About motion of non-symmetric gyrostat in a resisting medium

Dmytro Leshchenko
Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

*Проблемы нелинейного анализа
в инженерных системах.* Выпуск 2(18), том 9, 2003 Казань

О движении несимметричного гиростата в среде с сопротивлением

Д.Д.Лещенко, С.Г.Суксова

Одесская государственная академия строительства и архитектуры
Украина, 65029, Одесса, ул.Дидриксона, 4
leshchenko_d@ukr.net

Рассматривается движение тяжелого твердого тела, близкого к динамически симметричному, вокруг центра масс в предположении, что тело имеет сферическую полость, заполненную жидкостью с большой вязкостью, и находится, в среде сопротивлением. Анализ усредненных уравнений движения показывает, что полученная система эквивалентна системе уравнений, описывающих эволюцию экологических систем. Для этой системы определен и исследуется первый интеграл.

Рассмотрим движение твердого тела, близкого к динамически симметричному, вокруг центра масс, которое имеет сферическую полость, заполненную жидкостью большой вязкости, и находится в сопротивляющейся среде. Динамические уравнения Эйлера в проекциях на главные центральные оси инерции имеют вид [1-3].

$$\begin{aligned}
&A\dot{p}+(C-B)qr=-\varepsilon(I_{11}p+I_{12}q+I_{13}r)+\\
&+\frac{\rho P}{\nu ABC}p\left[C(A-C)(A+C-B)r^2+B(A-B)(A+B-C)q^2\right]\\
&B\dot{q}+(A-C)rp=-\varepsilon(I_{21}p+I_{22}q+I_{23}r)+\\
&+\frac{\rho P}{\nu ABC}q\left[A(B-A)(B+A-C)p^2+C(B-C)(B+C-A)r^2\right]\\
&C\dot{r}+(B-A)pq=-\varepsilon(I_{31}p+I_{32}q+I_{33}r)+\\
&+\frac{\rho P}{\nu ABC}r\left[B(C-B)(C+B-A)q^2+A(C-A)(C+A-B)p^2\right]\quad .
\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь A, B, C – главные центральные моменты инерции системы; p, q, r – проекции абсолютной угловой скорости на соответствующие главные центральные оси инерции. Предполагается, что момент сил сопротивления $\overline{M}^*$ может быть представлен в виде $\overline{M}^*=I\overline{\omega}$, где тензор I имеет постоянные компоненты в системе координат Oz_i (i=1,2,3), оси которой связаны с главными центральными осями инерции твердого тела [4].

Сопротивление среды предполагается слабым $\dfrac{\|I\|}{G_0}\sim\varepsilon<<1$, где $\|I\|$ – норма матрицы коэффициентов сопротивления, G_0 – начальное значение кинетического момента тела с жидкостью.

В слагаемых, учитывающих влияние вязкой жидкости, заполняющей полость, на движение твердого тела, ρ – плотность жидкости, ν – кинематический коэффициент вязкости. В рассматриваемой задаче тензор $\overline{P}$ зададим в виде $P_{ij}=P\delta_{ij}$, где δ_{ij} – символ Кронекера, а $P>0$. Так например, для сферической полости радиусом а имеем $P=\dfrac{8\pi a^7}{525}$. Предполагается [1], что полость заполнена жидкостью достаточно большой вязкости, поэтому $\dfrac{\rho PG_0}{\nu ABC}\sim\varepsilon$.

