

УДК УДК 531.55:521.2

©2004. Л.Д. Акуленко, Д.Д. Лещенко, С.Г. Суксова, И.А. Тимошенко

ДВИЖЕНИЕ СПУТНИКА ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА МАСС ПОД ДЕЙСТВИЕМ ГРАВИТАЦИОННЫХ И СВЕТОВЫХ МОМЕНТОВ

Исследуется эволюция вращений твердого тела (спутника Солнца, движущегося по эллиптической орбите с произвольным эксцентриситетом) под действием моментов сил гравитации и светового давления. Тело предполагается динамически несимметричным, а его поверхность является поверхностью вращения. Углы ρ и σ , определяющие положение вектора кинетического момента относительно его центра масс, найдены во втором приближении по малому параметру ε как функции истинной аномалии ν .

1. Рассмотрим движение спутника или космического аппарата относительно центра масс под действием совместного влияния моментов сил светового давления и гравитационного притяжения. Вращательные движения рассматриваются в рамках моделей динамики твёрдых тел, центры масс которых движутся по эллиптическим орбитам вокруг Солнца. Задачи динамики обобщаются и усложняются учетом различных возмущающих факторов и в настоящее время остаются достаточно актуальными. Исследованию вращательных движений тел относительно центра масс под действием возмущающих моментов сил различной природы (гравитационных, светового давления и др.), близкому к проводимому ниже, посвящено много работ (см. [1–11] и библиографию к этим работам).

Введем три правых декартовых системы координат, начало координат совместим с центром инерции спутника [1, 2]. Система координат $OXYZ$ движется поступательно по орбите Солнца вместе со спутником; ось Y параллельна нормали к плоскости орбиты, ось Z – направлению радиус-вектора орбиты в ее перигелии, ось X – направлению вектора скорости центра масс в перигелии.

Положение вектора кинетического момента тела \mathbf{L} относительно его центра масс в системе координат $OXYZ$ определим углами ρ и σ , как показано в [1–3]. Для построения системы координат OL_1L_2L , связанной с вектором \mathbf{L} , в плоскости OYL проведем ось L_1 , перпендикулярно к вектору \mathbf{L} и составляющую тупой угол с осью Y . Ось L_2 дополняет оси L_1 и L до правой системы координат. Оси связанной системы координат $Ox_1y_1z_1$ совместим с главными центральными осями инерции. Взаимное положение главных центральных осей инерции и осей L, L_1, L_2 определим углами Эйлера [1–3]. При этом направляющие косинусы α_{ij} осей x, y, z относительно системы OL_1L_2L выражаются через углы Эйлера φ, ψ, θ по известным формулам [1].

Будем пренебрегать моментами всех сил, кроме гравитационных, и сил светового давления. В [1] приведена сравнительная оценка гравитационных моментов и моментов сил светового давления для спутника Солнца. Для общей ситуации показано, что момент сил светового давления на несколько порядков больше гравитационного. В рассматриваемой ниже задаче момент сил светового давления предполагается того же порядка малости ε^2 , что и гравитационный момент. Это достигается, например, распределением масс и соответствующей формой тела.

Гравитационный момент, действующий на спутник со стороны Солнца, имеет вид [1, 3]

$$M_g = \frac{3\kappa}{R^3} \left((C - B)\gamma'\gamma'', (A - C)\gamma\gamma'', (B - A)\gamma'\gamma \right).$$

Здесь κ - гравитационный параметр Солнца, $R = |\mathbf{R}|$, γ , γ' , γ'' - косинусы углов между радиусом-вектором \mathbf{R} и осями x , y , z .

Допустим, что поверхность аппарата представляет собой поверхность вращения, причем единичный орт оси симметрии \mathbf{k} направлен по оси Oz . Как показано в [1, 4, 5], в этом случае для момента сил светового давления \mathbf{M}_c , действующего на спутник, имеет место формула

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_c &= (a_c(\varepsilon_s)R_0^2/R^2) \mathbf{e}_r \times \mathbf{k}, \\ a_c(\varepsilon_s)\frac{R_0^2}{R^2} &= p_c S(\varepsilon_s) Z_0'(\varepsilon_s), \quad p_c = \frac{E_0}{c} \left(\frac{R_0}{R} \right)^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь \mathbf{e}_r - единичный вектор по направлению радиус-вектора орбиты, ε_s - угол между направлениями \mathbf{e}_r и \mathbf{k} , так что $|\mathbf{e}_r \times \mathbf{k}| = \sin \varepsilon_s$, R - текущее расстояние от центра Солнца до центра масс спутника, R_0 - фиксированное значение R , например, в начальный момент времени, $a_c(\varepsilon_s)$ - коэффициент момента сил светового давления, S - площадь "тени" на плоскости, нормальной к потоку, Z_0' - расстояние от центра масс до центра давления, p_c - величина светового давления на расстоянии R от центра Солнца, c - скорость света, E_0 - величина потока энергии светового давления на расстоянии R_0 от центра Солнца. Если R_0 - радиус орбиты Земли, тогда $p_{c0} = 4,64 \cdot 10^{-6}$ Н/м².

