

УДК 531.383

©2002. Л.Д. Акуленко, Т.А. Козаченко, Д.Д. Лещенко

ВОЗМУЩЕННЫЕ ВРАЩЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕСТАЦИОНАРНОГО ВОССТАНАВЛИВАЮЩЕГО МОМЕНТА

Исследуются возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа, под действием восстанавливающего момента, зависящего от медленного времени $\tau = \varepsilon t$ ($\varepsilon \ll 1$ – малый параметр, t – время) и угла нутации θ , а также возмущающего момента, медленно изменяющегося во времени. Тело предполагается быстро закрученным, проекции вектора возмущающего момента на главные оси инерции тела предполагаются малыми по сравнению с восстанавливающим моментом. Получены усредненные системы уравнений движения в первом и втором приближениях для существенно нелинейной двухчастотной системы. Рассмотрены примеры движения тела под действием конкретного вида возмущающего и управляющего моментов сил.

Рассмотрим движение динамически симметричного твердого тела вокруг неподвижной точки O под действием восстанавливающего момента, зависящего от медленного времени $\tau = \varepsilon t$ и угла нутации θ , а также возмущающего момента, медленно изменяющегося во времени. Уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned}
 A\dot{p} + (C - A)qr &= k(\tau, \theta) \sin \theta \cos \varphi + M_1, \\
 A\dot{q} + (A - C)pr &= -k(\tau, \theta) \sin \theta \sin \varphi + M_2, \\
 C\dot{r} &= M_3, \\
 M_i &= M_i(p, q, r, \psi, \theta, \varphi, \tau), \quad \tau = \varepsilon t \quad (i = 1, 2, 3), \\
 \dot{\psi} &= (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{cosec} \theta, \\
 \dot{\theta} &= p \cos \varphi - q \sin \varphi, \\
 \dot{\varphi} &= r - (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{ctg} \theta.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь p, q, r – проекции вектора угловой скорости тела на его главные оси инерции тела, проходящие через точку O . Величины M_i – проекции вектора возмущающего момента на те же оси. Они зависят от медленного времени $\tau = \varepsilon t$ и являются периодическими функциями углов Эйлера ψ, φ, θ с периодами 2π . Здесь A – экваториальный, C – осевой моменты инерции тела относительно точки O , $A \neq C$. Предполагается, что на тело действует восстанавливающий момент $k(\tau, \theta)$, медленно изменяющийся во времени и зависящий от угла нутации. При отсутствии возмущений $M_i = 0$ и $k(\tau, \theta) = \operatorname{const}$ уравнения (1) отвечают случаю волчка Лагранжа.

Система (1) исследуется при условии выполнения предположений

$$(p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}} \ll r, \quad Cr^2 \gg k, \quad |M_i| \ll k \quad (i = 1, 2, 3), \tag{2}$$

которые означают, что направление угловой скорости тела близко к оси динамической симметрии; угловая скорость осевого вращения достаточно велика, так что кинетическая энергия тела много больше потенциальной энергии, обусловленной восстанавливающим моментом; проекции вектора возмущающего момента на главные оси инерции тела малы по сравнению с восстанавливающим моментом.

Неравенства (2) позволяют ввести следующие соотношения

$$\begin{aligned} p &= \varepsilon P, \quad q = \varepsilon Q, \quad k(\tau, \theta) = \varepsilon K(\tau, \theta), \quad \tau = \varepsilon t, \\ M_i &= \varepsilon^2 M_i^*(P, Q, r, \psi, \theta, \varphi, \tau) \quad (i = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (3)$$

Новые переменные P, Q , а также переменные r, ψ, θ, φ , функции K, M_i^* ($i = 1, 2, 3$) и параметры A, C предполагаются ограниченными величинами порядка единицы при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Ставится задача исследования асимптотического поведения системы (1) при малом ε , если выполнены условия (2), (3). Это исследование будет проводиться методом усреднения [1, 2] на интервале времени порядка ε^{-1} . Метод усреднения широко применялся в задачах динамики твердого тела. Упрощающие предположения (2) или (3) дают возможность получить в общем случае довольно простую схему усреднения и исследовать ряд примеров.

