

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/288830023>

Эволюция вращений твердого тела в случае Лагранжа под действием внешней среды

Conference Paper · January 2012

CITATIONS

0

READS

6

3 authors, including:



Dmytro Leshchenko

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

217 PUBLICATIONS 224 CITATIONS

SEE PROFILE

Some of the authors of this publication are also working on these related projects:



Evolution of rotations of a rigid body close to the Lagrange case under the action of nonstationary torque of forces [View project](#)

УДК 681.3:65.015.13
ББК Б1 + 973
М 33

Редакционная коллегия:

Доктор технических наук, профессор А.А. Большаков (общая редакция)
Доктор технических наук, профессор В.С. Балакирев
Доктор технических наук, профессор С.И. Дворецкий
Кандидат технических наук, доцент А.В. Майстренко

Одобрено

Редакционно-издательским советом
Саратовского государственного технического университета имени Гагарина Ю.А.

М 33 Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-25 [текст]:
сб. трудов XXV Междунар. науч. конф.: в 10 т. Т. 3. Секция 5 / под общ.
ред. А.А. Большакова. – Волгоград: Волгогр. гос. техн. ун-т, 2012; Харьков:
Национ. техн. ун-т «ХПИ», 2012. – 184 с.

ISBN 978-5-7433-2386-9

В сборнике публикуются труды участников XXV Международной научной конференции «Математические методы в технике и технологиях», состоявшейся 29 – 31 мая 2012 г. в Волгоградском государственном техническом университете и 2 – 4 октября 2012 г. в Национальном техническом университете «ХПИ», г. Харьков.

Опубликованные материалы характеризуют современные направления и методы компьютерной поддержки производственных процессов и технических систем. Сборник будет полезен специалистам, занимающимся компьютерным конструированием и проектированием технических систем и производственных процессов.

Доклады рецензированы и отрецензированы Программным комитетом конференции ММТТ-25.

Сборник издан при финансовой поддержке РФФИ (грант № 12-08-06016 Г).

УДК 681.3:65.015.13
ББК Б1 + 973

ISBN 978-5-7433-2386-9

© Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., 2012
© Международная научная конференция ММТТ



25
ММТТ



СЕКЦИЯ 5

КОМПЬЮТЕРНАЯ ПОДДЕРЖКА ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПРОЦЕССОВ

ММТТ - 25
2012

Предложенный метод может быть применен в комбинации с известными асимптотическими методами. Рассмотрим свободные колебания гибкой упругой круговой цилиндрической оболочки радиуса R , толщины h и длины L , равномерно подкрепленной набором стрингеров, при шарнирном опирании по торцам. Расчет произведем на основании смешанных динамических уравнений теории оболочек после расщепления их по естественным малым параметрам [4]. Форма радиального прогиба w , удовлетворяющая граничным условиям, задается в виде: $w = f_1(t) \sin s_1 x_1 \cos s_2 x_2 + f_2(t) \sin^2 s_1 x_1$. Здесь f_1, f_2 – временные функции, связанные условием непрерывности перемещений $f_2 = 0,25R^{-1}s_2^2 f_1^2$, $s_1 = \pi ml^{-1}, s_2 = n$ – параметры, характеризующие волнообразование вдоль образующей и направляющей соответственно. Разрешающие уравнения сводятся методом Бубнова – Галеркина к начальной задаче относительно $\xi = f_1 / R$ по $t_1 = (tB_1 / \rho R^2)^{1/2}$ вида

$$\ddot{\xi} + \alpha \xi \left[\left(\frac{\xi}{\xi_0} \right)^2 + \xi \frac{\dot{\xi}}{\xi} \right] + A_1 \xi + A_2 \xi^3 + A_3 \xi^5 = 0, \quad \left(\frac{\xi}{\xi_0} \right) = \frac{d(\xi)}{dt_1}, \xi_0 = 0; \xi = \xi_0; \dot{\xi} = 0.$$

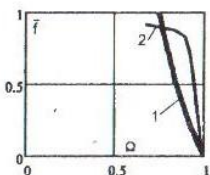


Рис. 2. Зависимость частоты колебаний стрингерной оболочки от амплитуды начального возмущения: 1 – по предлагаемому методу, 2 – [4]

Применение к задаче предлагаемого метода продолжения по параметру позволяет получить приближение второго порядка по искусственному параметру для частоты нелинейных колебаний Ω в виде: $\Omega = \left[(1 + f^2(A_2/A_1) + f^4(A_3/A_1)) / (1 + \alpha f^2) \right]^{1/2}$. Видно, что колебания являются неизохронными. Это хорошо согласуется с ранее полученными результатами (рис. 2), при этом существенно сокращает объем вычислений (в [4] для получения близкого результата потребовалось приближение четвертого порядка).