Полагаем [1] $a_c = a_c(\cos \varepsilon_s)$ и аппроксимируем a_c полиномами по степеням $\cos \varepsilon_s$. Момент сил светового давления имеет силовую функцию, зависящую только от положения оси симметрии тела в пространстве [1]. Представим функцию $a_c(\cos \varepsilon_s)$ в виде

$$a_c = a_{0c} + a_{1c} \cos \varepsilon_s + \dots \quad (2)$$

Далее рассмотрим отдельно только первые два члена разложения.

Уравнения возмущенного движения спутника при наличии силовой функции в переменных L , ρ , σ , φ , ψ , θ имеют вид [3]

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= (L \sin \rho)^{-1} \frac{\partial U}{\partial \rho}, \\ \dot{\rho} &= -(L \sin \rho)^{-1} \frac{\partial U}{\partial \sigma} + L^{-1} \operatorname{ctg} \rho \frac{\partial U}{\partial \psi}, \quad \dot{L} = \frac{\partial U}{\partial \psi}, \\ \dot{\theta} &= L \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi (A^{-1} - B^{-1}) - (L \sin \theta)^{-1} \frac{\partial U}{\partial \varphi} + L^{-1} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial U}{\partial \psi}, \\ \dot{\varphi} &= L \cos \theta (C^{-1} - A^{-1} \sin^2 \varphi - B^{-1} \cos^2 \varphi) + (L \sin \theta)^{-1} \frac{\partial U}{\partial \theta}, \\ \dot{\psi} &= L (A^{-1} \sin^2 \varphi + B^{-1} \cos^2 \varphi) - L^{-1} \left(\frac{\partial U}{\partial \rho} \operatorname{ctg} \rho + \frac{\partial U}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Силовая функция U зависит от времени t через истинную аномалию $\nu(t)$ и от направляющих косинусов α_3 , β_3 , γ_3 оси Oz относительно системы координат $OXYZ$; она имеет вид $U = U(\nu(t), \alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$.

К системе уравнений (3) необходимо присоединить уравнение, описывающее изменение истинной аномалии со временем

$$\frac{d\nu}{dt} = \omega_0 (1 - e^2)^{-3/2} (1 + e \cos \nu)^2, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{Q_0} = \left[\kappa (1 - e^2)^3 P^{-3} \right]^{1/2}. \quad (4)$$

Здесь ω_0 – средняя угловая скорость движения центра масс по эллиптической орбите, Q_0 – период обращения спутника, e и P – эксцентриситет и фокальный параметр орбиты соответственно, \varkappa – произведение постоянной всемирного тяготения на массу Солнца.

Считаем силовую функцию состоящей из двух слагаемых, обусловленных влиянием гравитационного момента и момента сил светового давления $U = U_g + U_c$. Силовая функция, обусловленная влиянием гравитационного момента, записывается следующим образом [3]

$$U_g = \frac{3\varkappa}{2R^3} \left[(A - B)\gamma'^2 + (A - C)\gamma''^2 \right],$$

$$\gamma' = \alpha_2 \sin \nu + \gamma_2 \cos \nu, \quad \gamma'' = \alpha_3 \sin \nu + \gamma_3 \cos \nu.$$

Момент сил светового давления (1) соответствует силовой функции $U_c(\cos \varepsilon_s) = -R_0^2 R^{-2} \int a_c(\cos \varepsilon_s) d(\cos \varepsilon_s)$.

Рассмотрим два случая: $a_c(\cos \varepsilon_s) = a_{0c}$ и $a_c(\cos \varepsilon_s) = a_{1c} \cos \varepsilon_s$, которые соответствуют первым двум членам разложения (2). Силовые функции в этих случаях имеют вид $U_c(\cos \varepsilon_s) = -R_0^2 R^{-2} a_{0c} \cos \varepsilon_s$ и $U_c(\cos \varepsilon_s) = -R_0^2 R^{-2} a_{1c} \cos^2 \varepsilon_s$, причем $\cos \varepsilon_s = \gamma_3 \cos \nu + \alpha_3 \sin \nu$. Заметим, что первый случай соответствует, например, спутнику сферической формы со смещенным относительно центра сферы центром масс.