Сделаем в системе (1) замену переменных (3). Сократив обе части первых двух уравнений (1) на ε , получим

$$\begin{aligned} A\dot{P} + (C - A)Qr &= K(\tau, \theta) \sin \theta \cos \varphi + \varepsilon M_1^*, \\ A\dot{Q} + (A - C)Pr &= -K(\tau, \theta) \sin \theta \sin \varphi + \varepsilon M_2^*, \\ C\dot{r} &= \varepsilon^2 M_3^*, \quad \dot{\psi} = \varepsilon(P \sin \varphi + Q \cos \varphi) \operatorname{cosec} \theta, \\ \dot{\varphi} &= r - \varepsilon(P \sin \varphi + Q \cos \varphi) \operatorname{ctg} \theta, \\ \dot{\theta} &= \varepsilon(P \cos \varphi - Q \sin \varphi). \end{aligned} \quad (4)$$

По терминологии [1, 2] система (4) является двухчастотной и существенно нелинейной.

Рассмотрим сначала систему нулевого приближения и положим $\varepsilon = 0$ в (4). Из последних четырех уравнений находим

$$r = r_0, \quad \psi = \psi_0, \quad \theta = \theta_0, \quad \varphi = r_0 t + \varphi_0, \quad K_0 = K(\tau_0, \theta_0). \quad (5)$$

Здесь $r_0, \psi_0, \theta_0, \varphi_0, \tau_0$ – постоянные, равные начальным значениям переменных при $t = 0$. Подставим равенства (5) в первые два уравнения (4) при $\varepsilon = 0$ и проинтегрируем полученную систему линейных уравнений для P, Q . Получим

$$\begin{aligned} P &= a \cos \gamma + b \sin \gamma + K(\tau, \theta) C^{-1} r^{-1} \sin \theta \sin \varphi, \\ Q &= a \sin \gamma - b \cos \gamma + K(\tau, \theta) C^{-1} r^{-1} \sin \theta \cos \varphi, \\ a &= P_0 - K_0 C^{-1} r_0^{-1} \sin \theta_0 \sin \varphi_0, \quad b = -Q_0 + K_0 C^{-1} r_0^{-1} \sin \theta_0 \cos \varphi_0, \\ \dot{\gamma} &= n, \quad \gamma(0) = 0, \quad n = (C - A) A^{-1} r \neq 0, \quad \left| \frac{n}{r} \right| \leq 1, \\ \alpha &= \varphi + \gamma, \quad r = r_0 + \varepsilon \delta. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь a, b – осцилирующие переменные типа Ван дер Поля, введенные вместо (3), а переменная γ имеет смысл фазы колебаний.

Рассмотрим систему (4) при $\varepsilon \neq 0$ и соотношения (6) как формулы замены переменных (содержащие переменную γ), определяющие переход от переменных P, Q к переменным a, b и обратно. Пользуясь этими формулами, перейдем в системе (4) от переменных $P, Q, r, \psi, \theta, \varphi, \tau$ к новым переменным $a, b, \delta, \psi, \theta, \alpha, \gamma, \tau$. Отметим, что фазы φ, α, γ связаны конечным соотношением, которое оказывается более удобным для дальнейших исследований стандартной системы с двумя вращающимися фазами γ, α . После ряда преобразований