Если тело близко к динамически симметричному, то

$$B = A\,(1 + \chi\varepsilon),\ \varepsilon << 1,\ \chi \sim 1 \tag{2}$$

Таким образом, мы предполагаем, что гироскопические возмущения, как и возмущения, обусловленные сопротивлением среды и полостью, заполненной жидкостью большой вязкости, одного порядка ε.
Подставляя (2) в (1) и отбрасывая члены порядка ε^2, получим

$$\begin{aligned}
&A\dot{p} + (C-A)qr = \varepsilon\chi Aqr - \varepsilon(I_{11}p + I_{12}q + I_{13}r) + \frac{\rho P}{\nu A^2}C(A-C)r^2 p \\
&A\dot{q} + (A-C)rp = \varepsilon\chi(A-C)rp - \varepsilon(I_{21}p + I_{22}q + I_{23}r) + \frac{\rho P}{\nu A^2}C(A-C)r^2 q \\
&C\dot{r} = -\varepsilon\chi Apq - \varepsilon(I_{31}p + I_{32}q + I_{33}r) + \frac{\rho P}{\nu A}(C-A)\left(p^2 + q^2\right)
\end{aligned} \tag{3}$$

При $\varepsilon = 0$ система (3) интегрируется явно, в частности $r = r_0$. Предположим, что $r_0 \neq 0$. Тогда переменные p, q совершают гармонические колебания частоты $\left|(C-A)r_0\right|$, зависящей от r_0. Поэтому система (3) относится к существенно нелинейным.
Используем общее порождающее решение системы (3) [5]

$$r = C_1,\ p = a\cos\psi,\ q = a\sin\psi\ (a > 0,\ a = const,\ C_1 \neq 0,\ C_1 = const),\ \psi = r\frac{C-A}{A}t \tag{4}$$

в качестве преобразования к переменным a, $C_1 = r$.
Подставим (4) в третье уравнение (3), а для первых двух уравнений учитываем, что $a^2 = p^2 + q^2$ и $\dot{a} = \dot{p}\cos\psi + \dot{q}\sin\psi$. Усредним полученную систему уравнений для a и r по фазе ψ [6].
После усреднения система принимает вид:

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= r\left[\frac{\rho P(C-A)}{\nu AC}a^2 - \frac{\varepsilon}{C}I_{33}\right] \\
\dot{a} &= a\left[\frac{\rho P(A-C)}{\nu A^3}r^2 - \frac{\varepsilon}{2A}\left(I_{11} + I_{22}\right)\right]
\end{aligned} \tag{5}$$

Умножая первое уравнение системы (5) на $2r$, а второе уравнение на $2a$, получим

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= x\left(\lambda_1 + \mu_1 y\right) \\
\frac{dy}{dt} &= y\left(\lambda_2 + \mu_2 x\right)
\end{aligned} \tag{6}$$

Здесь $x = r^2$, $y = a^2$, $\lambda_1 = -\dfrac{2\varepsilon}{C}I_{33}$, $\lambda_2 = -\dfrac{\varepsilon}{A}\left(I_{11} + I_{22}\right)$, $\mu_1 = \dfrac{2\rho P(C-A)}{\nu AC}$, $\mu_2 = \dfrac{2\rho P(A-C)C}{\nu A^3}$. Причем всегда $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, при $A > C$ $\mu_1 < 0$, $\mu_2 > 0$, а при $A < C$ $\mu_1 > 0$, $\mu_2 < 0$.
Отметим, что (6) – система нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих эволюцию экологических систем [7, 8].
В работе [3] рассматривалось быстрое движение вокруг неподвижной точки в слабо сопротивляющейся среде несимметричного твердого тела со сферической полостью, заполненной жидкостью большой вязкости.

При малых значениях величины k^2, представляющей собой в невозмущенном движении модуль эллиптических функций [5], система уравнений для квадрата величины кинетического момента G^2 тела с жидкостью и k^2 имеет вид системы (6) с другими значениями коэффициентов λ_1, λ_2, μ_1, μ_2.
В нашей задаче первым интегралом системы (6) является выражение

$$x^{\lambda_2} e^{\mu_2 x} = C_1 y^{\lambda_1} e^{\mu_1 y} \qquad (7)$$

Здесь $C_1 = \dfrac{(x_0)^{\lambda_2} e^{\mu_2 x_0}}{(y_0)^{\lambda_1} e^{\mu_1 y_0}} = const$.

