

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/263933248>

Rotations of Lagrange Top under the Action of Perturbation Torques of Different Nature

Chapter · January 2014

CITATIONS

0

READS

46

2 authors, including:



[Dmytro Leshchenko](#)

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

217 PUBLICATIONS 229 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)

Some of the authors of this publication are also working on these related projects:



Evolution of rotations of a rigid body close to the Lagrange case under the action of nonstationary torque of forces [View project](#)

УДК 531.383

Козаченко Т.А., Лещенко Д.Д.

**ВРАЩЕНИЯ ВОЛЧКА ЛАГРАНЖА ПОД ДЕЙСТВИЕМ
ВОЗМУЩАЮЩИХ МОМЕНТОВ СИЛ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ**

Одесская государственная академия строительства и архитектуры,

Одесса, Дидрихсона 4, 65029

Kozachenko T.A., Leshchenko D.D.

**ROTATIONS OF LAGRANGE TOP UNDER THE ACTION OF
PERTURBATION TORQUES OF DIFFERENT NATURE**

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture ,

Odessa, Didrihsona 4, 65029

Аннотация. Исследуется возмущенное движение волчка Лагранжа под действием возмущающих моментов, зависящих от медленного времени. Получена усреднённая система уравнений первого приближения для медленных переменных. Усредненные системы проинтегрированы численно при разных начальных условиях и параметрах задачи.

Ключевые слова: возмущенное движение, усреднение, момент.

Abstract. We investigate perturbed motion of Lagrange top under the action of perturbation torques depending on slow time. A first approximation averaged system of equations of motion is obtained for slow variables. Numerical solutions of the averaged system are constructed for different initial conditions and parameters of the problem.

Key words: perturbed motion, averaging, torques.

Введение. Вращения твердого тела относительно неподвижной точки могут быть достаточно строго сформулированы в рамках динамических моделей твердого тела в случае Лагранжа, который является опорным.

Исследование моделей проводится путем учета определённых возмущающих факторов [1-3]. В прикладном аспекте анализ вращательных движений тел относительно неподвижной точки важен для решения задач космонавтики, гироскопии, технологии.

Основные результаты. Рассмотрим возмущённое движение твёрдого тела близкое к случаю Лагранжа под действием возмущающего момента сил. Уравнения движения имеют вид:

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - A)qr &= mgl \sin \theta \cos \varphi + \varepsilon M_1, \quad \dot{\psi} = (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{cosec} \theta, \\ A\dot{q} + (A - C)pr &= -mgl \sin \theta \sin \varphi + \varepsilon M_2, \\ C\dot{r} &= \varepsilon M_3, \quad M_i = M_i(p, q, r, \psi, \theta, \varphi, \tau), \quad (i = 1, 2, 3), \quad \tau = \varepsilon t \\ \dot{\theta} &= p \cos \varphi - q \sin \varphi, \quad \dot{\varphi} = r - (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{ctg} \theta. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь p, q, r – проекции вектора угловой скорости тела на главные оси инерции тела; величины $M_i (i = 1, 2, 3)$ – проекции вектора возмущающего момента на те же оси, они зависят от медленного времени $\tau = \varepsilon t$ ($\varepsilon \ll 1$ – малый параметр, t – время); ψ, θ, φ – углы Эйлера; A – экваториальный, C – осевой момент инерции тела относительно точки O ; m – масса тела, g – ускорение силы тяжести, l – расстояние от неподвижной точки O до центра тяжести тела.

Ставится задача исследования асимптотического поведения решений системы (1) при малом ε на интервале времени порядка ε^{-1} , с помощью метода усреднения.

Для решения поставленной задачи применяется методика, разработанная Л.Д. Акуленко, Д.Д. Лещенко, Ф.Л. Черноусько [1]. Данная методика используется для усреднения системы (1) при возмущениях, зависящих от медленного времени τ и допускающих усреднение по углу нутации θ . Усредненная система уравнений примет вид:

$$\frac{du_i}{d\tau} = U_i(u_1, u_2, u_3), \quad u_i(0) = u_i^0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2)$$

Здесь u_1, u_2, u_3 – вещественные корни кубического многочлена [4]

$$Q(u) = A^{-2}[(2H - Cr^2 - 2\mu u)(1 - u^2)A - (G_z - Cru)^2], \quad -1 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1 \leq u_3 < +\infty,$$

G_z – проекция вектора кинетического момента на вертикаль Oz , H – полная энергия тела.