получим систему вида

$$\begin{aligned}
 \dot{a} &= \varepsilon A^{-1}(M_1^0 \cos \gamma + M_2^0 \sin \gamma) - \varepsilon K(\tau, \theta) C^{-1} r_0^{-1} \cos \theta \times \\
 &\quad \times (b - K(\tau, \theta) C^{-1} r_0^{-1} \sin \theta \cos \alpha) - \varepsilon C^{-1} r_0^{-1} \sin \theta \sin \alpha \times \\
 &\quad \times \left[\frac{\partial K(\tau, \theta)}{\partial \theta} (a \cos \alpha + b \sin \alpha) + \frac{\partial K(\tau, \theta)}{\partial \tau} \right] + \varepsilon^2 K(\tau, \theta) C^{-2} r_0^{-2} M_3^0 \sin \theta \sin \alpha + \\
 &\quad + \varepsilon^2 K(\tau, \theta) C^{-1} r_0^{-2} \delta \cos \theta (b - 2K(\tau, \theta) C^{-1} r_0^{-1} \sin \theta \cos \alpha) + \\
 &\quad + \varepsilon^2 C^{-1} r_0^{-2} \delta \sin \theta \sin \alpha \left[\frac{\partial K(\tau, \theta)}{\partial \theta} (a \cos \alpha + b \sin \alpha) + \frac{\partial K(\tau, \theta)}{\partial \tau} \right], \\
 \dot{b} &= \varepsilon A^{-1}(M_1^0 \sin \gamma - M_2^0 \cos \gamma) + \varepsilon K(\tau, \theta) C^{-1} r_0^{-1} \cos \theta \times \\
 &\quad \times (a + K(\tau, \theta) C^{-1} r_0^{-1} \sin \theta \sin \alpha) + \varepsilon C^{-1} r_0^{-1} \sin \theta \cos \alpha \times \\
 &\quad \times \left[\frac{\partial K(\tau, \theta)}{\partial \theta} (a \cos \alpha + b \sin \alpha) + \frac{\partial K(\tau, \theta)}{\partial \tau} \right] - \varepsilon^2 K(\tau, \theta) C^{-2} r_0^{-2} M_3^0 \sin \theta \cos \alpha - \quad (7) \\
 &\quad - \varepsilon^2 K(\tau, \theta) C^{-1} r_0^{-2} \delta \cos \theta (a + 2K(\tau, \theta) C^{-1} r_0^{-1} \sin \theta \sin \alpha) - \\
 &\quad - \varepsilon^2 C^{-1} r_0^{-2} \delta \sin \theta \cos \alpha \left[\frac{\partial K(\tau, \theta)}{\partial \theta} (a \cos \alpha + b \sin \alpha) + \frac{\partial K(\tau, \theta)}{\partial \tau} \right], \\
 \dot{\delta} &= \varepsilon C^{-1} M_3^0, \quad \dot{\theta} = \varepsilon (a \cos \alpha + b \sin \alpha), \\
 \dot{\psi} &= \varepsilon (a \sin \alpha - b \cos \alpha) \operatorname{cosec} \theta + \varepsilon K(\tau, \theta) C^{-1} r_0^{-1} - \varepsilon^2 K(\tau, \theta) C^{-1} r_0^{-2} \delta, \\
 \dot{\alpha} &= CA^{-1} r_0 + \varepsilon CA^{-1} r_0 \delta - \varepsilon (a \sin \alpha - b \cos \alpha) \operatorname{ctg} \theta - \\
 &\quad - \varepsilon K(\tau, \theta) C^{-1} r_0^{-1} \cos \theta + \varepsilon^2 K(\tau, \theta) C^{-1} r_0^{-2} \delta \cos \theta, \\
 \dot{\gamma} &= (C - A) A^{-1} r_0 + \varepsilon (C - A) A^{-1} \delta, \\
 M_i^0(a, b, \delta, \psi, \theta, \alpha, \gamma, \tau) &= M_i^*(P, Q, r, \psi, \theta, \varphi, \tau) \quad (i = 1, 2, 3).
 \end{aligned}$$

При рассмотрении системы (7) используем подход, изложенный в работе [3] для постоянного восстанавливающего момента $k = \text{const}$ и в [4,5] для восстанавливающего момента, зависящего от угла нутации $k(\theta)$.