Введем в систему уравнений (3), (4) малые параметры. Предположим, что угловая скорость вращения спутника относительно центра масс существенно больше угловой скорости орбитального движения ω_0 , то есть будем считать, что $\varepsilon = \frac{\omega_0}{\omega} \sim \frac{A\omega_0}{L} \ll 1$. Здесь L – модуль кинетического момента тела. В этом случае кинетическая энергия спутника велика по сравнению с работой гравитационных моментов за период вращения. Предположим также, что $a_{0c} \sim \varepsilon^2 \ll 1$ или $a_{1c} \sim \varepsilon^2$ в зависимости от того, какой из случаев рассматривается. Исследуем решение системы (3), (4) при малом ε на большом промежутке времени $t \sim \varepsilon^{-2}$. Для решения задачи применим метод усреднения [12, 13]. Погрешность усредненного решения для медленных переменных составляет величину порядка ε на интервале времени, за который тело совершит $\sim \varepsilon^{-2}$ оборотов. Усреднение по движению Эйлера-Пуансо проводим по методике работы [2] для нерезонансных случаев. Обоснование процедуры усреднения требует дополнительного рассмотрения.

2. Рассмотрим невозмущенное движение ($\varepsilon = 0$), когда гравитационный момент и момент сил светового давления равны нулю. В этом случае вращение спутника является движением Эйлера-Пуансо. Величины σ , ρ , L , ν обращаются в постоянные, а θ , φ , ψ – некоторые функции времени. Медленными переменными в возмущенном движении будут σ , ρ , L , ν , а быстрыми – углы Эйлера.

Проведем усреднение первых трех уравнений системы (3) вдоль траектории невозмущенного движения. Согласно [2] усреднение выполняется по переменной ψ , а затем по θ и φ . Оно производится по замкнутым траекториям вектора кинетического момента в движении Эйлера-Пуансо.

В результате усреднения по ψ и вдоль полюдии невозмущенного движения получим

систему уравнений [2, 9] для случая $a_c = a_{0c}$

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{d\nu} &= -a_{0c}R_0^2 \left(L_0\sqrt{\varkappa P} \right)^{-1} F \sin(\sigma - \nu) + \frac{3\omega_0 N}{2(1-e^2)^{3/2}L_0} \times \\ &\quad \times (1 + e \cos \nu) \sin \rho \sin(\sigma - \nu) \cos(\sigma - \nu), \\ \frac{d\sigma}{d\nu} &= -a_{0c}R_0^2 \left(L_0\sqrt{\varkappa P} \right)^{-1} F \operatorname{ctg} \rho \cos(\sigma - \nu) + \frac{3\omega_0 N}{2(1-e^2)^{3/2}L_0} \times \\ &\quad \times (1 + e \cos \nu) \cos \rho \cos^2(\sigma - \nu). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \alpha &= a_{0c}R_0^2 \left(L_0\sqrt{\varkappa P} \right)^{-1} F = \varepsilon\alpha_1, \\ F &= \frac{\pi a}{2K(k)}, \quad 2T_0B - L_0^2 > 0 \quad \text{либо} \quad F = 0, \quad 2T_0B - L_0^2 < 0, \\ L &= L_0 = \operatorname{const}, \quad T = T_0 = \operatorname{const}, \quad a^2 = \frac{\varepsilon_1 + h}{1 + \varepsilon_1}, \quad \varepsilon_1 = \frac{C(A - B)}{A(B - C)}, \\ N &= B + C - 2A + 3A \left(\frac{2T_0A}{L_0^2} - 1 \right) \left[C + (B - C) \frac{K(k) - E(k)}{k^2 K(k)} \right], \\ h &= \left(\frac{2T_0}{L_0^2} - \frac{1}{B} \right) \frac{BC}{B - C}, \quad \chi = \frac{3\omega_0 N}{2(1-e^2)^{3/2}L_0} = \varepsilon\chi_1, \end{aligned}$$

$K(k)$, $E(k)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода, $k^2 = \frac{a^2 - h}{a^2}$, T – кинетическая энергия спутника относительно центра масс. Выражение для N имеет смысл при $2T_0B < L_0^2$. В случае $L_0^2 < 2T_0B$ следует поменять местами A и C в формуле для N .

Для определенности примем $A > B > C$. Формула для модуля эллиптических функций k приведена для $h > 0$. Остальные соотношения справедливы при любых значениях h . В системе уравнений (5) мы перешли к новой независимой переменной $\nu = \nu(t)$.

Систему (5) с учетом введенных обозначений можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{d\nu} &= \varepsilon \sin(\sigma - \nu) [-\alpha_1 + \chi_1(1 + e \cos \nu) \sin \rho \cos(\sigma - \nu)], \\ \frac{d\sigma}{d\nu} &= \varepsilon \operatorname{ctg} \rho \cos(\sigma - \nu) [-\alpha_1 + \chi_1(1 + e \cos \nu) \sin \rho \cos(\sigma - \nu)]. \end{aligned} \quad (6)$$

Для решения уравнений (6) вновь воспользуемся методом усреднения. Выведенные усредненные уравнения определяют величины ρ , σ с погрешностью порядка ε^2 на интервале $\Delta\nu \sim \varepsilon^{-1}$, то есть $\Delta t \sim \varepsilon^{-2}$. Поэтому достаточно решить с этой точностью уравнения (6), для чего нужно найти асимптотическое решение во втором приближении по ε и установить, что отброшенные члены имеют нулевое среднее. Система (6) имеет стандартную форму [12] и может быть записана следующим образом:

$$\frac{d\rho}{d\nu} = \varepsilon X(\nu, \rho, \sigma), \quad \frac{d\sigma}{d\nu} = \varepsilon Y(\nu, \rho, \sigma). \quad (7)$$