1. Андрианов И.В., Олевский В.И., Плетин В.В. Theoretical Foundation of Civil Engineering. Vol. 18. Warsaw, 2010.
2. Vavilov V.V., Tchobanou M.K., Tchobanou P.M. Nonlinear Analysis: Modelling and Control. 2002. Vol. 7. № 1.
3. Григолюк, Э.И., Шалашилин В.И. Проблемы нелинейного деформирования М.: Наука 1988.
4. Andrianov I.V., Kholod E.G., Olevsky V.I. J. Sound Vibr. 1996. Vol. 194, № 3.

ЭВОЛЮЦИЯ ВРАЩЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА В СЛУЧАЕ ЛАГРАНЖА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНЕЙ СРЕДЫ

Козаченко Т.А., Лещенко Д.Д., Рачинская А.Л.

Одесская государственная академия строительства и архитектуры, kushpil.ru@rambler.ru

Исследованию движений волчка Лагранжа с неподвижной точкой под действием возмущающих моментов, обусловленных влиянием: момента, постоянного в связанных осях; линейного диссипативного момента; медленного времени – посвящено значительное количество работ.

Рассмотрим возмущенное движение твердого тела, близкое к случаю Лагранжа, под действием возмущающего момента, зависящего от медленного времени. Уравнения движения имеют вид:

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - A)qr &= \mu \sin \theta \cos \varphi + \varepsilon M_1, & A\dot{q} + (A - C)pr &= -\mu \sin \theta \sin \varphi + \varepsilon M_2, \\ C\dot{r} &= \varepsilon M_3, & \dot{\psi} &= (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{cosec} \theta, & \dot{\theta} &= p \cos \varphi - q \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= r - (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{ctg} \theta, & M_i &= M_i(p, q, r, \psi, \theta, \varphi, \tau), & \tau &= \varepsilon t \quad (i = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (1)$$

Динамические уравнения (1) записаны в проекциях на главные оси инерции тела. Здесь p, q, r – проекции вектора угловой скорости тела на главные оси; величины $\varepsilon M_i (i = 1, 2, 3)$ – проекции вектора возмущающего момента на те же оси, они зависят от медленного времени $\tau = \varepsilon t$ ($\varepsilon \ll 1$ – малый параметр, t – время); ψ, θ, φ – углы Эйлера; A – экваториальный, C – осевой момент инерции тела относительно точки O . Предполагается, что на тело действует восстанавливающий момент $\mu = mgl$, величина которого постоянна. Здесь m – масса тела, g – ускорение силы тяжести, l – расстояние от неподвижной точки O до центра тяжести тела.

Ставится задача исследования асимптотического поведения решений системы (1) при малом ε на интервале времени порядка ε^{-1} , с помощью метода усреднения [1].

Для усреднения системы (1) при возмущениях, зависящих от медленного времени τ и допускающих усреднение по углу нутации θ применяется методика, описанная в [2]. В общем случае усредненная система уравнений примет вид:

$$\dot{u}_i = U_i(u_1, u_2, u_3), \quad u_i(0) = u_i^0, \quad i = 1, 2, 3, \quad \dot{u}_i = du_i/d\tau. \quad (2)$$

Здесь u_1, u_2, u_3 – вещественные корни кубического многочлена [3]

$$Q(u) = A^2[(2H - Cr^2 - 2\mu u)(1 - u^2)A - (G_2 - Cru)^2], \quad -1 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1 \leq u_3 < +\infty.$$

G_2 – проекция вектора кинетического момента на вертикаль Oz , H – полная энергия тела.