Система уравнений (7) может быть приведена к виду

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{x}} &= \varepsilon \mathbf{F}_1(x, y) + \varepsilon^2 \mathbf{F}_2(x, y), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \\
 \dot{y}^1 &= \omega_1 + \varepsilon g_1(x, y) + \varepsilon^2 g_2(x, y), \quad y^1(0) = y^{10}, \\
 \dot{y}^2 &= \omega_2 + \varepsilon h_1(x, y) + \varepsilon^2 h_2(x, y), \quad y^2(0) = y^{20},
 \end{aligned} \quad (8)$$

где вектор-функция $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^5)$ составлена из медленных переменных $a, b, \delta, \psi, \theta$; через y^1 и y^2 обозначены быстрые переменные α, γ ; через ω_1, ω_2 – постоянные фазы, равные $CA^{-1}r_0$ и $(C - A)A^{-1}r_0$ соответственно. Функции \mathbf{F}_i, g_i, h_i ($i = 1, 2$) определяются правыми частями уравнений (7).

Двумерный вектор (g_1, h_1) обозначим \mathbf{Z}_1 . Так как возмущающие моменты M_i^* ($i = 1, 2, 3$) периодичны по φ с периодом 2π , то согласно замене (6) функции M_i^0 из (7) будут периодическими функциями α и γ с периодами 2π .

Согласно известной процедуре построения асимптотики [2], ищем замену переменных

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x} &= \mathbf{x}^* + \varepsilon \mathbf{u}_1(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) + \varepsilon^2 \mathbf{u}_2(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) + \dots, \\
 \mathbf{y} &= \mathbf{y}^* + \varepsilon \mathbf{v}_1(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) + \varepsilon^2 \mathbf{v}_2(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) + \dots, \\
 \mathbf{y} &= (y^1, y^2), \quad \mathbf{x}^* = (x^{*1}, \dots, x^{*5}), \quad \mathbf{y}^* = (y^{*1}, y^{*2})
 \end{aligned} \quad (9)$$

такую, чтобы система (8) в новых переменных приняла вид

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}^* &= \varepsilon \mathbf{A}_1(\mathbf{x}^*) + \varepsilon^2 \mathbf{A}_2(\mathbf{x}^*) + \dots, \\ \dot{\mathbf{y}}^* &= \boldsymbol{\omega} + \varepsilon \mathbf{B}_1(\mathbf{x}^*) + \varepsilon^2 \mathbf{B}_2(\mathbf{x}^*) + \dots, \quad \boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2).\end{aligned}\quad (10)$$

Известно [2], что уравнения для вектор-функций $\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1$ записываются следующим образом

$$\boldsymbol{\omega} \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial \mathbf{y}^*} = \mathbf{F}_1(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) - \mathbf{A}_1(\mathbf{x}^*), \quad \boldsymbol{\omega} \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial \mathbf{y}^*} = \mathbf{Z}_1(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) - \mathbf{B}_1(\mathbf{x}^*), \quad (11)$$

где $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ – матрица частных производных $\left\|\frac{\partial f_i}{\partial x^j}\right\|$ ($i, j = 1, \dots, 5$). Функции $\mathbf{A}_1(\mathbf{x}^*), \mathbf{B}_1(\mathbf{x}^*)$ определяются по формулам

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{x}^*) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{F}_1(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) dy^{*1} dy^{*2}, \quad \mathbf{B}_1(\mathbf{x}^*) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{Z}_1(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) dy^{*1} dy^{*2}. \quad (12)$$

Функция $\mathbf{u}_2(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ должна быть решением уравнения

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial \mathbf{y}^*} &= \mathbf{G}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) - \mathbf{A}_2(\mathbf{x}^*), \\ \mathbf{G}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) &= \mathbf{F}_2(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) + \mathbf{u}_1 \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial \mathbf{x}^*} + \mathbf{v}_1 \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial \mathbf{y}^*} - \mathbf{A}_1(\mathbf{x}^*) \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial \mathbf{x}^*} - \mathbf{B}_1(\mathbf{x}^*) \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial \mathbf{y}^*}.\end{aligned}\quad (13)$$

Функция $\mathbf{A}_2(\mathbf{x}^*)$ находится по формуле

$$\mathbf{A}_2(\mathbf{x}^*) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{G}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) dy^{*1} dy^{*2}. \quad (14)$$