Ее решение во втором приближении ищется в виде

$$\rho = \xi + \varepsilon u(\nu, \xi, \eta), \quad \sigma = \eta + \varepsilon w(\nu, \xi, \eta),$$

где u, w удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = X(\nu, \xi, \eta) - M_\nu \{X(\nu, \xi, \eta)\},$$

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} = Y(\nu, \xi, \eta) - M_\nu \{Y(\nu, \xi, \eta)\},$$

$$M_\nu \{u(\nu, \xi, \eta)\} = M_\nu \{w(\nu, \xi, \eta)\} = 0,$$

причем M_ν означает усреднение по ν за период 2π . Функции ξ, η удовлетворяют системе второго приближения

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\nu} &= \varepsilon M_\nu(X) + \varepsilon^2 M_\nu \left(u \frac{\partial X}{\partial \xi} + w \frac{\partial X}{\partial \eta} \right), \\ \frac{d\eta}{d\nu} &= \varepsilon M_\nu(Y) + \varepsilon^2 M_\nu \left(u \frac{\partial Y}{\partial \xi} + w \frac{\partial Y}{\partial \eta} \right). \end{aligned}$$

Система первого приближения записывается в виде

$$\frac{d\xi_1}{d\nu} = 0, \quad \frac{d\eta_1}{d\nu} = \frac{\chi_1}{2} \cos \xi_1.$$

Отсюда $\xi_1 = \xi_0 = \text{const}$, $\eta_1 = \frac{\chi_1}{2} \nu \cos \xi_0 + \eta_0$, где ξ_0, η_0 – начальные условия.

Определяя функции u, w известным способом [12], получим

$$\begin{aligned} u &= -\alpha_1 \cos(\nu - \eta) + \frac{\chi_1}{4} \sin \xi \left[\cos 2(\nu - \eta) + \cos 2\eta + \right. \\ &\quad \left. + e \cos(2\nu - 2\eta) + \frac{e}{3} \cos(3\nu - 2\eta) \right], \\ w &= -\alpha_1 \operatorname{ctg} \xi \sin(\nu - \eta) + \frac{\chi_1}{2} \cos \xi \left[\frac{1}{2} \sin 2(\nu - \eta) + \frac{1}{2} \sin 2\eta + \right. \\ &\quad \left. + e \left(\frac{1}{6} \sin(3\nu - 2\eta) + \frac{1}{2} \sin(\nu - 2\eta) + \sin \nu \right) \right]. \end{aligned}$$

Переменные ξ, η удовлетворяют системе второго приближения

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\nu} &= \frac{\varepsilon^2}{16} (\chi_1^2 e^2 \sin 2\xi \sin 2\eta - 8\alpha_1 \chi_1 e \sin \eta \cos \xi), \\ \frac{d\eta}{d\nu} &= \varepsilon \frac{\chi_1}{2} \cos \xi + \frac{\varepsilon^2}{48} \left[\chi_1^2 e^2 - 24\alpha_1^2 - 9\chi_1^2 + \frac{24\chi_1 e \alpha_1 \cos \eta}{\sin \xi} \times \right. \\ &\quad \times (1 - 2 \cos^2 \xi) + 6\chi_1^2 \cos^2 \eta (2 - e^2) + 3\chi_1^2 \cos^2 \xi (5 - e^2) + \\ &\quad \left. + 6\chi_1^2 \cos^2 \xi \cos^2 \eta (3e^2 - 2) \right] \end{aligned} \quad (8)$$

с начальными условиями $\xi(0) = \xi_0$, $\eta(0) = \eta_0$.

Выражения (8) – это система с вращающейся фазой η [14]. Сделаем замену $\tau = \varepsilon\nu$ и проведем усреднение по η . На интервале времени $\sim \varepsilon^{-2}$ получим

$$\frac{d\xi}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\eta}{d\tau} = \frac{\chi_1}{2} \cos \xi.$$

Таким образом, $\xi = \xi_0 = \text{const}$, $\eta = \frac{\chi_1}{2}\tau \cos \xi_0 + \eta_0$, где ξ_0 , η_0 – начальные условия. Проведем замену $\tau = \varepsilon\nu$. Ищем решение в виде

$$\xi = \xi_0 + \varepsilon\Delta\xi, \quad \eta = \eta_0 + \frac{\chi_1}{2} \cos \xi_0 \tau + \varepsilon\Delta\eta.$$

В этом случае из (8) получим систему уравнений относительно $\Delta\xi$ и $\Delta\eta$