Кривая зависимости x от y показана на рисунке.
В случае, когда $C > A$ кривая имеет вид I, при $A > C$ – вид II. Рассмотрим направление движения точки с координатами (x, y) вдоль кривой с течением времени:

$$\frac{1}{2}\rho^2 \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} \right) = \frac{1}{2} xy\left(\mu_2 x + \lambda_2 - \mu_1 y - \lambda_1\right)$$

Здесь ρ, ω – полярные координаты (полюс в точке O).
Рис. 1 построен при следующих значениях: плотность жидкости ρ =1,26 г/см^3, радиус сферической полости a = 200 см, кинематический коэффициент вязкости жидкости ν = 33,4см^2/с, матрица коэффициентов сопротивления предполагается диагональной и компоненты ее следующие: I_{11} = 2,322, I_{22} = 1,31, I_{33} = 1,425. Главные центральные моменты инерции системы A и C принимаем такими: A=2,6×10^{7}г·см^2, C=1,67×10^{7}г·см^2, ε = 0,1; начальные значения для проекции вектора угловой скорости p_0 = 10 рад/с, q_0 = 0, r_0 = 10 рад/с.
С нашими данными $\lambda_1 = -1{,}70658682\times10^{-9}$, $\lambda_2 = -1{,}39692308\times10^{-10}$, $\mu_1 = -990233{,}7616$, $\mu_2 = 408530{,}0204$, то есть величины $-\lambda_1/\mu_1$ и $-\lambda_2/\mu_2$ порядка $-1{,}723418132343\times10^{-15}$ и $-3{,}419389054034\times10^{-15}$ соответственно. При $C > A$ алгебраическая скорость всегда меньше 0 (величинами λ_i можно пренебречь из-за их малости), при $A > C$ алгебраическая скорость больше нуля. Направление вектора скорости в каждом случае показано на рисунке.
Можно сделать следующие выводы о зависимости y от x (a^2 от r^2) для системы (6): с течением времени при $t \to \infty$ $x \to 0$ и $y \to 0$; точка (0, 0) – стационарная точка, устойчивый узел; с течением времени проекции абсолютной угловой скорости тела стремятся к нулю; тело стремится к состоянию покоя.

Литература

1. Ф.Л.Черноусько. Движение твердого тела с полостями, заполненными вязкой жидкостью, при малых числах Рейнольдса. Ж. Вычисл. матем. и матем. физ., Т, 5, № 6, 1965, с.1049–1070.
2. Л.Д.Акуленко, Д.Д.Лещенко, Ф.Л.Черноусько. Быстрое движение вокруг неподвижной точки тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде. Изв. АН СССР, МТТ, № 3, 1982, с.5–13.
3. Л.Д.Акуленко, Д.Д.Лещенко. Быстрое вращение вокруг неподвижной точки тяжелого гиростата в сопротивляющейся среде. Прикл. Механика, Т.18, № 7, 1982, с.102–107.
4. В.В.Белецкий. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965, 416с.
5. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Теоретическая физика. Т.1, Механика, М.: Наука, 1973, 208с.

6. Ю.А.Митропольский. Метод усреднения в нелинейной механике. Киев: Наук. думка, 1971, 440с.
7. Э.Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971, 576с.
8. В.Вольтерра. Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976, 286с.

Дмитрий Давидович Лещенко, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической механики. Область научных интересов: исследование эволюции возмущенных вращательных движений твердого тела под действием моментов сил различной физической природы. Сферы приложения: движение искусственного спутника относительно центра масс, движение летательных аппаратов при входе в атмосферу, теория гироскопов.

Светлана Геннадиевна Суксова, аспирант кафедры теоретической механики. Область научных интересов: исследование движений твердого тела, близких к случаю Эйлера-Пуансо, при наличии малых возмущающих моментов. Сферы приложения: ориентация и стабилизация космических аппаратов.