Определяем усредненную систему уравнений первого приближения для медленных переменных

$$\dot{\mathbf{x}}_1^* = \varepsilon \mathbf{A}_1(\mathbf{x}_1^*), \quad \mathbf{x}_1^*(0) = \mathbf{x}_{10}, \quad (15)$$

систему второго приближения для медленных переменных

$$\dot{\mathbf{x}}_2^* = \varepsilon \mathbf{A}_1(\mathbf{x}_2^*) + \varepsilon^2 \mathbf{A}_2(\mathbf{x}_2^*), \quad \mathbf{x}_2^*(0) = \mathbf{x}_{20} \quad (16)$$

и систему уравнений второго приближения для быстрых переменных

$$\dot{\mathbf{y}}_2^* = \boldsymbol{\omega} + \varepsilon \mathbf{B}_1(\mathbf{x}_1^*(t)), \quad \mathbf{y}_2^*(0) = \mathbf{y}^0, \quad \mathbf{y}^0 = (y^{10}, y^{20}), \quad (17)$$

которая сразу интегрируется

$$\mathbf{y}_2^*(t) = \mathbf{y}^0 + \boldsymbol{\omega} t + \varepsilon \int_0^t \mathbf{B}_1(\mathbf{x}_1^*(s)) ds. \quad (18)$$

Определим вектор-функции

$$\mathbf{x}_\varepsilon^v(t) = \mathbf{x}^{(1)}(\varepsilon t) + \varepsilon \mathbf{x}^{(2)}(\varepsilon t) + \varepsilon \mathbf{u}_1 \left(\mathbf{x}^{(1)}(\varepsilon t), \mathbf{y}^0 + \boldsymbol{\omega} t + \varepsilon \int_0^t \mathbf{B}_1(\mathbf{x}^{(1)}(\varepsilon s)) ds \right), \quad (19)$$

$$\mathbf{y}_\varepsilon^v(t) = \mathbf{y}^0 + \boldsymbol{\omega} t + \varepsilon \int_0^t \mathbf{B}_1(\mathbf{x}^{(1)}(\varepsilon s)) ds.$$

Таким образом, построение приближенных решений $\mathbf{x}_\varepsilon^v(t)$, $\mathbf{y}_\varepsilon^v(t)$ сводится к следующей процедуре: решаем с помощью рядов Фурье уравнения (11), (13), затем по формуле (14) строим вектор-функцию $\mathbf{A}_2(\mathbf{x}^*)$, после этого определяем решение $\mathbf{x}^{(1)}$ и $\mathbf{x}^{(2)}$ согласно [3] и, наконец, по формуле(19) получаем искомые приближения.

Далее описанная процедура реализуется для некоторых конкретных систем уравнений динамики твердого тела.

Рассмотрим возмущенное движение твердого тела в случае Лагранжа с учетом моментов, действующих на тело со стороны внешней среды. Примером может служить внешняя среда, медленно изменяющая свойства вязкости вследствие изменения плотности, температуры или состава. Возмущающие моменты являются линейно-диссипативными и с учетом (3) имеют вид

$$M_1 = -\varepsilon^2 I_1(\tau) P, \quad M_2 = -\varepsilon^2 I_1(\tau) Q, \quad M_3 = -\varepsilon^2 I_3(\tau) r. \quad (20)$$

Здесь $I_1(\tau)$, $I_3(\tau)$ – положительные интегрируемые функции на промежутке $[0, 1]$.