Рассмотрим возмущенное движение близкое к случаю Лагранжа под действием внешней среды. Примером может служить внешняя среда, медленно изменяющая свойства вязкости вследствие изменения плотности, температуры, состава среды. Возмущающие моменты M_i ($i=1,2,3$) являются линейно-диссипативными и медленно изменяются во времени:

$$M_1 = -a(\tau)p, \quad M_2 = -a(\tau)q, \quad M_3 = -b(\tau)r^2, \quad a(\tau), b(\tau) > 0, \quad \tau = \varepsilon t, \quad (3)$$

$a(\tau)$, $b(\tau)$ – интегрируемые функции, зависящие от свойств среды.

Первые три уравнения (1) с учетом (3) удовлетворяют условиям используемой методики [1] и приводятся к виду:

$$\begin{aligned} \dot{G}_z &= -\varepsilon \left((p \sin \varphi + q \cos \varphi) a(\tau) \sin \theta + b(\tau) r^2 \cos \theta \right), \\ \dot{H} &= -\varepsilon \left(a(\tau) (p^2 + q^2) + b(\tau) r^3 \right), \quad \dot{r} = -\varepsilon C^{-1} b(\tau) r^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Рассмотрены случаи, когда $a(\tau)$, $b(\tau)$ имеют вид:

$$\text{а) } a(\tau) = a_0 + a_1 \tau, \quad b(\tau) = b_0 + b_1 \tau, \quad a_0, a_1, b_0, b_1 - \text{const}; \quad (5)$$

$$\text{б) } a(\tau) = a_0 + \Delta a_1 e^{-\sigma \tau}, \quad b(\tau) = b_0 + \Delta b_1 e^{-\sigma \tau}, \quad a_0, \Delta a_1, b_0, \Delta b_1, \sigma - \text{const}. \quad (6)$$

При условии (6) усредненная система (2) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{du_i}{d\tau} &= \frac{-1}{A\mu(u_i - u_{i+1})(u_i - u_{i+2})} \{ a_0 [A^{-1}(G_z - Cr u_i)(G_z - Cr v) + \\ &+ (u_i^2 - 1)(2H - Cr^2 - 2\mu v)] + b_0 r^2 (u_i - v)(C r u_i - G_z) + \\ &+ \frac{\alpha(1 - e^{-2\varepsilon\sigma K(k)/\alpha})}{2\varepsilon\sigma K(k)} (\Delta a_1 [A^{-1}(G_z - Cr u_i)(G_z - Cr u_1) + \\ &+ (u_i^2 - 1)(2H - Cr^2 - 2\mu u_1)] + \Delta b_1 r^2 (u_i - u_1)(C r u_i - G_z)) - \\ &- (\Delta a_1 [A^{-1}(G_z - Cr u_i)Cr + (u_i^2 - 1)2\mu] + \\ &+ \Delta b_1 r^2 (C r u_i - G_z)) \frac{\alpha(u_2 - u_1)}{2K(k)} \int_0^{2K(k)/\alpha} \exp(-\varepsilon\sigma t) \text{sn}^2(\alpha t + \beta) dt \}, \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned}
v &= u_3 - (u_3 - u_1)E(k)/K(k), \quad k^2 = (u_2 - u_1)(u_3 - u_1)^{-1}, \quad 0 \leq k^2 \leq 1, \\
\mu &= mgl, \quad \cos \theta = u_1 + (u_2 - u_1)\operatorname{sn}^2(\alpha t + \beta), \quad -1 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1 \leq u_3 < +\infty, \\
\alpha &= (\mu(u_3 - u_1)/(2A))^{1/2}, \quad \operatorname{sn}(\alpha t + \beta) = \operatorname{sn} am(\alpha t + \beta, k), \\
G_z &= \delta_2 (A\mu)^{1/2} (u_1 + u_2 + u_3 + u_1 u_2 u_3 + \delta_1 R)^{1/2} \operatorname{sign}(1 + u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3), \\
H &= \frac{1}{2} \mu \left((u_1 + u_2 + u_3)(1 + AC^{-1}) + (\delta_1 R - u_1 u_2 u_3)(1 - AC^{-1}) \right), \\
r &= \delta_2 C^{-1} (A\mu)^{1/2} (u_1 + u_2 + u_3 + u_1 u_2 u_3 - \delta_1 R)^{1/2}, \\
R &= \left((1 - u_1^2)(1 - u_2^2)(u_3^2 - 1) \right)^{1/2}, \quad \delta_1 = \operatorname{sign}(G_z^2 - C^2 r^2), \quad \delta_2 = \operatorname{sign} r.
\end{aligned} \tag{8}$$

