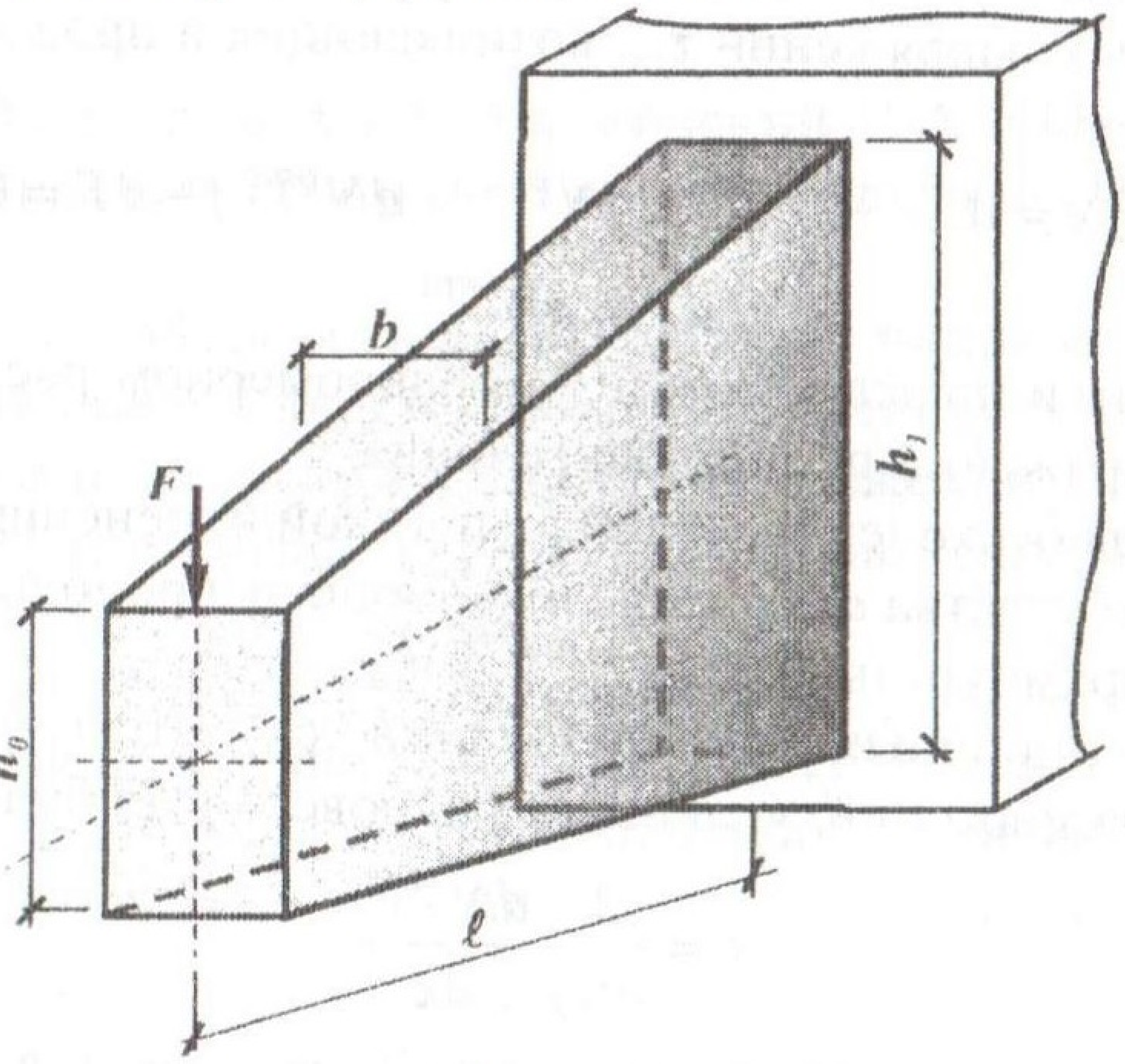

Рис.2.

Получим функциональное выражение для касательных напряжений в произвольном сечении балки, находящегося на расстоянии x от свободного конца (Рис. 3).