Определим решение усредненной системы уравнений первого приближения (15) с учетом (20) для медленных переменных

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= \theta_0, \\ \psi_1(t) &= \psi_0 + \varepsilon C^{-1} r_0^{-1} \int_0^t K(\varepsilon t', \theta_0) dt', \quad \delta_1(t) = -\varepsilon C^{-1} r_0 \int_0^t I_3(\varepsilon t') dt', \\ a_1(t) &= \exp[F_1](a_0 \cos w - b_0 \sin w), \quad b_1(t) = \exp[F_1](a_0 \sin w + b_0 \cos w), \quad (21) \\ w &= \varepsilon C^{-1} r_0^{-1} \int_0^t \left[\cos \theta_0 K(\varepsilon t', \theta_0) + \frac{1}{2} \sin \theta_0 \frac{\partial K(\varepsilon t', \theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0} \right] dt', \\ F_1 &= -\varepsilon A^{-1} \int_0^t I_1(\varepsilon t') dt'. \end{aligned}$$

Здесь a_0 и b_0 определяются из формул (6).

Решение усредненной системы уравнений второго приближения для быстрых переменных (18) примет вид

$$\begin{aligned} \gamma_2(t) &= (C - A) A^{-1} r_0 t - \varepsilon^2 (C - A) A^{-1} C^{-1} r_0 \int_0^t \left[\int_0^{t'} I_3(\varepsilon t'') dt'' \right] dt', \quad (22) \\ \alpha_2(t) &= C A^{-1} r_0 t - \varepsilon C^{-1} r_0^{-1} \cos \theta \int_0^t K(\varepsilon t', \theta_0) dt' - \varepsilon^2 A^{-1} r_0 \int_0^t \left[\int_0^{t'} I_3(\varepsilon t'') dt'' \right] dt' + \varphi_0. \end{aligned}$$

Согласно (19) и формулам (21) и (22), (11), (13), (14), (16) определим компоненты функций $\mathbf{x}_\varepsilon^v(t)$, отвечающие переменным ψ и θ

$$\begin{aligned}
 u_1^\theta &= AC^{-1}r_0^{-1}(a^{(1)} \sin \alpha^{(2)} - b^{(1)} \cos \alpha^{(2)}), \\
 u_1^\psi &= -AC^{-1}r_0^{-1} \operatorname{cosec} \theta_0(a^{(1)} \cos \alpha^{(2)} + b^{(1)} \sin \alpha^{(2)}), \\
 A_2^\theta &= I_1(\tau)K(\tau, \theta_0)C^{-2}r_0^{-2} \sin \theta_0 + AC^{-2}r_0^{-2} \sin \theta_0 \frac{\partial K(\tau, \theta_0)}{\partial \tau}, \\
 A_2^\psi &= -K(\tau, \theta_0)C^{-1}r_0^{-2}\delta^{(1)} + AK^2(\tau, \theta_0)C^{-3}r_0^{-3} \cos \theta_0, \\
 A'_{1\theta} &= 0, \quad A'_{1\psi} = C^{-1}r_0^{-1} \frac{\partial K(\tau, \theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0}, \\
 (\mathbf{x}^{(1)}(\tau) &= \mathbf{x}_1(t), \quad \tau = \varepsilon t).
 \end{aligned} \tag{23}$$