Здесь величины δ_1, δ_2 в начальный момент определяются по начальным условиям для G_z, r ; sn – эллиптический синус, k – модуль эллиптических функций, $E(k), K(k)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода.

После решения и исследования системы (7) для u_i исходные переменные G_z, H, r восстанавливаются по формулам (8).

Усредненная система (2), с учетом условий (5, 6), проинтегрирована численно при разных начальных условиях и параметрах задачи. Рассмотрим три случая, соответствующие следующим начальным данным:

$$а) \quad u_1^0 = 0.913, u_2^0 = 0.996, u_3^0 = 1.087, \theta^0 = 5^\circ; \tag{9}$$

$$б) \quad u_1^0 = 0, u_2^0 = 0.5, u_3^0 = 2, \theta^0 = 60^\circ; \tag{10}$$

$$в) \quad u_1^0 = -0.992, u_2^0 = -0.985, u_3^0 = 2.992, \theta^0 = 170^\circ. \tag{11}$$

Предполагается, что в начальный момент волчок Лагранжа получил угловую скорость вращения относительно оси динамической симметрии, равную $r^0 = \sqrt{3}$, кроме того $a_0 = 0.125, b_0 = 0.1, a_1 = \Delta a_1 = b_1 = \Delta b_1 = \varepsilon_1 \eta, \sigma = 0.1, \eta = 1, A = 1.5, C = 1, \mu = 0.5$. Численный расчет был проведен при различных значениях $\varepsilon_1 \in [0, \dots, 10^{-4}]$. На рисунке 1-3 изображены графики функций u_i ($i = 1, 2, 3$), G_z, H, r . При $\varepsilon_1 = 0$ усредненные системы упрощаются и соответствуют случаю линейной диссипации с постоянными коэффициентами [1].

Построены графики функций u_i ($i=1,2,3$), G_z , H , r (рис.1), полученные в результате интегрирования системы (2), в случае линейно-диссипативного момента вида (5), при начальных условиях (9). Величина u_3 достаточно быстро стремится к 1. Проекция вектора кинетического момента G_z и угловая скорость вращения r убывают медленнее, нежели полная энергия тела H .

На рис. 2 приведен результат численного интегрирования системы (7) при начальных условиях (10). Как и на рис. 1 полная энергия тела, проекция вектора кинетического момента на вертикаль, угловая скорость вращения относительно оси динамической симметрии монотонно убывают. Величина u_2 медленнее стремится к -1, чем u_1 .

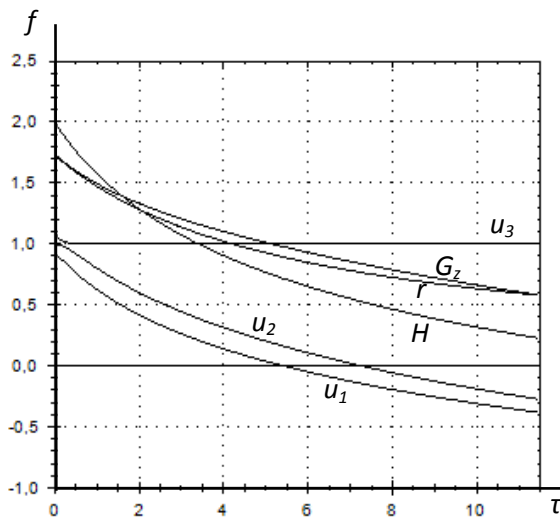


Рис. 1. Случай (5), (9).