Рассмотрим возмущенное движение, близкое к случаю Лагранжа под действием внешней среды. Возмущающие моменты $M_i (i = 1, 2, 3)$ являются линейно-диссипативными и медленно изменяются во времени:

$$M_1 = -a(\tau)p, \quad M_2 = -a(\tau)q, \quad M_3 = -b(\tau)r, \quad a(\tau), b(\tau) > 0, \quad \tau = \varepsilon t, \quad (3)$$

где $a(\tau), b(\tau)$ – интегрируемые функции, зависящие от свойств среды и формы тела.

Рассмотрим случай, когда $a(\tau), b(\tau)$ имеют вид:

$$a(\tau) = a_0 + a_1\tau, \quad b(\tau) = b_0 + b_1\tau, \quad a_0, a_1, b_0, b_1 = \text{const}. \quad (4)$$

В результате преобразований получим следующую усредненную систему:

$$\dot{u}_i = L(u_i) \left\{ A^{-1}(G_2 - Cru_i)(u(G_2 - Crv) + \varepsilon a_0 Crm/\alpha) + (u_1^2 - 1)(v(2H - Cr^2 - 2\mu v) + 2\varepsilon a_1 \mu n/\alpha) + \right. \\ \left. + r(G_2 - Cru_i)(b_0 + \varepsilon b_1 K(k)/\alpha)(v - u_i) - \varepsilon b_1 n/\alpha \right\}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} L(u_i) &= -1/A\mu(u_1 - u_2)(u_1 - u_3), \quad w = a_0 + a_1 K(k)/\alpha, \quad v = u_3 - (u_1 - u_2)E(k)/K(k), \\ n &= (u_1 - u_2)E(\beta, k) - \beta E(k)/K(k), \quad \alpha = (\mu(u_1 - u_2)/(2A))^{1/2}, \quad \operatorname{sn}(\alpha\tau + \beta) = \sin \alpha m(\alpha\tau + \beta, k), \\ k^2 &= (u_2 - u_1)(u_3 - u_1)^{-1}, \quad 0 \leq k^2 \leq 1, \quad R = ((1 - u_1^2)(1 - u_2^2)(u_3^2 - 1))^{1/2}, \\ G_2 &= \delta_1(A\mu)^{1/2}(u_1 + u_2 + u_3 + u_1 u_2 u_3 + \delta_2 R)^{1/2} \operatorname{sign}(1 + u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3), \\ H &= 0,5\mu(u_1 + u_2 + u_3)(1 + AC^{-1}) + (\delta_1 R - u_1 u_2 u_3)(1 - AC^{-1}), \quad \delta_2 = \operatorname{sign} v, \\ r &= \delta_2 C^{-1}(A\mu)^{1/2}(u_1 + u_2 + u_3 + u_1 u_2 u_3 - \delta_1 R)^{1/2}, \quad \delta_1 = \operatorname{sign}(G_2^2 - C^2 r^2). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $L(u_i)$ и $L(u_i)$ получаются из $L(u_i)$ циклической перестановкой индексов у u_i ; величины δ_1, δ_2 в начальный момент времени определяются по начальным условиям для G_2, r ; k – модуль эллиптических функций, $E(k), K(k)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода, $E(\beta, k)$ – эллиптический интеграл второго рода.

После решения и исследования системы (5) для u_i исходные переменные G_2, H, r восстанавливаются по формулам (6). Медленные переменные u_i, G_2, H, r определяются с погрешностью порядка ε .

Также рассмотрим случай, когда $a(\tau), b(\tau)$ имеют вид:

$$a(r) = a_0 + \Delta a_1 \exp(-\sigma r), \quad b(r) = b_0 + \Delta b_1 \exp(-\sigma r), \quad a_1, \Delta a_1, b_1, \Delta b_1, \sigma = \text{const.} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \dot{u}_i = & L(u_i) \{ \alpha_1 [z(u_i) G_i - Crv] + (u_i^2 - 1)(2H - Cr^2 - 2\mu v) \} + b_0 r (u_i - v)(Cr u_i - G_i) + \\ & + \{ \Delta a_1 [z(u_i) G_i - Cr u_i] + (u_i^2 - 1)(2H - Cr^2 - 2\mu v) \} + \Delta b_1 r (u_i - v)(Cr u_i - G_i) \times \\ & \times \alpha (1 - \exp(-2\varepsilon \sigma K(k)/\alpha)) / 2\varepsilon \sigma K(k) - \{ \Delta a_1 [z(u_i) Cr + 2\mu(u_i^2 - 1)] + \Delta b_1 r (Cr u_i - G_i) \} \times \\ & \times 0.5 \alpha (u_2 - u_1) K^{-1}(k) \times \int_0^{k \operatorname{arctan}(\sigma t)} \exp(-\varepsilon \sigma t) \operatorname{sn}^2(\sigma t + \beta) dt, \quad i = 1, 2, 3. \quad z(u_i) = A^{-1}(G_i - Cr u_i), \end{aligned} \quad (8)$$

где $L(u_i)$, v , G_i , H , r определяются из формул (6).