На основании приведенных формул получим выражения для переменных ψ и θ в виде

$$\begin{aligned}
 \theta_\varepsilon^v(t) &= \theta_0 + R_1^{(1)} + R_1^{(2)}, \\
 R_1^{(1)} &= \varepsilon C^{-2}r_0^{-2} \sin \theta_0 \int_0^{\varepsilon t} I_1(\tau)K(\tau, \theta_0)d\tau + \varepsilon AC^{-1}r_0^{-1} \times \\
 &\quad \times \exp \left[-A^{-1} \int_0^{\varepsilon t} I_1(\tau)d\tau \right] [a_0 \sin(\alpha^{(2)} - w) - b_0 \cos(\alpha^{(2)} - w)], \\
 R_1^{(2)} &= \varepsilon AC^{-2}r_0^{-2} \sin \theta_0 [K(\varepsilon t, \theta_0) - K_0], \\
 \psi_\varepsilon^v &= \psi_0 + S_1^{(1)} + S_1^{(2)} + S_1^{(3)}, \\
 S_1^{(1)} &= C^{-1}r_0 \int_0^{\varepsilon t} K(\tau, \theta_0)d\tau, \\
 S_1^{(2)} &= \varepsilon C^{-3}r_0^{-3} \sin \theta_0 \left[\int_0^{\varepsilon t} \left(\int_0^\tau I_1(\tau^*)K(\tau^*, \theta_0)d\tau^* \right) \frac{\partial K(\tau, \theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0} d\tau + \right. \\
 &\quad \left. + A \int_0^{\varepsilon t} [K(\tau, \theta_0) - K_0] \frac{\partial K(\tau, \theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0} d\tau \right], \\
 S_1^{(3)} &= \varepsilon AC^{-3}r_0^{-3} \cos \theta_0 \int_0^{\varepsilon t} K^2(\tau, \theta_0)d\tau + \varepsilon C^{-1}r_0^{-1} \int_0^{\varepsilon t} K(\tau, \theta_0) \left[\int_0^\tau I_3(\tau^*)d\tau^* \right] d\tau - \\
 &\quad - \varepsilon AC^{-1}r_0^{-1} \exp \left[-A^{-1} \int_0^{\varepsilon t} I_1(\tau)d\tau \right] [a_0 \cos(\alpha^{(2)} - w) + b_0 \sin(\alpha^{(2)} - w)].
 \end{aligned} \tag{24}$$

Зависимость восстанавливающего момента от медленного времени и угла нутации $K(\tau, \theta)$ привела к появлению в формулах (24) дополнительных слагаемых и слагаемых,

содержащих интегралы. Для угла нутации $\theta_\varepsilon^v(t)$ дополнительным слагаемым является $R_1^{(2)}$, а $R_1^{(1)}$ – слагаемое, содержащее интегралы. Для угла прецессии $\psi_\varepsilon^v(t)$ дополнительным слагаемым является $S_1^{(2)}$, а $S_1^{(1)} = C^{-1}r_0 \int_0^{\varepsilon t} K(\tau, \theta_0) d\tau$ и $S_1^{(3)}$ – слагаемые, содержащие интегралы.

Заметим, что формулы для углов нутации и прецессии не содержат параметров возмущающих моментов, если ограничиться построением первого приближения (см. (21)). В этом случае влияние возмущений на регулярную прецессию тела не учитывается и, таким образом, построение второго приближения является существенным.

Рассмотрим задачу о приведении волчка в “спящее состояние”. Малые управляющие моменты примут вид

$$M_1 = -\varepsilon^2 h(\tau) \frac{p^*}{(p^{*2} + q^{*2})^{\frac{1}{2}}}, \quad M_2 = -\varepsilon^2 h(\tau) \frac{q^*}{(p^{*2} + q^{*2})^{\frac{1}{2}}}, \quad M_3 = \varepsilon^2 u(\tau),$$

$$p^* = p - k(\tau, \theta) C^{-1} r^{-1} \sin \theta \sin \varphi, \quad q^* = q - k(\tau, \theta) C^{-1} r^{-1} \sin \theta \cos \varphi.$$

Здесь $h(\tau), u(\tau)$ – заданные интегрируемые функции на промежутке $[0, 1]$; $h(\tau) > 0$, $\tau \sim 1$. С учетом соотношений (3) и (6) для p и q возмущающие моменты согласно (25) имеют вид

$$M_1 = -\varepsilon^2 h(\tau) \frac{a \cos \gamma + b \sin \gamma}{(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad M_2 = -\varepsilon^2 h(\tau) \frac{a \sin \gamma - b \cos \gamma}{(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad M_3 = \varepsilon^2 u(\tau). \quad (26)$$