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\xi}{d\tau} &= \frac{1}{16} [\chi_1^2 e^2 \sin 2\xi_0 \sin 2\mu - 8\chi_1 e \alpha_1 \cos \xi_0 \sin \mu], \\ \frac{d\Delta\eta}{d\tau} &= -\frac{\chi_1}{2} \sin \xi_0 \Delta\xi + \frac{\chi_1^2 \cos^2 \xi_0}{16} (5 + 6e^2 \cos^2 \mu - 4 \cos^2 \mu - e^2) + \\ &+ \frac{1}{48} \left[\chi_1^2 e^2 + 12\chi_1^2 \cos^2 \mu - 9\chi_1^2 - 24\alpha_1^2 - 24 \frac{e\chi_1 \alpha_1 \cos \mu \cos 2\xi_0}{\sin \xi_0} \right]. \end{aligned}$$

Здесь $\mu = \eta_0 + \frac{\chi_1}{2}\tau \cos \xi_0$. Для $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ – нулевые начальные данные.

Откуда

$$\begin{aligned} \Delta\xi &= -\frac{\chi_1 e^2}{8} \cos 2\mu \sin \xi_0 + \alpha_1 e \cos \mu, \\ \Delta\eta &= \frac{1}{48} \left[3\chi_1 e^2 \sin 2\mu \operatorname{tg} \xi_0 \sin \xi_0 - 48\alpha_1 e \sin \mu \operatorname{ctg} \xi_0 + \right. \\ &+ \chi_1^2 e^2 \tau (1 + 6 \cos^2 \xi_0) - 3\chi_1^2 \tau (1 - 3 \cos^2 \xi_0) + \frac{12\chi_1}{\cos \xi_0} (\eta_0 + \sin \mu \cos \mu) - \\ &\left. - 24\alpha_1^2 \tau - \frac{12\chi_1 e^2 \sin \mu}{\cos \xi_0} + 6\chi_1 \cos \xi_0 (\eta_0 + \cos \mu \sin \mu) (3e - 2) \right]. \end{aligned}$$

Тогда во втором приближении получим искомые решения

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_0 + \varepsilon \left(-\frac{\chi_1 e^2}{8} \cos 2\mu \sin \xi_0 + \alpha_1 e \cos \mu \right), \\ \eta &= \eta_0 + \frac{\chi_1}{2} \tau \cos \xi_0 + \frac{\varepsilon}{48} \left[3\chi_1 e^2 \sin 2\mu \operatorname{tg} \xi_0 \sin \xi_0 - 48\alpha_1 e \sin \mu \operatorname{ctg} \xi_0 + \right. \\ &+ \chi_1^2 e^2 \tau (1 + 6 \cos^2 \xi_0) - 3\chi_1^2 \tau (1 - 3 \cos^2 \xi_0) + \frac{12\chi_1}{\cos \xi_0} (\eta_0 + \sin \mu \cos \mu) - \\ &\left. - 24\alpha_1^2 \tau + 6\chi_1 \cos \xi_0 (\eta_0 + \cos \mu \sin \mu) (3e - 2) - \frac{12\chi_1 e^2 \sin \mu}{\cos \xi_0} \right]. \end{aligned}$$

В результате получим следующие выражения:

$$\begin{aligned}\rho = & \xi(\nu) + \varepsilon \left[-\alpha_1 \cos(\nu - \mu) + \frac{\chi_1}{2} \sin \xi_0 \sin^2 \nu (2 - \cos^2 \mu) + \right. \\ & + \frac{\chi_1}{4} \sin \xi_0 \sin 2\mu \sin 2\nu + \frac{2}{3} \chi_1 e \sin \xi_0 \cos \mu \cos^2 \nu \cos(\nu - \mu) + \\ & \left. + \frac{1}{3} \chi_1 e \sin \xi_0 \left(\frac{1}{2} \sin 2\mu \sin \nu - \cos^3 \nu \right) \right], \\ \sigma = & \eta(\nu) - \frac{1}{6} \varepsilon \operatorname{ctg} \xi_0 \left\{ 6\alpha_1 \sin(\nu - \mu) - \frac{3}{2} \chi_1 \sin \xi_0 \sin 2\nu \times \right. \\ & \times (1 - 2 \cos^2 \mu) - 3\chi_1 \sin 2\mu \sin \xi_0 \sin^2 \nu - 2\chi_1 e \sin \xi_0 \cos \mu \times \\ & \left. \times [2 \cos^2 \nu \sin(\nu - \mu) + \sin \nu \cos \mu] - 2\chi_1 e \sin \xi_0 \sin^3 \nu \right\}.\end{aligned}$$

Здесь $\nu - \mu = \nu \left(1 - \frac{\chi_1}{2} \varepsilon \cos \xi_0 \right) - \eta_0$.

Это решение системы (6) отличается от точного на величины порядка ε^2 на интервале $\Delta\nu \sim \varepsilon^{-1}$, а ξ_0, η_0 – произвольные постоянные.