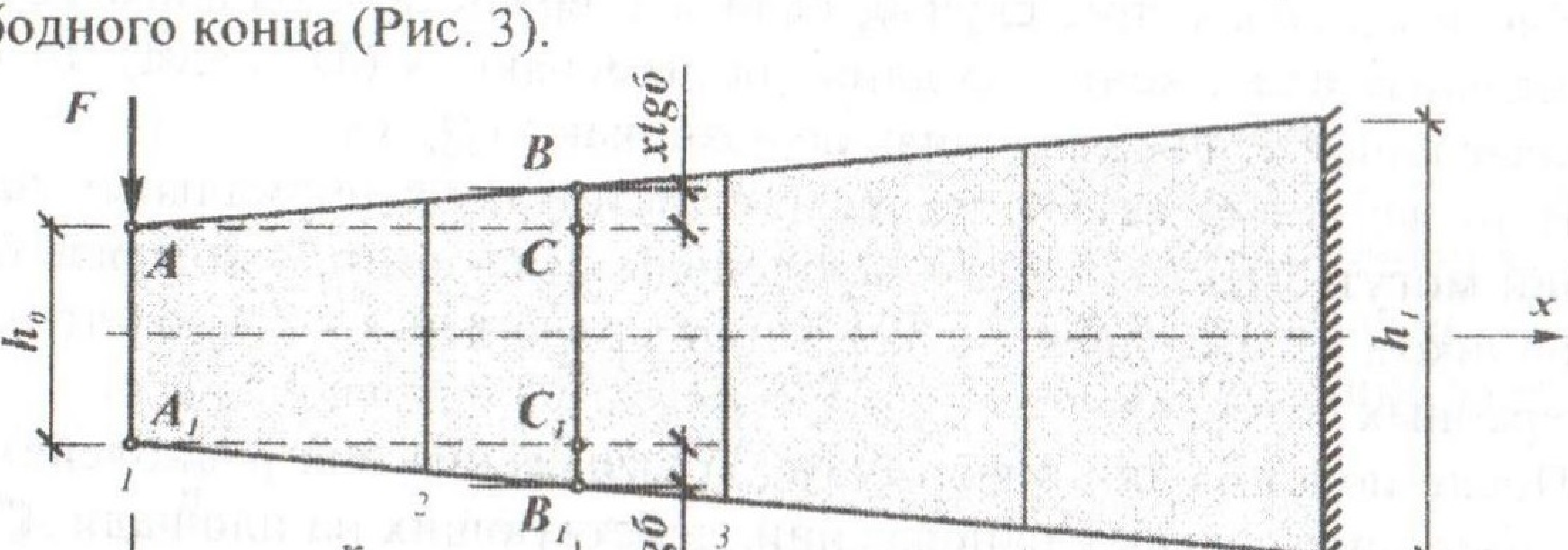

Рис. 3.

Подставив в формулу (4) выражения функций геометрических характеристик, продифференцировав и преобразовав получим:

$$\tau = \frac{Q_y}{A}\left(\frac{3}{2} - 6\frac{y^2}{h^2(x)}\right) + \frac{M_z}{W_z} tg\alpha\left(-\frac{1}{2} + 6\frac{y^2}{h^2(x)}\right). \quad (6)$$

Высоту произвольного сечения заданной балки определим, рассмотрев прямоугольные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$:

$$h = h_0 + 2xtg\alpha \,. \qquad (7)$$

Тангенс угла наклона, учитывая соотношение между начальной и конечной высотой, определим по формуле:

$$tg\alpha = \frac{h_0}{2l} \,. \qquad (8)$$

Подставив в формулу (7) выражение (8), преобразовав, получим:

$$h = h_0\left(1 + \frac{x}{l}\right). \qquad (9)$$

Площадь и момент сопротивления поперечного сечения:

$$A = bh = bh_0\left(1 + \frac{x}{l}\right); \qquad W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{bh_0^2(1 + \frac{x}{l})^2}{6} \,. \qquad (10)$$

Поперечная сила и изгибающий момент в произвольных сечениях равны:

$$M_z = -Fx; \quad Q_y = -F. \qquad (11)$$

Определим значения касательных напряжений в сечениях на левом и правом концах балки, в середине и в четвертях пролета.

Суммарные эпюры, полученные в результате подстановки в формулу (6) выражений геометрических характеристик и усилий при соответствующих значениях переменной x приведены на рис. 4а.

Вид эпюр τ_Q (рис. 4б) совпадает с эпюрами касательных напряжений, возникающих в прямоугольном сечении постоянном по длине балки. Площадь эпюры τ_Q равна поперечной силе Q_y.

Эпюры касательных напряжений τ_M разнозначны (рис. 4б), соответственно напряжения меняют направление по высоте сечения, самоуравновешиваясь. Площадь эпюры τ_M равна нулю.

Литература

1. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов: Учеб.для вузов. – М.: Высш.шк.,2000 - 560с.

2. Тимошенко С.П. Прочность и колебания элементов конструкций. – М.: «Наука»,1976 - 704с.

3. Феодосьев В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. – М.: «Наука»,1975 - 376с.