После подстановки в (7) возмущающих моментов (26) и ряда преобразований получим решение усредненной системы уравнений первого приближения для медленных переменных

$$\begin{aligned} \theta^{(1)} &= \theta_0, \\ r^{(1)} &= r_0 + \varepsilon C^{-1} \int_0^\tau u(\tau') d\tau', \\ \psi^{(1)} &= \psi_0 + C^{-1} r_0^{-1} \int_0^\tau K(\tau', \theta_0) d\tau', \\ a^{(1)} &= F_4 [P_0 \cos \beta + Q_0 \sin \beta - K_0 C^{-1} r_0^{-1} \sin \theta_0 \sin(\beta + \varphi_0)], \\ b^{(1)} &= F_4 [P_0 \sin \beta - Q_0 \cos \beta + K_0 C^{-1} r_0^{-1} \sin \theta_0 \cos(\beta + \varphi_0)], \\ F_4 &= 1 - A^{-1} (a_0^2 + b_0^2)^{-\frac{1}{2}} \int_0^\tau h(\tau') d\tau', \\ \beta &= C^{-1} r_0^{-1} \int_0^{\varepsilon t} \left[K(\tau, \theta_0) \cos \theta_0 + \frac{1}{2} \sin \theta_0 \frac{\partial K(\tau, \theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0} \right] d\tau. \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь угол нутации постоянен. Приращение угла прецессии зависит от восстанавливающего момента $K(\tau, \theta)$. Осевая составляющая вектора угловой скорости ограничена. Медленные переменные a, b являются произведением сомножителя, принимающего положительные, отрицательные значения и нуль в зависимости от подынтегральной функции $h(\tau)$, и осциллирующего сомножителя.

Определим компоненты функции $\mathbf{x}_\varepsilon^v(t)$, отвечающие переменным ψ и θ ,

$$\begin{aligned}
 \theta_\varepsilon^v(t) &= \theta_0 + R_2^{(1)} + R_2^{(2)}, \\
 R_2^{(1)} &= \varepsilon AC^{-1} r_0^{-1} F_4[a_0 \sin(\alpha^{(2)} - \beta) - b_0 \cos(\alpha^{(2)} - \beta)], \\
 R_2^{(2)} &= \varepsilon AC^{-2} r_0^{-2} \sin \theta_0 [K(\varepsilon t, \theta_0) - K_0], \\
 \psi_\varepsilon^v &= \psi_0 + S_2^{(1)} + S_2^{(2)} + S_2^{(3)}, \\
 S_2^{(1)} &= C^{-1} r_0 \int_0^{\varepsilon t} K(\tau, \theta_0) d\tau, \\
 S_2^{(2)} &= \varepsilon AC^{-3} r_0^{-3} \sin \theta_0 \int_0^{\varepsilon t} [K(\tau, \theta_0) - K_0] \left. \frac{\partial K(\tau, \theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0} d\tau, \\
 S_2^{(3)} &= \varepsilon AC^{-3} r_0^{-3} \cos \theta_0 \int_0^{\varepsilon t} K^2(\tau, \theta_0) d\tau - \varepsilon C^{-2} r_0^{-2} \int_0^{\varepsilon t} K(\tau, \theta_0) \left[\int_0^\tau u(\tau') d\tau' \right] d\tau - \\
 &\quad - \varepsilon AC^{-1} r_0^{-1} \operatorname{cosec} \theta_0 F_4[a_0 \cos(\alpha^{(2)} - \beta) + b_0 \sin(\alpha^{(2)} - \beta)].
 \end{aligned} \tag{28}$$

Полученные слагаемые $S_2^{(1)}, S_2^{(2)}, S_2^{(3)}$ дополняют известное из приближенной теории гироскопов выражение для угловой скорости прецессии $\omega_p = KC^{-1}r_0^{-1}$.

1. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 503 с.
2. Волосов В.М., Моргунов Б.И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. – М.: Изд-во МГУ, 1971. – 507 с.
3. Лещенко Д.Д., Шамаев А.С. Возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1987. – №6. – С. 8–17.
4. Лещенко Д.Д., Саллам С.Н. Возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии // Прикл. математика и механика. – 1990. – 54, вып. 2 – С. 224 – 232.
5. L. Akulenko, D. Leshchenko, T. Kushpil and I. Timoshenko. Problems of Evolution of Rotations of a Rigid Body under the Action of Perturbing Moments // Multibody System Dynamics. – 2001. – 6. – №1. – P. 3–16.