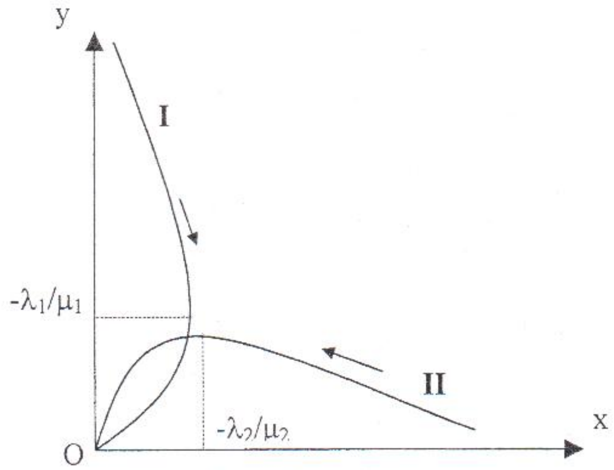

Рис.1 (Fig.1)

About motion of non-symmetric gyrostat in a resisting medium

D.D. Leshchenko, S.G. Suksova

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture
4, Didrikhson str., Odessa 65029, Ukraine
leshchenko_d@ukr.net

The motion of a close to dynamically symmetric rigid body around a centre of mass is considered. External resistance and spheroidal cavity containing a high-viscosity fluid are presented. The averaged equations of the motion show that the obtained system is equivalent to the system of nonlinear equations and describes evolution of ecological systems. The first integral for this system is defined and investigated.

Let us consider the motion of a close to dynamically symmetric rigid body with the spheroidal cavity containing a high-viscosity fluid about a centre of mass in a resistive medium. The dynamic Euler equations in the projections on the principal central axes of inertia have the form [1-3].

$$
\begin{aligned}
&A\dot{p}+(C-B)qr=-\varepsilon(I_{11}p+I_{12}q+I_{13}r)+\\
&+\frac{\rho P}{\nu ABC}p\left[C(A-C)(A+C-B)r^2+B(A-B)(A+B-C)q^2\right]\\
&B\dot{q}+(A-C)rp=-\varepsilon(I_{21}p+I_{22}q+I_{23}r)+\\
&+\frac{\rho P}{\nu ABC}q\left[A(B-A)(B+A-C)p^2+C(B-C)(B+C-A)r^2\right]\\
&C\dot{r}+(B-A)pq=-\varepsilon(I_{31}p+I_{32}q+I_{33}r)+\\
&+\frac{\rho P}{\nu ABC}r\left[B(C-B)(C+B-A)q^2+A(C-A)(C+A-B)p^2\right]
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Here A, B and C are the principal central moments of inertia of the system; p, q, r are the projections of the absolute angular velocity vector on the corresponding principal central axes of inertia. It is assumed that the moment of resistive forces $\overline{M}^*$ can be represented in the form $\overline{M}^*=I\overline{\omega}$, where the tensor I has constant components in the Oz_i (i=1, 2, 3) system, axis of which are associated with the principal central axes of inertia of the rigid body [4].

The resistance of the medium is assumed to be weak $\frac{\|I\|}{G_0}\sim\varepsilon<<1$, where $\|I\|$ is the norm of the matrix of the resistance coefficients, G_0 is an initial value of the kinetic moment vector of the rigid body with the fluid.

ρ and ν are the density and kinematic coefficient of viscosity of the fluid in terms taking into account the influence of the viscous fluid that is filled the cavity, on the motion of the rigid body. In considered problem tensor $\overline{P}$ is defined in the form of $P_{ij}=P\delta_{ij}$, where δ_{ij} is Kronecker symbol and $P>0$. Thus, for example, for the spheroidal cavity with the radius of a we have $P=\frac{8\pi a^7}{525}$. It is assumed [1] that the cavity is filled with a high-viscosity fluid, therefore $\frac{\rho P G_0}{\nu ABC}\sim\varepsilon$.

If the body is close to a dynamically symmetrical one then

$$B=A\,(1+\chi\varepsilon),\ \varepsilon<<1,\ \chi\sim 1 \tag{2}$$

Thus we assume that the gyroscopic perturbations and perturbations which are caused by resistance of the medium and cavity filled with a high-viscosity fluid are of the same order of smallness ε.