3. Если коэффициент светового давления $a_c = a_{1c} \cos \varepsilon_s$, то усредненная система для ρ и σ в первом приближении принимает вид

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{d\nu} = & \sin \rho \sin(\sigma - \nu) \cos(\sigma - \nu) \frac{L_0^{-1}}{2} \times \\ & \times \left[-\frac{a_{1c} R_0^2}{\sqrt{\varkappa P}} G + \frac{3\omega_0 N}{(1 - e^2)^{3/2}} (1 + e \cos \nu) \right], \\ \frac{d\sigma}{d\nu} = & \cos \rho \cos^2(\sigma - \nu) \frac{L_0^{-1}}{2} \times \\ & \times \left[-\frac{a_{1c} R_0^2}{\sqrt{\varkappa P}} G + \frac{3\omega_0 N}{(1 - e^2)^{3/2}} (1 + e \cos \nu) \right].\end{aligned}\tag{9}$$

Здесь введены обозначения

$$G = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[3a^2 \frac{E(k)}{K(k)} - 1 \right] & \text{при } 2T_0 B - L_0^2 > 0, \\ \frac{1}{2} \left\{ \frac{3a^2}{k^2} \left[k^2 - 1 - \frac{E(k)}{K(k)} \right] - 1 \right\} & \text{при } 2T_0 B - L_0^2 < 0; \end{cases}$$

$$N = B + A - 2C + 3 \left(\frac{2TC}{L_0^2} - 1 \right) \left[A + (B - A) \frac{K(k) - E(k)}{k^2 K(k)} \right]$$

при $2T_0 B - L_0^2 > 0$.

При $2T_0 B - L_0^2 < 0$ следует поменять местами A и C .

Обозначим

$$\alpha = \frac{1}{2} a_{1c} R_0^2 \left(\sqrt{\varkappa P} \right)^{-1} G L_0^{-1} = \varepsilon \alpha_1, \quad \chi = \frac{3\omega_0 N}{2(1 - e^2)^{3/2}} L_0 = \varepsilon \chi_1.$$

Тогда система (9) принимает вид

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{d\nu} &= \varepsilon \sin \rho \sin(\sigma - \nu) \cos(\sigma - \nu) [-\alpha_1 + \chi_1(1 + e \cos \nu)], \\ \frac{d\sigma}{d\nu} &= \varepsilon \cos \rho \cos^2(\sigma - \nu) [-\alpha_1 + \chi_1(1 + e \cos \nu)].\end{aligned}$$

Это система вида (7), где

$$\begin{aligned}X &= \frac{1}{2} [-\alpha_1 + \chi_1(1 + e \cos \nu)] \sin \rho \sin 2(\sigma - \nu), \\ Y &= [-\alpha_1 + \chi_1(1 + e \cos \nu)] \cos \rho \cos^2(\sigma - \nu).\end{aligned}\tag{10}$$

Ищем решение системы (7), (10) в виде

$$\rho = \xi + \varepsilon u(\nu, \xi, \eta), \quad \sigma = \eta + \varepsilon w(\nu, \xi, \eta).$$

Здесь

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \nu} &= X - M_\nu(X), \quad \frac{\partial w}{\partial \nu} = Y - M_\nu(Y), \\ \frac{d\xi}{d\nu} &= \varepsilon M_\nu(X) + \varepsilon^2 M_\nu \left(u \frac{\partial X}{\partial \xi} + w \frac{\partial X}{\partial \eta} \right), \\ \frac{d\eta}{d\nu} &= \varepsilon M_\nu(Y) + \varepsilon^2 M_\nu \left(u \frac{\partial Y}{\partial \xi} + w \frac{\partial Y}{\partial \eta} \right).\end{aligned}\tag{11}$$

В первом приближении метода усреднения получим

$$M_\nu(X) = 0, \quad M_\nu(Y) = \frac{\chi_1 - \alpha_1}{2} \cos \xi.$$

Таким образом,

$$\xi = \xi_0 = \text{const}, \quad \eta = \eta_0 + \frac{\chi_1 - \alpha_1}{2} \nu \cos \xi_0, \quad \eta_0 = \text{const}.$$

В системе (11) члены порядка ε^2 имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial \xi} &= \frac{1}{2} [-\alpha_1 + \chi_1(1 + e \cos \nu)] \cos \xi \sin 2(\eta - \nu), \\ \frac{\partial X}{\partial \eta} &= [-\alpha_1 + \chi_1(1 + e \cos \nu)] \sin \xi \cos 2(\eta - \nu), \\ \frac{\partial Y}{\partial \xi} &= - [-\alpha_1 + \chi_1(1 + e \cos \nu)] \sin \xi \cos^2(\eta - \nu), \\ \frac{\partial Y}{\partial \eta} &= - [-\alpha_1 + \chi_1(1 + e \cos \nu)] \cos \xi \sin 2(\eta - \nu).\end{aligned}$$