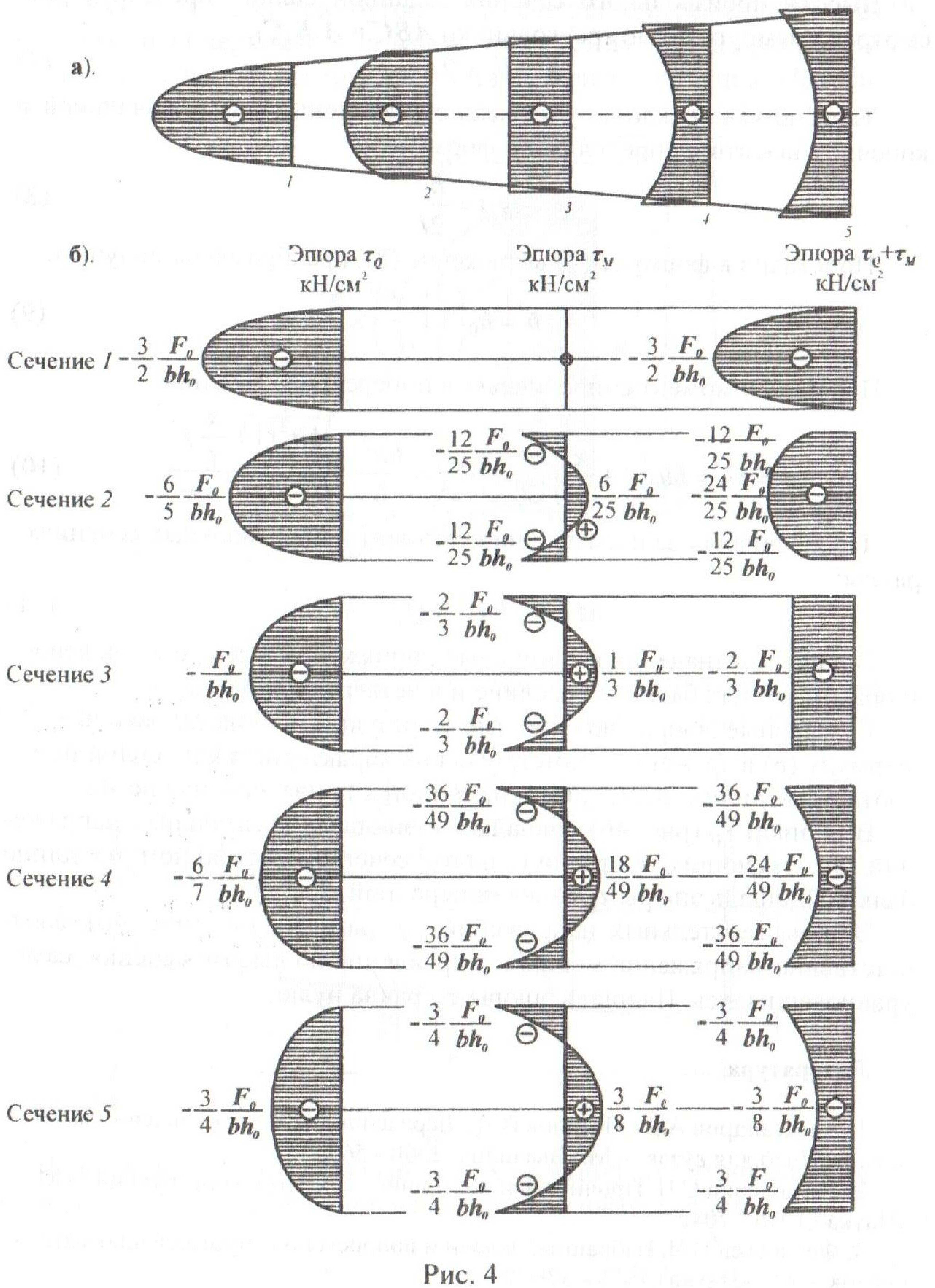
а).
1
2
3
4
5
б).
Эпюра τ_Q кН/см^2
Эпюра τ_M кН/см^2
Эпюра $\tau_Q+\tau_M$ кН/см^2
Сечение 1
$-\frac{3}{2}\frac{F_0}{bh_0}$
$-\frac{3}{2}\frac{F_0}{bh_0}$
Сечение 2
$-\frac{6}{5}\frac{F_0}{bh_0}$
$-\frac{12}{25}\frac{F_0}{bh_0}$
$\frac{6}{25}\frac{F_0}{bh_0}$
$-\frac{12}{25}\frac{F_0}{bh_0}$
$-\frac{12}{25}\frac{F_0}{bh_0}$
$-\frac{24}{25}\frac{F_0}{bh_0}$
$-\frac{12}{25}\frac{F_0}{bh_0}$
Сечение 3
$-\frac{F_0}{bh_0}$
$-\frac{2}{3}\frac{F_0}{bh_0}$
$\frac{1}{3}\frac{F_0}{bh_0}$
$-\frac{2}{3}\frac{F_0}{bh_0}$
$-\frac{2}{3}\frac{F_0}{bh_0}$
Сечение 4
$-\frac{6}{7}\frac{F_0}{bh_0}$
$-\frac{36}{49}\frac{F_0}{bh_0}$
$\frac{18}{49}\frac{F_0}{bh_0}$
$-\frac{36}{49}\frac{F_0}{bh_0}$
$-\frac{36}{49}\frac{F_0}{bh_0}$
$-\frac{24}{49}\frac{F_0}{bh_0}$
$-\frac{36}{49}\frac{F_0}{bh_0}$
Сечение 5
$-\frac{3}{4}\frac{F_0}{bh_0}$
$-\frac{3}{4}\frac{F_0}{bh_0}$
$\frac{3}{8}\frac{F_0}{bh_0}$
$-\frac{3}{4}\frac{F_0}{bh_0}$
$-\frac{3}{4}\frac{F_0}{bh_0}$
$-\frac{3}{8}\frac{F_0}{bh_0}$
$-\frac{3}{4}\frac{F_0}{bh_0}$

Рис. 4