After substituting (2) in (1) and rejecting terms of order ε^2, we obtain

$$
\begin{aligned}
&A\dot{p}+(C-A)qr=\varepsilon\chi Aqr-\varepsilon(I_{11}p+I_{12}q+I_{13}r)+\frac{\rho P}{\nu A^2}C(A-C)r^2p\\
&A\dot{q}+(A-C)rp=\varepsilon\chi(A-C)rp-\varepsilon(I_{21}p+I_{22}q+I_{23}r)+\frac{\rho P}{\nu A^2}C(A-C)r^2q\\
&C\dot{r}=-\varepsilon\chi Apq-\varepsilon(I_{31}p+I_{32}q+I_{33}r)+\frac{\rho P}{\nu A}(C-A)\left(p^2+q^2\right)
\end{aligned}
\tag{3}
$$

When $\varepsilon=0$ the system (3) is obviously integrated, in particular $r=r_0$. We assume that $r_0\neq 0$. Then the variables p and q perform harmonic oscillations with the frequency $|(C-A)r_0|$ depending on r_0. Therefore system (3) is essentially nonlinear.

We use common generating solution of system (3) [5]

$$r = C_1,\ p = a\cos\psi,\ q = a\sin\psi\ (a>0,\ a = const,\ C_1 \neq 0,\ C_1 = const),\ \psi = r\frac{C-A}{A}t \quad (4)$$

as a transformation to the variables a, $C_1 = r$.

We substitute (4) in the third equation of (3), and take into account for two first equations, that $a^2 = p^2 + q^2$ and $\dot{a} = \dot{p}\cos\psi + \dot{q}\sin\psi$. We average the obtained system of equations for a and r with respect to phase ψ [6].

After averaging the system have the form:

$$\dot{r} = r\left[\frac{\rho P(C-A)}{\nu AC}a^2 - \frac{\varepsilon}{C}I_{33}\right]$$
$$\dot{a} = a\left[\frac{\rho P(A-C)}{\nu A^3}r^2 - \frac{\varepsilon}{2A}(I_{11}+I_{22})\right] \quad (5)$$

We multiply the first equation of the system (5) by 2r, and the second equation by 2a and obtain

$$\frac{dx}{dt} = x(\lambda_1 + \mu_1 y)$$
$$\frac{dy}{dt} = y(\lambda_2 + \mu_2 x) \quad (6)$$

Here $x = r^2$, $y = a^2$, $\lambda_1 = -\frac{2\varepsilon}{C}I_{33}$, $\lambda_2 = -\frac{\varepsilon}{A}(I_{11}+I_{22})$, $\mu_1 = \frac{2\rho P(C-A)}{\nu AC}$, $\mu_2 = \frac{2\rho P(A-C)C}{\nu A^3}$. Always $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, when $A > C$ $\mu_1 < 0$, $\mu_2 > 0$, and when $A < C$, $\mu_1 > 0$, $\mu_2 < 0$.

It should be noted that (6) is a system of nonlinear differential equations and describes evolution of ecological systems [7, 8].

In paper [3] fast motion of an asymmetrical heavy rigid body about a fixed point with the spheroidal cavity filled with a high-viscosity fluid in a weak resistive medium is investigated. For small k^2, representing the modulus of the elliptic functions in unperturbed motion [5], the system of equations for the square of value of kinetic moment G^2 of body with the fluid and k^2 has a form (6) with different values of coefficients λ_1, λ_2, μ_1, μ_2.

In our problem first integral of the system (6) is

$$x^{\lambda_2}e^{\mu_2 x} = C_1 y^{\lambda_1}e^{\mu_1 y} \quad (7)$$

Here $C_1 = \frac{(x_0)^{\lambda_2}e^{\mu_2 x_0}}{(y_0)^{\lambda_1}e^{\mu_1 y_0}} = const$.

The curve $y = y(x)$ is shown at the Fig. 1.