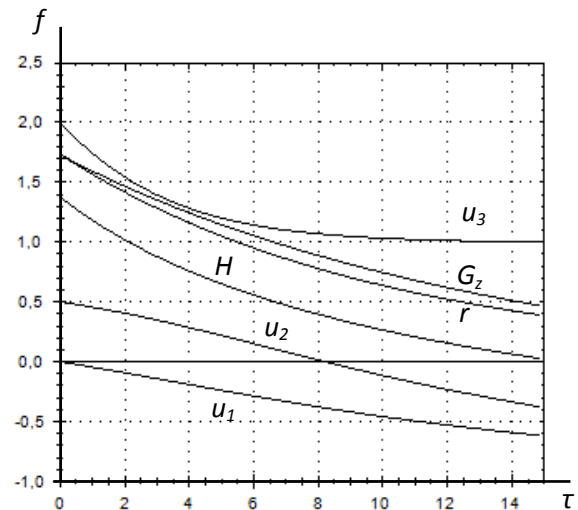


Рис. 2. Случай (6), (10).

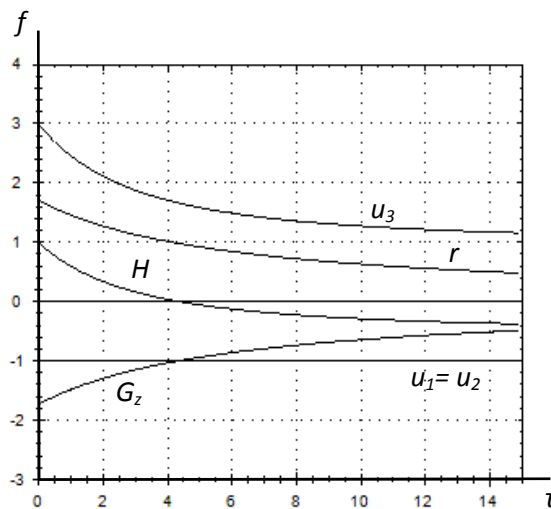


Рис. 3. Случай (6), (11).

В случае начальных значений (11) результат численного интегрирования системы (7) изображен на рис. 3. Полная энергия H убывает, приближаясь к значению $H = -0.5$. Проекция вектора кинетического момента G_z монотонно возрастает и стремится к нулю. Графики функций u_1 и u_2 совпадают, но при численном сопоставлении отличаются в третьем знаке после запятой.

Заключение. При сравнении полученных результатов можно отметить, что при определенных начальных условиях в случае (5) проекция вектора кинетического момента G_z быстрее убывает к нулю, чем в случае (6). Полная энергия тела монотонно убывает. Правильность счёта контролировалась тем, что полученные по численным данным и формулам (8) значения для r практически совпадают с точным решением. Под действием возмущающего момента (3) твердое тело стремится к устойчивому нижнему положению равновесия.

Литература:

1. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноусько Ф.Л. Возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа. // Прикладная математика и механика. – 1979. – Т.43, №5. – С. 771–778.
2. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноусько Ф.Л. Возмущенные движения твердого тела, близкие к регулярной. // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1986. – №5. – С.3–10.
3. Лещенко Д.Д., Козаченко Т.А., Рачинская А.Л. Вращения волчка Лагранжа под действием нестационарных диссипативных моментов. // Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2011. – Т. 16, Вип. 16., Фіз. - мат. науки. – С. 152–157.
4. Сулов Г. К. Теоретическая механика. – М.: Гостехиздат, 1946 – 655с.

Статья отправлена: 13.03.2014г.

© Козаченко Т.А., Лещенко Д.Д.