Определим функции u, w

$$\begin{aligned}u &= \frac{\sin \xi}{12} \left\{ 3(\chi_1 - \alpha_1) [\cos 2(\nu - \eta) - \cos 2\eta] + \right. \\ &\quad \left. + \chi_1 e [3 \cos(\nu - 2\eta) + \cos(3\nu - 2\eta)] \right\}, \\ w &= \frac{\cos \xi}{12} \left\{ 3(\chi_1 - \alpha_1) [\sin 2(\nu - \eta) + \sin 2\eta] + \right. \\ &\quad \left. + \chi_1 e [6 \sin \nu + 3 \sin(\nu - 2\eta) + \sin(3\nu - 2\eta)] \right\}.\end{aligned}$$

Находим

$$\begin{aligned} M_\nu \left(\frac{\partial X}{\partial \xi} u + \frac{\partial X}{\partial \eta} w \right) &= \frac{1}{16} \chi_1^2 e^2 \sin 2\eta \sin 2\xi, \\ M_\nu \left(\frac{\partial Y}{\partial \xi} u + \frac{\partial Y}{\partial \eta} w \right) &= \frac{(\chi_1 - \alpha_1)^2}{16} (5 \cos^2 \xi - 3 + 4 \cos^2 \eta \sin^2 \xi) + \\ &+ \frac{\chi_1^2 e^2}{48} (6 \cos^2 \eta - 1) (3 \cos^2 \xi - 1). \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\nu} &= \frac{\varepsilon^2}{16} \chi_1^2 e^2 \sin 2\eta \sin 2\xi, \\ \frac{d\eta}{d\nu} &= \varepsilon \frac{\chi_1 - \alpha_1}{2} \cos \xi + \varepsilon^2 \left[\frac{(\chi_1 - \alpha_1)^2}{16} \times \right. \\ &\left. \times (5 \cos^2 \xi_0 - 3 + 4 \cos^2 \eta \sin^2 \xi) + \frac{\chi_1^2 e^2}{48} (6 \cos^2 \eta - 1) (3 \cos^2 \xi - 1) \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Соотношения (12) – это система с вращающейся фазой η [14]. Сделаем замену $\tau = \varepsilon\nu$ и проведем усреднение по η на интервале времени $\sim \varepsilon^{-2}$. Получим

$$\frac{d\xi}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\eta}{d\tau} = \frac{\chi_1 - \alpha_1}{2} \cos \xi.$$

Следовательно, $\xi = \xi_0 = \text{const}$, $\eta = \frac{\chi_1 - \alpha_1}{2} \tau \cos \xi_0 + \eta_0$, где ξ_0, η_0 – начальные условия.

Проведем замену $\tau = \varepsilon\nu$ и ищем решение в виде

$$\xi = \xi_0 + \varepsilon \Delta\xi, \quad \eta = \eta_0 + \frac{\chi_1 - \alpha_1}{2} \tau \cos \xi_0 + \varepsilon \Delta\eta.$$

Тогда система (12) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\xi}{d\tau} &= \frac{\chi_1^2 e^2}{16} \sin 2\beta \sin 2\xi_0, \\ \frac{d\Delta\eta}{d\tau} &= - \frac{(\chi_1 - \alpha_1)^2}{16} (3 - 5 \cos^2 \xi_0 - 4 \cos^2 \beta \sin^2 \xi_0) + \\ &+ \frac{\chi_1^2 e^2}{48} (1 - 6 \cos^2 \beta \sin^2 \xi_0 + 3 \cos^2 \xi_0 (4 \cos^2 \beta - 1)) - \frac{\chi_1 - \alpha_1}{2} \sin \xi_0 \Delta\xi. \end{aligned}$$

Здесь $\beta = \eta_0 + (\chi_1 - \alpha_1)\tau \cos \xi_0/2$. Откуда

$$\begin{aligned} \Delta\xi &= \frac{\chi_1^2 e^2 \sin \xi_0 \cos 2\beta}{8(\alpha_1 - \chi_1)}, \\ \Delta\eta &= \frac{1}{48 \cos \xi_0 (\alpha_1 - \chi_1)^2} \left\{ \tau [3(\alpha_1 - \chi_1)^2 + 2\chi_1^2 e^2] \cos \xi_0 (\alpha_1 - \chi_1) \times \right. \\ &\times (3 \cos^2 \xi_0 - 1) - 6(\alpha_1 - \chi_1)^2 \sin^2 \xi_0 (\sin 2\beta + 2\eta_0) - \\ &\left. - 6\chi_1^2 e^2 [\sin 2\beta \cos^2 \xi_0 + \eta_0 (3 \cos^2 \xi_0 - 1)] \right\}. \end{aligned}$$