In the case when $C > A$ it has a form I; when $A > C$ – a form II. We consider the direction of motion of point with coordinates (x, y) along the curve during the time:

$$\frac{1}{2}\rho^2\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = \frac{1}{2}xy(\mu_2 x + \lambda_2 - \mu_1 y - \lambda_1)$$

Here ρ, ω are polar coordinates (pole – in the point O).

Fig.1 is constructed for the following values: density of the fluid ρ =1,26 g/cm^3, the radius of spheroidal cavity a = 200 cm, kinematic coefficient of viscosity of the fluid ν=33,4cm^2/s, the matrix of the coefficients of resistance assumes diagonal and has such components: I_{11}=2,322, I_{22}=1,31, I_{33}=1,425. Principal central moments of inertia A and C have such values:

A=2,6×10^7 gcm^2, C=1,67×10^7 gcm^2; ε = 0,1; initial values for the projections of the angular velocity vector are p_0 = 10 rad/s, q_0 = 0, r_0 = 10 rad/s.
With our data $\lambda_1 = -1{,}70658682\times10^{-9}$, $\lambda_2 = -1{,}39692308\times10^{-10}$, $\mu_1 = -990233{,}7616$, $\mu_2 = 408530{,}0204$, that is values $-\lambda_1/\mu_1$ and $-\lambda_2/\mu_2$ are order $1{,}723418132343\times10^{-15}$ и $-3{,}419389054034\cdot10^{-15}$ respectively. When $C > A$ algebraic velocity is always less then 0 (values λ_i could be neglected because of their smallness), when $A > C$ algebraic velocity is always greater than 0. The directions of motion are shown on the figure for the both cases.
We can conclude about dependence y from x (a^2 from r^2) for system (6): $x \to 0$, $y \to 0$ with $t \to \infty$; point (0, 0) is a stationary point, stable knot; the components of the absolute angular velocity of the body tend to zero with $t \to \infty$; the body tends to the rest state.

References

1. F.L.Chernousko. Motion of a rigid body with cavities filled with a viscous fluid, at low Reynolds numbers. Zh. Vychisl. Matem. i Matem. Fiz., Vol. 5, No. 6, 1965, pp. 1049–1070.
2. L.D.Akulenko, D.D.Leshchenko, F.L. Chernousko. Fast motion of a heavy rigid body about a fixed point in a resistive medium, Izv. AN SSSR. MTT [Mechanics of Solids], No. 3, 1982, pp. 5–13.
3. L.D. Akulenko, D.D. Leshchenko. Fast rotation of a heavy gyrostat about a fixed point in a resistive medium. Prikl. Mekhanika, Vol. 18, No. 7, 1982, pp. 102 – 107.
4. V.V. Beletskii. Motion of an Artificial Satellite About Its Centre of Mass [in Russian]. Nauka, Moscow, 1965.
5. L.D.Landau, E.M.Lifshits. Theoretical Physics, Vol. 1: Mechanics [in Russian], Nauka, Moscow, 1973.
6. Yu.A.Mitropol'skii. The Averaging Method in Nonlinear Mechanics [in Russian]. Naukova Dumka, Kiev, 1971.
7. E.Kamke. Handbook of Ordinary Differential Equations [Russian translation]. Nauka, Moscow, 1971.
8. V.Volterra. Mathematical Theory of Struggle for Existence [Russian translation]. Nauka, Moscow, 1976.

Dmitrii Davidovich Leshchenko, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Chair of Theoretical Mechanics of Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture. His research interests include the investigation of evolution of perturbed rotational motions of a rigid body under the action of moments of different physical nature. Such problems take place in the investigation of the motion of satellite around its centre of mass, in the motion of the aircraft at the entrance in the atmosphere, in dynamics of gyroscopes.

Svetlana Gennadievna Suksova, Post-graduate student of the Chair of Theoretical Mechanics of Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture. Her research interests include the investigation of motions of a rigid body that are close to Euler-Poinsot case in the presence of small perturbed moments. Such problems take place in the investigation of orientation and stabilization of cosmic apparatus.