Усредненные системы (5) и (8) проинтегрированы численно при разных начальных условиях и параметрах задачи. Рассмотрим два случая, соответствующие следующим начальным данным:

$$a) u_1^0 = 0, u_2^0 = 0.5, u_3^0 = 2, \theta^0 = 60^\circ; \quad б) u_1^0 = -0.992, u_2^0 = -0.985, u_3^0 = 2.992, \theta^0 = 170^\circ. \quad (9), (10)$$

Предполагается, что в начальный момент волчок Лагранжа получил угловую скорость вращения относительно оси динамической симметрии, равную $r^0 = \sqrt{3}$, кроме того $A = 1.5$, $C = 1$, $\mu = 0.5$, $\alpha_1 = b_1 = 1$, $\Delta a_1 = \Delta b_1 = \varepsilon \eta$, $a_0 = 0.125$, $b_0 = 0.1$, $\sigma = 0.1$, $\eta = 1$. Численный расчет проведен при различных значениях $\varepsilon = \{0, \dots, 10^{-4}\}$. На рис. 1 изображены графики функций u_i ($i = 1, 2, 3$), G_i , H , r , для указанных случаев при $\varepsilon = 10^{-4}$. При $\varepsilon = 0$ системы (5) и (8) упрощаются и соответствуют случаю линейной диссипации с постоянными коэффициентами [2].

На рис. 1а приведен результат численного интегрирования системы (5) при начальных условиях (9). Как видно, проекция вектора кинетического момента на вертикаль, угловая скорость вращения относительно оси динамической симметрии монотонно убывают к нулю. Величина u_3 достаточно быстро стремится к 1, u_2 медленнее стремится к -1, чем u_1 . Полная энергия H монотонно убывает, приближаясь к значению $H = -0.5$.

В случае начальных значений (10) результат численного интегрирования системы (8) изображен на рис. 1б. Величина u_3 медленнее стремится к +1, чем на рис. 1. Проекция вектора кинетического момента G_i монотонно возрастает и стремится к нулю. Величины H и r монотонно убывают. На рис. 1б графики функций u_1 и u_2 совпадают, но при численном сопоставлении отличаются в третьем знаке после запятой. Правильность счёта контролировалась тем, что полученные по численным данным и формулам (6) значения для r практически совпадают с точным решением $r = r^0 \exp(-b_0 C^{-1} \int b(\varepsilon t) dt)$.

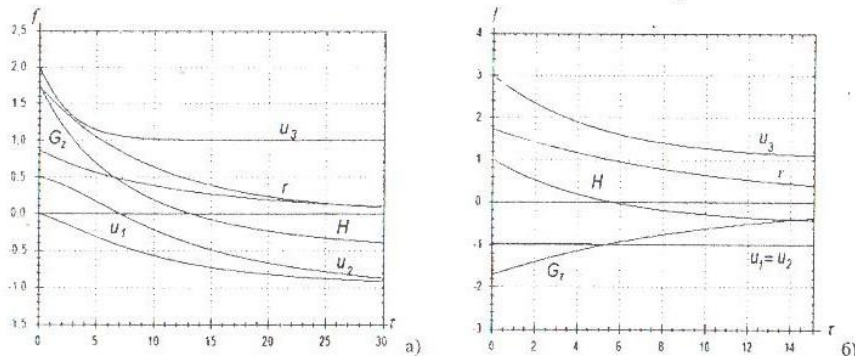


Рис. 1. Графики функций при начальных условиях: а) (9); б) (10)

При сравнении полученных результатов с результатами [2] можно отметить, что зависимость возмущающего момента от медленного времени приводит к появлению в усредненной системе уравнений первого приближения для медленных переменных дополнительных слагаемых, содержащих эллиптические интегралы первого и второго рода, которые при численном интегрировании сглаживают поведение функций u_i ($i = 1, 2, 3$), G_i , H , r . Под действием возмущающего момента (3) твердое тело стремится к устойчивому нижнему положению равновесия быстрее, чем в [2].