Тогда получим решение во втором приближении

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_0 + \varepsilon \frac{\chi_1^2 e^2}{8(\alpha_1 - \chi_1)} \sin \xi_0 \cos 2\beta, \\ \eta(\nu) &= \eta_0 + \frac{\chi_1 - \alpha_1}{2} \varepsilon \nu \cos \xi_0 + \frac{\varepsilon}{96 \cos^2 \xi_0 (\alpha_1 - \chi_1)^2} \times \\ &\times \left\{ \varepsilon \nu [3(\alpha_1 - \chi_1)^2 + 2\chi_1^2 e^2] \cos \xi_0 (\alpha_1 - \chi_1) (3 \cos^2 \xi_0 - 1) - \right. \\ &- 6(\alpha_1 - \chi_1)^2 \sin^2 \xi_0 (\sin 2\beta + 2\eta_0) - 6\chi_1^2 e^2 \times \\ &\left. \times [\sin 2\beta \cos^2 \xi_0 + \eta_0 (3 \cos^2 \xi_0 - 1)] \right\}. \end{aligned}$$

В результате находим выражения вида

$$\begin{aligned} \rho(\nu) &= \xi(\nu) + \varepsilon \left[(\chi_1 - \alpha_1) \sin \xi_0 \left(\frac{1}{4} \sin 2\beta \sin 2\nu - \cos^2 \beta \sin^2 \nu + \right. \right. \\ &+ \frac{1}{2} \sin^2 \nu) + \frac{2}{3} \chi_1 e \sin \xi_0 \cos^2 \nu \cos \beta \cos(\nu - \beta) + \\ &\left. \left. + \frac{1}{3} \chi_1 e \sin \xi_0 \left(\frac{1}{2} \sin \nu \sin 2\beta + \cos^3 \nu \right) \right], \\ \sigma(\nu) &= \eta(\nu) + \varepsilon \frac{\cos \xi_0}{12} \left[3(\chi_1 - \alpha_1) (\sin 2\nu + 2 \sin 2\beta \sin^2 \nu + \right. \\ &+ 2 \sin 2\nu \cos^2 \beta) + 8\chi_1 e \cos \beta \cos^2 \nu \sin(\nu - \beta) + \\ &\left. + 4\chi_1 e \sin \nu (\cos^2 \beta + \sin^2 \nu) \right]. \end{aligned}$$

Здесь $\nu - \beta = \nu \left(1 - \frac{\chi_1 - \alpha_1}{2} \varepsilon \cos \xi_0 \right) - \eta_0$.

Полученные формулы позволяют провести анализ движения. Таким образом, исследована эволюция вращений несимметричного спутника относительно центра масс под действием моментов сил светового давления и гравитационного притяжения на удлинённом интервале времени $t \sim \varepsilon^{-2}$, что является новым результатом.

1. *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. – М.: Наука, 1965. – 416 с.
2. *Черноусько Ф.Л.* О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов // Прикл. математика и механика. – 1963. – **27**, вып. 3. – С. 474-483.
3. *Белецкий В.В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. – М.: Изд-во МГУ, 1975. – 308 с.
4. *Карымов А.А.* Устойчивость вращательного движения геометрически симметричного искусственного спутника Солнца в поле сил светового давления // Прикл. математика и механика. – 1964. – **28**, вып 5. – С. 923-930.
5. *Абалакин В.К., Аксенов Е.П., Гребеников Е.А., Демин В.Г., Рябов Ю.А.* Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. – М.: Наука, 1976. – 862 с.
6. *Поляхова Е.Н.* Космический полёт с солнечным парусом: проблемы и перспективы. – М.: Наука, 1986. – 304 с.
7. *Сидоренко В.В.* О вращательном движении космического аппарата с солнечным стабилизатором // Космич. исслед. – 1992. – **30**, вып 6. – С. 780-790.

8. *Сазонов В.В.* Движение астероида относительно центра масс под действием момента сил светового давления // *Астрон. вестник*. – 1994. – **28**, №2. – С. 95-107.
9. *Лещенко Д.Д., Шамаев А.С.* О движении спутника относительно центра масс под действием моментов сил светового давления // *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*. – 1985. – №1. – С. 14-21.
10. *Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д.* Эволюция вращений трехосного спутника, близкого к динамически-сферическому, под действием моментов сил светового давления // *Изв. РАН. Механика твердого тела*. – 1996. – № 2. – С. 3-12.
11. *Лещенко Д.Д.* Эволюция вращений трехосного тела под действием момента сил светового давления // *Там же*. – 1997. – № 6. – С. 17-26.
12. *Волосов В.М., Моргунов Б.И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. – М.: Изд-во МГУ, 1971. – 507 с.
13. *Митропольский Ю.А.* Метод усреднения в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1971. – 440 с.
14. *Акуленко Л.Д.* Схемы усреднения высших степеней в системах с быстрой и медленной фазами // *Прикл. математика и механика*. – 2002. – **66**, вып. 2. – С.165-176.

Ин-т проблем механики РАН, Москва
Одесская гос. академия строительства и архитектуры, Одесса
leshchenko_d@ukr.net

Получено 19.09.04