1. Волосов В.М., Моргунов Б.И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем М.: Изд-во МГУ, 1971.
2. Акуленко Л.Д., Лешенко Д.Д., Черноусько Ф.Л. Прикладная математика и механика. 1979. Т.43, №5.
3. Суслев Г.К. Теоретическая механика М.: Гостехиздат, 1946.

ЖЕСТКОЕ ВКЛЮЧЕНИЕ В ТРЕХМЕРНОМ УПРУГОМ КЛИНЕ

Пожарский Д.А., Нурутдинова И.Н., Вышник Е.В.

Донской государственный технический университет, pozharda@rambler.ru

В аналитическом виде получены решения аналогов задачи Миндлина для трехмерного составного упругого клина при жесткой заделке внешних граней, когда внутри клина действует сосредоточенная сила, перпендикулярная или параллельная ребру клина. При удалении точки приложения силы от ребра в пределе получается классическое решение Миндлина для неограниченной упругой среды. Получено асимптотическое решение смешанной задачи о плоском эллиптическом включении в трехмерном составном упругом клине при жесткой заделке внешних граней. Определены контактные касательные напряжения, связь между силой, приложенной к включению и его смещением. Результаты могут быть использованы при расчетах на прочность резиноталлических деталей и конструкций, имеющих угловую линию. Ранее найдено точное решение задачи об эллиптическом включении в упругом пространстве [1], которое и взято в качестве нулевого члена асимптотики.

Рассмотрим, используя цилиндрические координаты r , φ , z , пространственный упругий клин, составленный из клиньев $\Omega_0 = \{r \in [0, \infty); \varphi \in [-\alpha, \alpha]; z \in (-\infty, \infty)\}$ и $\Omega_1 = \{r \in [0, \infty); \varphi \in [\alpha, 2\beta - \alpha]; z \in (-\infty, \infty)\}$, $\Omega_2 = \{r \in [0, \infty); \varphi \in [2\beta - \alpha, 2\beta + \alpha]; z \in (-\infty, \infty)\}$, соединенных скользящей заделкой по граням $\varphi = \alpha$ и $\varphi = 2\beta - \alpha$. Материал клиновидных слоев Ω_1 и Ω_2 имеет коэффициент Пуассона ν и модуль сдвига G . Материал клиновидного слоя Ω_0 несжимаем (коэффициент Пуассона $\nu_0 = 0.5$, модуль сдвига G_0). В бисекториальной полуплоскости $\varphi = \beta$ действует произвольно направленная касательная сосредоточенная сила $2P = 2(P_1, P_2)$, приложенная в точке $r = x, z = y$. Внешние грани клина $\varphi = -\alpha$ и $\varphi = 2\beta + \alpha$ подчинены условиям жестко заделки. Далее в силу симметрии относительно полуплоскости $\varphi = \beta$ достаточно рассматривать область $\varphi \in [-\alpha, \beta]$. Граничные условия краевой задачи для дифференциальных уравнений упругого равновесия Ламе, записанных в цилиндрических координатах, имеют вид

$$\varphi = -\alpha: u_\varphi = 0, u_r = 0, u_z = 0, \varphi = \alpha: u_\varphi = u_\varphi^1, \sigma_\varphi = \sigma_\varphi^1, \tau_{r\varphi} = \tau_{r\varphi}^1, \tau_{z\varphi} = \tau_{z\varphi}^1, \tau_{\varphi r} = \tau_{\varphi r}^1, \tau_{\varphi z} = \tau_{\varphi z}^1 = 0,$$

$$\varphi = \beta: u_\varphi^1 = 0, \tau_{r\varphi}^1 = P_1 \delta(r-x) \delta(z-y), \tau_{z\varphi}^1 = P_2 \delta(r-x) \delta(z-y),$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, верхний индекс 1 указывает на принадлежность к слою Ω_1 . Решение сформулированной краевой задачи находится при помощи инте-